

СИМВОЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НЕЯВНЫМ МЕТОДОМ НАЛОЖЕНИЯ

С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Наиболее кратко ток или напряжение j -й ветви линейной электрической цепи записывается через матричное решение методом Крамера [1] системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа,

$$O_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (1)$$

где Δ – определитель матрицы параметров системы уравнений; Δ_j – определитель матрицы параметров, в которой j -й столбец заменен на матрицу-столбец правой части системы уравнений. Далее, для краткости, будем называть матрицы, определители которых равны соответственно Δ и Δ_j , матрицей знаменателя и матрицей числителя соответственно. В частном случае, когда выполняется разложение определителя матрицы числителя по элементам j -го столбца, получается следующая формула для произвольного отклика цепи

$$O_j = \sum_{i=1}^n F_{ji} x_i, \quad (2)$$

где i, j – номера ветвей, содержащих источники воздействия и приемники откликов соответственно; x_i – напряжение или ток соответствующего источника воздействия с номером i ; F_{ji} – схемная (передаточная от ветви i к ветви j) функция, введенная Максвеллом в 1873 году [2]; n – число независимых источников в схеме.

Выражение (2) является классической формулировкой принципа наложения, который положен в основу анализа линейных систем, в частности, электрических цепей с несколькими источниками воздействия [3]. Функции в (2) представляются в комплексной или операторной форме при анализе установившегося гармонического режима или переходного процесса соответственно. Представление электрической цепи в виде многополюсника, заданного схемными функциями, оказалось столь плодотворным, что применение общего выражения (1) и любые другие способы разложения определителя матрицы числителя не получили распространения.

В выражении (2) слагаемые числителя (знаменатель у всех схемных функций общий) сгруппированы при параметрах независимых источников, то есть явно. Учитывая это, далее принцип наложения в формулировке (2) будем называть явным. Однако еще Кирхгоф в своем (исторически первом) топологическом методе [4] применял группировку слагаемых числителя Δ_j относительно произведений сопротивлений схемы, соответствующих ее деревьям. При этом параметры независимых источников появлялись в формируемом выражении многократно, то есть неявно. В матричной интерпретации это соответствует разложению определителя матрицы числителя (1) по элементам, выбираемым произвольно. Недостатком явного принципа наложения является необходимость построения при его

использовании множества n схемных функций, что препятствует построению компактных и оптимальных по числу вычислительных операций выражений искомым откликов [5].

В отличие от (2) неявный принцип наложения [6] характеризуется формулой для отклика, содержащей только одну схемную функцию,

$$O_j = V_{x_1}^{x \rightarrow y_{II}} \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right) \cdot x_1, \quad (3)$$

где $V_{x_1}^{x \rightarrow y_{II}}$ – символьная передаточная функция схемы от источника x_1 , выбранного за опорный источник, к ветви отклика j при преобразовании всех независимых источников, кроме x_1 , в зависимые источники, управляемые переменной (током или напряжением) соответствующего опорного источника x_1 . Тип управляемых источников (УИ) определяется переменной x_1 , с одной стороны, и переменными x_2, x_3, \dots, x_n , с другой стороны. Параметры УИ равны частным от деления переменных x_2, x_3, \dots, x_n на x_1 . Эти параметры указаны в (3) в качестве аргументов функции $V_{x_1}^{x \rightarrow y_{II}}$. Выражение (3) требует нахождения только одной схемной функции (при произвольном числе независимых источников), что сокращает сложность выражений для токов или напряжений по сравнению с формулой (2). Это обеспечивает (при надлежащем выборе элементов [5]) получение выражений, оптимальных по вычислительной сложности, которая служит критерием оценки современных методов и программ символьного анализа [7].

Недостатком выражения (3) является использование в нем в качестве аргументов отношений параметров независимых источников схемы, что усложняет аналитическое и численное исследование символьной функции. Следует обратить внимание на то, что определителю матрицы знаменателя Δ соответствует определитель схемы, которая получена из исходной схемы в результате стягивания источников напряжения и приемников тока, а также удаления источников тока и приемников напряжения [3]. Это упрощает нахождение знаменателя. Поэтому было бы желательно сопоставить и определителю матрицы числителя Δ_j определитель схемы, полученной из исходной схемы в результате некоторых преобразований. С одной стороны, это позволило бы находить произвольный ток или напряжение электрической цепи в виде отношения (1) определителей схемы числителя и схемы знаменателя, избежав применения понятия «схемная функция» (2). С другой стороны, схемная интерпретация матрицы числителя в сочетании с отображением матрицы схемой на базе источников тока, управляемых напряжением (ИТУН) [8], обеспечивает более эффективное аналитическое решение систем линейных алгебраических уравнений произвольной физической природы.

В настоящей работе предлагается специальная форма неявного принципа наложения, согласно которой отклик является функцией не отношений параметров источников, как в (3), а непосредственно самих параметров источников, как в (1). Таким образом, отклик

$$O_j = W_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4)$$

где W_j – символьная функция, в которой аргументами на равных правах являются как параметры пассивных элементов и УИ, так и параметры всех независимых источников. Для определенности далее будем рассматривать установившийся гармонический режим, и все переменные представим в комплексных действующих значениях (обозначим их подчеркиванием).

Введем в исходную схему дополнительный опорный источник ЭДС $\underline{E}=1$ или источник тока $\underline{J}=1$, а затем заменим все независимые источники зависимыми источниками, управляемыми напряжением опорного источника ЭДС \underline{E} или током опорного источника \underline{J} соответственно. Построение такой схемы замещения можно трактовать как расширение возможностей обобщенной теоремы компенсации [6], поскольку здесь независимые источники компенсируются зависимыми источниками, управляемыми дополнительным источником, введенным в схему. Докажем эквивалентность получаемой схемы замещения. В процессе доказательства выведем основные алгебраические и схемно-алгебраические формулы предлагаемого в статье неявного метода наложения.

Теорема 1. Если в произвольной линейной электрической схеме на рис. 1 а ввести последовательно с некоторым источником ЭДС, например, \underline{E}_1 дополнительный опорный источник ЭДС $\underline{E}=1$, а все независимые источники схемы заменить на УИ, управляемые напряжением введенного опорного источника $\underline{U}=\underline{E}=1$, с параметрами (см. рис. 1 б)

$$k_1 = \frac{\underline{E}_1 - 1}{\underline{U}} = \frac{\underline{E}_1 - 1}{1}; k_l = \frac{\underline{E}_l}{\underline{U}} = \frac{\underline{E}_l}{1}; y_j = \frac{\underline{J}_j}{\underline{U}} = \frac{\underline{J}_j}{1}, \quad (5)$$

где $l=2,3, \dots, n$; $j=1,2, \dots, s$; k_1, k_l, y_j – коэффициенты передачи напряжения и передаточная проводимость соответственно, то напряжения и токи в любой ветви схемы не изменятся. В знаменателях выражений (5) не удалены единицы, которые отображают напряжение опорного источника, чтобы напомнить о соответствующей размерности параметров УИ. На рис. 1 б эти единицы удалены и в дальнейшем при формировании символьных выражений не используются. В числителе k_1 из (5) от переменной \underline{E}_1 вычитается единица для компенсации введенного дополнительного источника $\underline{E}=1$. Это эквивалентно включению последовательно с источником \underline{E} ЭДС $\underline{E}=-1$.

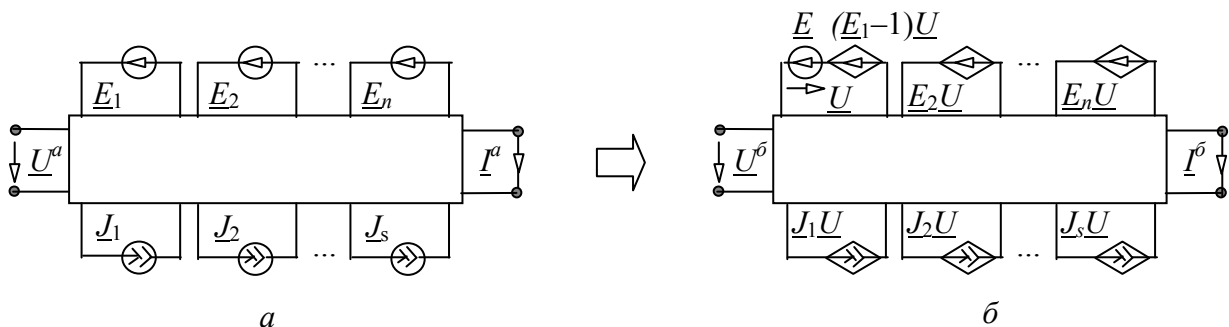


Рис. 1

Для доказательства теоремы 1 подтвердим, что произвольные соответствующие напряжения и токи в схемах на рис. 1 а и 1 б равны, используя метод схемных определителей [9, 10]. Схемно-алгебраическое выражение напряжения по явному методу наложения для схемы на рис. 1 а возьмем из [6]. Таким образом,

$$\underline{U}^a = \frac{\left| \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right] \underline{E}_1 + \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right] \underline{E}_2 + \dots + \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right] \underline{E}_n + \\ + \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right] \underline{J}_1 + \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right] \underline{J}_2 + \dots + \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right] \underline{J}_s + \\ \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right] \end{array} \right|, \quad (6)$$

где между вертикальными чертами (символами определителя) помещены соответствующие рис. 1а схемы; спаренными и одинарными стрелками показаны генератор и приемник неудаляемого управляемого источника – ГНУИ и ПНУИ соответственно.

Схеме на рис. 1б соответствуют следующие алгебраическое и схемно-алгебраическое выражения напряжения

$$\underline{U}^b = K_{UE=1} \cdot 1 = \frac{N_{KUE=1}}{D} = \frac{\left| \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right] \end{array} \right|}{D}, \quad (7)$$

где $K_{UE=1}$ – коэффициент передачи напряжения от единичного опорного источника \underline{E} к приемнику напряжения \underline{U}^b ; $N_{KUE=1}$ – числитель коэффициента $K_{UE=1}$. В знаменателе (7) находится определитель схемы знаменателя D , выражение которого не зависит от явного или неявного метода анализа схемы. Схема знаменателя (7) совпадает со схемой знаменателя в (6).

Используя для преобразования числителя (7) формулу выделения параметров источников, управляемых напряжением ГНУИ [6], получим

$$\begin{aligned}
 N_{KUE=1} = & \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + (\underline{E}_1 - 1) \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + \\
 & + \underline{E}_2 \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + \dots + \underline{E}_n \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + \\
 & + \underline{J}_1 \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + \underline{J}_2 \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + \dots + \underline{J}_s \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right|. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Раскроем скобки во втором слагаемом (8). После удаления двух равных по модулю, но противоположных по знаку слагаемых, правая часть формулы (8) будет повторять числитель (6). Это означает, что числители (6) и (7) равны, следовательно, $\underline{U}^a = \underline{U}^b$. Приведенным доказательством одновременно обоснована схема числителя для напряжения, использованная в (7).

Рассмотрим вторую часть доказательства теоремы 1. Подтвердим, что токи \underline{I}^a и \underline{I}^b в схемах на рис. 1 а и б соответственно равны. Схемно-алгебраическое выражение тока запишем согласно [6]

$$\begin{aligned}
 \underline{I}^a = & \frac{\left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| \underline{E}_1 + \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| \underline{E}_2 + \dots + \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| \underline{E}_n + \\
 & + \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| \underline{J}_1 + \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| \underline{J}_2 + \dots + \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| \underline{J}_s}{D}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Представим по рис. 1 б аналогично (7) выражение для тока

$$\underline{I}^b = Y_{IE=1} \cdot 1 = \frac{N_{YIE=1}}{D} = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right|}{D}, \quad (10)$$

где $Y_{IE=1}$ – передаточная проводимость от единичного опорного источника \underline{E} к приемнику тока \underline{I}^b ; $N_{YIE=1}$ – числитель проводимости $Y_{IE=1}$.

Используя для преобразования числителя (10) по аналогии с первой частью теоремы 1 формулу выделения параметров зависимых источников, управляемых напряжением одного ГНУИ [6], получим выражение, подобное (8). Различие заключается лишь в положении ПНУИ, который во всех схемных определителях находится с правой стороны многополюсника, то есть так, как в формуле (10), а левая сторона многополюсника разомкнута. После раскрытия скобок и удаления двух равных по модулю, но противоположных по знаку слагаемых, получим выражение, повторяющее числитель (9). При равных знаменателях в (9) и (10) это означает, что $\underline{I}^a = \underline{I}^b$. Следовательно, теорема 1 доказана. Обоснована также схема числителя для функции тока, использованная в (10).

На основании теоремы 1 запишем тождество, которое отображает равенство числителей соответствующих символьных функций отклика, представленных по неявному и явному методам наложения. По существу, это формула выделения всех параметров зависимых источников, управляемых одним опорным единичным источником напряжения.

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{c} (E_1-1)U \\ \rightarrow U \\ \leftarrow \\ J_1U \\ J_2U \\ \dots \\ J_sU \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \\ \dots \\ \leftarrow \end{array} \right| \underline{E}_1 + \\
 & + \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \dots \\ \rightarrow \end{array} \right| \underline{E}_2 + \dots + \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \dots \\ \rightarrow \end{array} \right| \underline{E}_n + \\
 & + \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \dots \\ \leftarrow \end{array} \right| \underline{J}_1 + \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \dots \\ \leftarrow \end{array} \right| \underline{J}_2 + \dots + \left| \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \dots \\ \leftarrow \end{array} \right| \underline{J}_s. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Приемник НУИ занимает в многополюснике (см. выражение (11)) место приемника напряжения или тока.

Докажем возможность выбора в обобщенной теореме компенсации в качестве опорного источника дополнительно введенного источника тока с единичным значением. Для этого сформулируем теорему 2 путем замены понятий в тексте теоремы 1 на дуальные [3] (взаимосоответствующие [11]) понятия: управляющее напряжение $\underline{U} \Leftrightarrow$ управляющий ток \underline{I} ; ИНУН \Leftrightarrow ИТУТ; ИТУН \Leftrightarrow ИНУТ; коэффициент передачи напряжения $k \Leftrightarrow$ коэффициент передачи тока t ; передаточная проводимость $y \Leftrightarrow$ передаточное сопротивление z ; идеальный проводник (короткозамкнутая ветвь) \Leftrightarrow разрыв (разомкнутая ветвь); последовательный \Leftrightarrow параллельный; источник ЭДС \Leftrightarrow источник тока.

Теорема 2. Если в произвольной линейной электрической схеме на рис. 2 а ввести параллельно с некоторым источником тока, например, \underline{J}_1

дополнительный опорный источник тока $\underline{J}=1$, а все независимые источники схемы заменить на УИ, управляемые током введенного опорного источника $\underline{I}=\underline{J}=1$, с параметрами (см. рис. 2 б)

$$t_1 = \frac{\underline{J}_1 - 1}{\underline{J}} = \frac{\underline{J}_1 - 1}{1}; t_j = \frac{\underline{J}_j}{\underline{J}} = \frac{\underline{J}_j}{1}; z_l = \frac{\underline{E}_l}{\underline{J}} = \frac{\underline{E}_l}{1}, \quad (12)$$

где $l=1,2,\dots,n$; $j=2,3,\dots,s$, то напряжения и токи в любой ветви схемы не изменятся. В дальнейшем единицы в знаменателях (12) будут удалены.

Теорема 2, полученная из ранее доказанной теоремы 1 путем замены величин и терминов взаимосоответствующими величинами и терминами, является доказанной в силу принципа взаимосоответствия [11].

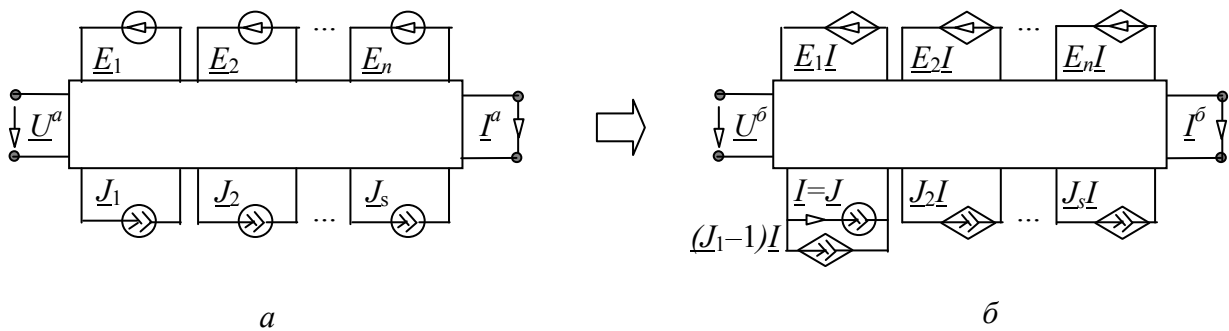


Рис. 2

Запишем с использованием теоремы 2 по схеме на рис. 2 б алгебраические и схемно-алгебраические выражения для напряжения

$$\underline{U}^a = \underline{U}^o = Z_{UJ=1} \cdot 1 = \frac{N_{ZUJ=1}}{D} = \frac{\text{[Circuit Diagram from Fig. 2b]}}{D} \quad (13)$$

и тока

$$\underline{I}^a = \underline{I}^o = T_{IJ=1} \cdot 1 = \frac{N_{TIJ=1}}{D} = \frac{\text{[Circuit Diagram from Fig. 2b]}}{D}, \quad (14)$$

где $Z_{UJ=1}$ – передаточное сопротивление от опорного источника тока \underline{J} к приемнику напряжения \underline{U}^o для преобразованной схемы на рис. 2 б, в которую

введен единичный источник тока \underline{J} , а все независимые источники представлены в виде УИ; $T_{IJ=1}$ – коэффициент передачи тока от опорного источника \underline{J} к приемнику тока \underline{I}° для преобразованной схемы на рис. 2 б; $N_{Z_{UJ=1}}$ и $N_{T_{IJ=1}}$ – числители схемных функций $Z_{UJ=1}$ и $T_{IJ=1}$ соответственно. Определители схем числителей в (13) и (14) совпадают с соответствующими определителями в (7) и (10), несмотря на различные схемы числителей, которые взаимно эквивалентны. Схемно-алгебраические выражения числителей (13) и (14) получены из рис. 2 б путем замены опорного источника \underline{J} на ГНУИ, а приемника напряжения \underline{U}° или тока \underline{I}° на ПНУИ [10]. Алгебраические выражения в (13) и (14) предназначены для использования топологических методов формирования символьных схемных функций (СФ) [3], а схемно-алгебраические выражения – для получения СФ методом схемных определителей [9, 10].

Исходя из теоремы 2, запишем по аналогии с (11) еще одно тождество, которое также отображает равенство числителей произвольного отклика цепи, полученных неявным и явным методом наложения. Следует отметить, что при анализе неявным методом здесь используются УИ, управляемые током, в отличие от тождества (11), в котором применяются УИ, управляемые напряжением.

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \overline{E_1 I} \\ \overline{E_2 I} \\ \dots \\ \overline{E_n I} \end{array} \\ \begin{array}{c} \overline{I} \\ \overline{J_1 I} \\ \overline{J_2 I} \\ \dots \\ \overline{J_s I} \end{array} \\ \begin{array}{c} \overline{(J_1-1)I} \\ \overline{J_1 I} \\ \overline{J_2 I} \\ \dots \\ \overline{J_s I} \end{array} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \overline{E_1} \\ \overline{E_2} \\ \dots \\ \overline{E_n} \end{array} \right| + \\
 & + \left| \begin{array}{c} \overline{E_2} \\ \overline{E_3} \\ \dots \\ \overline{E_n} \end{array} \right| \overline{E_1} + \dots + \left| \begin{array}{c} \overline{E_n} \end{array} \right| \overline{E_1} + \\
 & + \left| \begin{array}{c} \overline{J_1} \\ \overline{J_2} \\ \dots \\ \overline{J_s} \end{array} \right| \overline{E_1} + \left| \begin{array}{c} \overline{J_2} \\ \overline{J_3} \\ \dots \\ \overline{J_s} \end{array} \right| \overline{E_1} + \dots + \left| \begin{array}{c} \overline{J_s} \end{array} \right| \overline{E_1}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Тождества (11) и (15) отражают схемно-алгебраическую связь неявного и явного принципов наложения. Они показывают, что явный принцип наложения является частным случаем неявного принципа наложения. Формулы неявного принципа наложения (см. выражение (4), левые части выражений (11) и (15)) переходят в формулы явного принципа (см. выражение (2), правые части выражений (11) и (15)) при условии первоочередного выделения параметров всех источников. Практически тождества (11) и (15) используются по мере необходимости в соответствии с порядком формирования символьных выражений по заданному критерию вычислительной сложности [5], а также на завершающем этапе построения функций, когда исчерпаны все первоочередные операции. Это операции, приводящие к исчезновению одного из двух

слагаемых в формулах выделения параметров элементов [9]. Приложения 1 и 2 иллюстрируют использование неявного метода наложения для анализа установившихся режимов в несимметричных трехфазных цепях и расчета переходных процессов в линейных электрических цепях.

Выводы

1. Рассмотрена схемная интерпретация матрицы числителя в формуле Крамера (1), что позволяет выполнять анализ линейных электрических цепей с произвольным числом независимых источников, минуя процедуру нахождения схемных функций. При этом искомый отклик находится в виде отношения определителей двух схем: схемы числителя и схемы знаменателя.

2. Разработанный неявный метод наложения реализуется в виде алгебраических, схемно-алгебраических выражений и тождеств, которые ориентированы на использования произвольных топологических или схемно-топологических методов. Показано, что неявный метод наложения обобщает традиционный (явный) метод наложения и повышает эффективность символьного анализа электрических цепей.

Приложение 1. *Применение неявного метода наложения для расчета установившихся режимов трехфазных несимметричных цепей.*

Известный метод симметричных составляющих позволяет упростить расчет таких цепей только в случае, когда причины нарушения несимметрии сосредоточены в одном или двух местах системы [3]. В случае произвольной несимметричной трехфазной цепи символьный анализ может проводиться, как и любой другой цепи с несколькими гармоническими источниками, явным методом наложения. Предлагаемый неявный метод наложения позволяет сформировать более экономичные выражения для токов и напряжений.

Ниже рассмотрен пример анализа трехфазной несимметричной цепи с двумя нагрузками, одна из которых является звездой сопротивлений, а вторая – треугольником сопротивлений [12]. Схема цепи изображена на рис. 3 а. Параметры всех элементов схемы различны. Исследуем один из аварийных режимов, когда сопротивление Z_3 замкнуто накоротко. Полученная схема представлена на рис. 3 б. Требуется найти символьное выражение тока I .

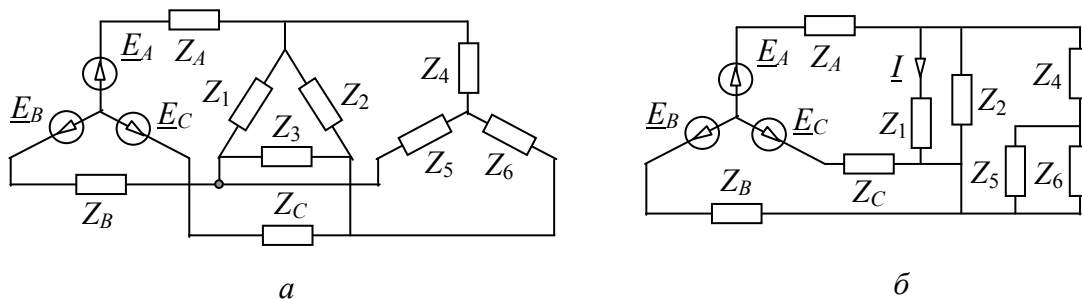


Рис. 3

Для сравнения методов явного и неявного наложения построим выражение I двумя способами, используя формулы (9) и (10). В силу явного метода наложения

$$\underline{I} = Y_{IA}^{BC \rightarrow 0} \underline{E}_A + Y_{IB}^{AC \rightarrow 0} \underline{E}_B + Y_{IC}^{AB \rightarrow 0} \underline{E}_C$$

или

$$\underline{I} = \frac{N_{YIA}^{BC \rightarrow 0} \underline{E}_A + N_{YIB}^{AC \rightarrow 0} \underline{E}_B + N_{YIC}^{AB \rightarrow 0} \underline{E}_C}{D}, \quad (16)$$

где $Y_{IA}^{BC \rightarrow 0}$, $Y_{IB}^{AC \rightarrow 0}$, $Y_{IC}^{AB \rightarrow 0}$ – передаточные проводимости от источников напряжения A , B и C соответственно к приемнику тока \underline{I} при нейтрализованных остальных источниках (указаны в верхних индексах функций); $N_{YIA}^{BC \rightarrow 0}$, $N_{YIB}^{AC \rightarrow 0}$, $N_{YIC}^{AB \rightarrow 0}$ – числители функций $Y_{IA}^{BC \rightarrow 0}$, $Y_{IB}^{AC \rightarrow 0}$, $Y_{IC}^{AB \rightarrow 0}$ соответственно. Для получения искомого тока по неявному методу наложения будем использовать непосредственно выражение (10). При формировании алгебраических выражений воспользуемся методом схемных определителей [9, 10].

Сначала найдем знаменатель выражения (16), который, как отмечалось, не зависит от явного или неявного метода формирования символьных выражений и представляет собой определитель схемы

$$D = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} Z_A \text{---} \\ | \\ Z_1 \\ | \\ \text{---} Z_B \text{---} \\ | \\ Z_C \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ | \\ Z_2 \\ | \\ b \\ | \\ Z_5 \\ | \\ Z_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ Z_6 \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \end{array} \end{array} \right|. \quad (17)$$

Схема знаменателя (17) получена из рис. 3 б путем нейтрализации всех источников напряжения и приемника тока. Эта схема делится на две подсхемы по узлам a и b . Применяя соответствующую формулу бисекции [9], получаем

$$D = \left| \begin{array}{c} \text{---} Z_A \text{---} \\ | \\ Z_1 \\ | \\ \text{---} Z_B \text{---} \\ | \\ Z_C \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} a \\ | \\ Z_2 \\ | \\ b \\ | \\ Z_5 \\ | \\ Z_6 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} Z_A \text{---} \\ | \\ Z_1 \\ | \\ \text{---} Z_B \text{---} \\ | \\ Z_C \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ Z_6 \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \end{array} \right|. \quad (18)$$

Заменив в первом схемном определителе (18), который обозначим D_1 , последовательное соединение сопротивлений Z_A и Z_1 одним сопротивлением Z_A+Z_1 , получим схему из трех параллельных сопротивлений. Найдем определитель этой схемы по формуле выделения сопротивления. Следуя правилу кратности [5], выделим в первую очередь сопротивление Z_A+Z_1 . При его удалении получается элементарная схема – контур из двух сопротивлений Z_B и Z_C , а при стягивании – одноузловая схема с двумя петлями Z_B и Z_C . Вторая схема делится на две подсхемы по одному узлу, и к ней применяется соответствующая формула бисекции. Отсюда получаем $D_1=(Z_A+Z_1)(Z_B+Z_C)+Z_BZ_C$.

При разложении второго схемного определителя D_2 также используется формула бисекции по одному узлу (узлу a). Первая подсхема, полученная в

результате бисекции, представляет собой контур из сопротивления Z_2 . Вторая подсхема – параллельное соединение сопротивлений Z_4 , Z_5 и Z_6 , определитель которого раскрывается подобно определителю D_1 . Таким образом, $D_2 = Z_2[Z_4(Z_5+Z_6)+Z_5Z_6]$. Третий D_3 (четвертый D_4) определитель выражения (18) находится аналогично второму D_2 (первому D_1) схемному определителю. После выполнения этих операций искомый определитель схемы

$$D = [(Z_A+Z_1)(Z_B+Z_C)+Z_BZ_C] Z_2[Z_4(Z_5+Z_6)+Z_5Z_6] + Z_1[Z_A(Z_B+Z_C)+Z_BZ_C] [(Z_2+Z_4)(Z_5+Z_6)+Z_5Z_6]. \quad (19)$$

Теперь найдем числитель символического выражения тока \underline{I} по формуле явного метода наложения (16). Это выражение, как известно, формируется по частям. Первая часть – это числитель передаточной проводимости от источника A к приемнику \underline{I}

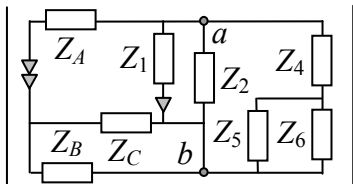
$$N_{YIA}^{BC \rightarrow 0} = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } N_{YIA}^{BC \rightarrow 0} \end{array} \\ \end{array} \right|. \quad (20)$$


Схема под знаком определителя получена из схемы на рис. 3 б путем нейтрализации источников B и C , замены источника A и приемника тока \underline{I} генератором и приемником НУИ соответственно [10]. В этой схеме стянем сопротивления Z_A и Z_1 , соединенные последовательно с ГНУИ и ПНУИ соответственно, выделим сопротивление Z_2 , параллельное ПНУИ. К преобразованной таким образом схеме применим формулу бисекции по двум узлам a и b . Одно из двух слагаемых этой формулы будет равно нулю, поскольку при замыкании узлов a и b левой подсхемы образуется контур из ПНУИ [9]. Следовательно,

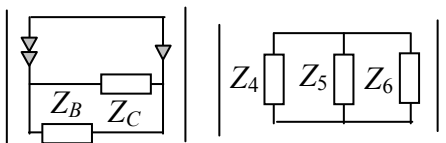
$$N_{YIA}^{BC \rightarrow 0} = Z_2 \left| \begin{array}{c} \text{Circuit diagram 1} \\ \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{Circuit diagram 2} \\ \end{array} \right|. \quad (21)$$


Схема в первом определителе выражения (21) содержит последовательное встречное соединение ГНУИ и ПНУИ, которое эквивалентно разомкнутой ветви. Таким образом, первый схемный определитель эквивалентен определителю контура из сопротивлений Z_B и Z_C . Второй схемный определитель этого выражения был найден ранее (см. выражение (19)). Таким образом, алгебраическое выражение первой части числителя (16) принимает вид

$$N_{YIA}^{BC \rightarrow 0} = Z_2(Z_B + Z_C)[Z_4(Z_5 + Z_6) + Z_5Z_6]. \quad (22)$$

Исходное схемно-алгебраическое выражение для второй части числителя (16) записывается аналогично выражению для его первой части (20)

$$N_{YIB}^{AC \rightarrow 0} = \left| \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---} Z_A \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_2 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} a \\ | \\ \text{---} Z_2 \text{---} \\ | \\ b \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} Z_B \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_C \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} Z_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_2 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \end{array} \right|. \quad (23)$$

В схеме под знаком определителя стянем сопротивления, соединенные последовательно с ПНУИ и ГНУИ соответственно. Выделим сопротивления Z_2 и Z_C , которые параллельны ПНУИ и ГНУИ. Стянем сопротивление Z_A , последовательное ГНУИ. Заменяем идеальным проводником (с изменением знака определителя) параллельное встречное включение ГНУИ и ПНУИ. В результате получается определитель параллельного соединения трех сопротивлений Z_4 , Z_5 и Z_6 , вычисленный ранее в (19). Отсюда следует

$$N_{YIB}^{AC \rightarrow 0} = -Z_2 Z_C [Z_4 (Z_5 + Z_6) + Z_5 Z_6]. \quad (24)$$

Схемно-алгебраическое выражение для третьей части числителя (16) записывается и раскрывается аналогично выражениям для его первой и второй частей

$$N_{YIB}^{AC \rightarrow 0} = \left| \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---} Z_A \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_2 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} a \\ | \\ \text{---} Z_2 \text{---} \\ | \\ b \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} Z_B \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_C \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} Z_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_2 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \end{array} \right| = -Z_2 Z_B [Z_4 (Z_5 + Z_6) + Z_5 Z_6]. \quad (25)$$

Учитывая выражения (22), (24) и (25) в формуле (16), получаем

$$\underline{I} = \frac{Z_2 (Z_B + Z_C) [Z_4 (Z_5 + Z_6) + Z_5 Z_6] \underline{E}_A - Z_2 Z_C [Z_4 (Z_5 + Z_6) + Z_5 Z_6] \underline{E}_B - Z_2 Z_B [Z_4 (Z_5 + Z_6) + Z_5 Z_6] \underline{E}_C}{D}. \quad (26)$$

Выражение (26), сформированное явным методом наложения, содержит в числителе повторяющиеся одинаковые множители Z_2 и $Z_4 (Z_5 + Z_6) + Z_5 Z_6$. Для исключения этой избыточности – поиска и вынесения этих множителей за скобки – требуются специальные трудоемкие алгоритмы. Этого можно избежать, если использовать предлагаемый неявный метод наложения.

Для формирования числителя по неявному методу наложения воспользуемся формулой (10), согласно которой определитель схемы числителя

$$N_{YIU=1} = \left| \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---} Z_A \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_2 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} a \\ | \\ \text{---} Z_2 \text{---} \\ | \\ b \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} Z_B \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_C \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} Z_1 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_2 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} Z_4 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_5 \text{---} \\ | \\ \text{---} Z_6 \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \end{array} \right|. \quad (27)$$

В схеме определителя (27) стянем сопротивление Z_1 , последовательное ПНУИ, выделим сопротивление Z_2 , параллельное ПНУИ, применим к оставшейся схеме частный вариант (в сечении находится ПНУИ) формулы бисекции по двум узлам a и b , уже использованный в выражении (21). Отсюда получаем

$$N_{yIU=1} = Z_2 \left[\begin{array}{c} \text{Circuit diagram with sources } (E_A-1)U, E_C U, E_B U \text{ and impedances } Z_A, Z_B, Z_C \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \text{Circuit diagram with impedances } Z_4, Z_5, Z_6 \end{array} \right]. \quad (28)$$

Первый схемный определитель в выражении (28) обозначим N_1 , второй – N_2 . Стянем в схеме N_1 сопротивление Z_A , соединенное последовательно с ПНУИ. Выделим сопротивление Z_B . Учтем, что при удалении этого сопротивления происходит нейтрализация источника $E_B U$. В результате имеем

$$N_1 = Z_B \left[\begin{array}{c} \text{Circuit diagram 1: source } (E_A-1)U, impedances } Z_C, Z_B \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Circuit diagram 2: source } (E_A-1)U, impedances } Z_C, Z_B, E_B U \end{array} \right]. \quad (29)$$

В первом схемном определителе (29) стянем сопротивление Z_C , объединим два УИ в один $(E_A - E_C - 1)U$ и выделим его по формуле (11). Во втором определителе (45) выделим сопротивление Z_C . Соответствующая формула будет содержать только одно слагаемое, поскольку стягивание Z_C приводит к вырождению схемы вследствие появления контура из источников напряжения $E_C U$ и $E_B U$. Оставшиеся в схеме после выделения-удаления Z_C , два источника объединяются в один источник $(E_A - E_B - 1)U$ (подобно первому определителю), который выделяется также по формуле (11). Подставляя в (28) сформированное выражение N_1 и формулу для второго определителя N_2 , найденную ранее (см. (19)), получаем числитель $N_{yIU=1}$, который используем согласно (10) для записи искомого выражения тока

$$\underline{I} = \frac{Z_2 [Z_B (E_A - E_C) + Z_C (E_A - E_B)] [Z_4 (Z_5 + Z_6) + Z_5 Z_6]}{D}. \quad (30)$$

Сравним количество вычислительных операций в числителях формул (26) и (30), полученных по явному и неявному методам наложения соответственно. В выражении (30) число умножений равно 6, сложений (вычитаний) – 5. В выражении (26) содержится 14 и 9 операций соответственно. Таким образом, символьное выражение, сформированное неявным методом наложения, значительно экономичнее, чем формула, полученная традиционным явным

методом наложения. Неявный метод наложения эффективнее также по количеству формирующих схемно-алгебраических операций, поскольку исключает построение повторяющихся сомножителей, которое имеет место в явном методе наложения.

Приложение 2. Использование неявного метода наложения для анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

В случае анализа линейной электрической цепи операторным методом исходная схема цепи замещается операторной схемой, в которой каждый реактивный элемент представляется схемой, содержащей операторный источник напряжения или тока [3]. Таким образом, в операторной схеме замещения появляется большое количество независимых источников. В связи с этим для формирования операторных изображений токов и напряжений целесообразно использовать неявный метод наложения, который позволяет получить более компактные операторные выражения, чем традиционный явный метод наложения. Для получения временных зависимостей токов и напряжений по известным операторным выражениям в настоящее время используются компьютерные математические системы, например Maple [13].

Рассмотрим пример формирования операторного изображения напряжения на нагрузке параллельного колебательного контура, который подключается к источнику тока [3]. Исходная схема цепи представлена на рис. 4 а. Начальные условия для тока катушки индуктивности L и напряжения на конденсаторе C известны: $i_L(0) = i_0$ и $u_C(0) = u_0$. Операторная схема замещения цепи изображена на рис. 4 б, где $J(p)$ – операторное изображение источника j ; Li_0 – значение операторной ЭДС $E_L(p)$ катушки индуктивности L ; Cu_0 – значение операторного источника тока $J_C(p)$ для конденсатора C ; последовательное соединение двух сопротивлений R_3 и Lp преобразовано к одному сопротивлению $R_3 + Lp$.

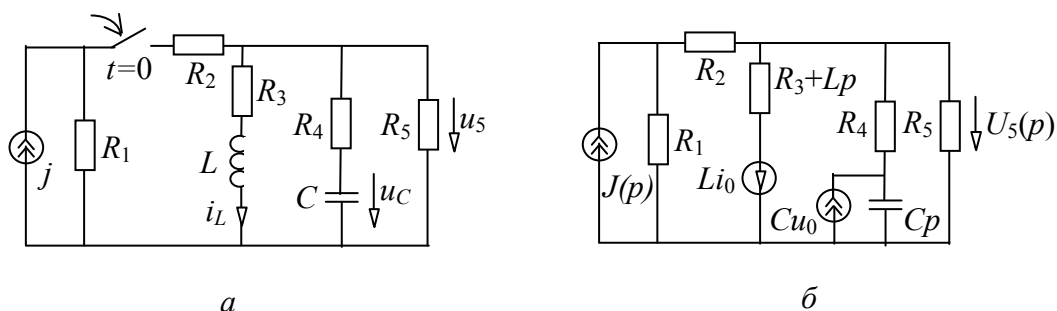


Рис. 4

Искомое напряжение на нагрузке $U_5(p)$ для сравнения найдем явным и неявным методами наложения. По явному методу с помощью формулы (2) запишем

$$U_5(p) = Z_{UJ}^{ELJC \rightarrow 0} J(p) + K_{UEL}^{JJC \rightarrow 0} Li_0 + Z_{UJC}^{JEL \rightarrow 0} Cu_0$$

или

$$U_5(p) = \frac{N_{ZUJ}^{ELJC \rightarrow 0} J(p) + N_{KUEL}^{JJC \rightarrow 0} Li_0 + N_{ZUJC}^{JEL \rightarrow 0} Cu_0}{D}. \quad (31)$$

где $Z_{UJ}^{ELJC \rightarrow 0}, Z_{UJC}^{JEL \rightarrow 0}$ – передаточные сопротивления от источников тока $J(p)$ и $J_C(p)$ соответственно (при нейтрализации остальных источников, которые указаны в верхнем индексе) к приемнику напряжения $U_5(p)$; $K_{UEL}^{JJC \rightarrow 0}$ – коэффициент передачи напряжения от источника $E_L(p)$ к приемнику напряжения $U_5(p)$ при нейтрализованных источниках $J(p)$ и $J_C(p)$; $N_{ZUJ}^{ELJC \rightarrow 0}, N_{KUEL}^{JJC \rightarrow 0}, N_{ZUJC}^{JEL \rightarrow 0}$ – числители схемных функций $Z_{UJ}^{ELJC \rightarrow 0}, K_{UEL}^{JJC \rightarrow 0}, Z_{UJC}^{JEL \rightarrow 0}$ соответственно.

Сначала сформируем знаменатель D функции (31), который, как уже отмечалось, не зависит от используемого явного или неявного метода наложения. Запишем согласно [10] схемно-алгебраическое выражение

$$D = \left| \begin{array}{ccc} R_2 & & \\ R_1 & R_3+Lp & a \\ & R_4 & R_5 \\ & Cp & b \end{array} \right|. \quad (32)$$

Схемно-алгебраическое выражение (32) получено из схемы на рис. 4 б путем нейтрализации источников тока $J(p)$, $J_C(p)$ и напряжения $E_L(p)$. Для раскрытия определителя (32) будем использовать схемно-алгебраические операции [9, 10], уже использованные ранее при анализе трехфазной цепи.

Предварительно последовательное соединение сопротивлений R_1 и R_2 преобразуем к одному сопротивлению R_1+R_2 . Применяя формулу для определителя схемы, разделимой по двум узлам a и b , получаем

$$D = \left| \begin{array}{c} R_3+Lp \\ R_1+R_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} a \\ R_4 \quad R_5 \\ Cp \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} R_3+Lp \quad a \\ R_1+R_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} R_4 \quad R_5 \\ Cp \end{array} \right|. \quad (33)$$

Первый схемный определитель – это определитель контура из сопротивлений. Второй схемный определитель раскрывается по формуле определителя схемы, разделимой по одному узлу a , и содержит два сомножителя. Первый сомножитель – определитель контура из сопротивления R_4 и проводимости Cp , второй сомножитель – определитель контура из сопротивления R_5 . Третий определитель в (33) находится так же, как и второй, по формуле одноузловой бисекции. Оба сомножителя в этой формуле – определители контуров из сопротивлений R_1+R_2 и R_3+Lp . Четвертый схемный определитель в (33) – определитель контура из сопротивления R_4+R_5 и проводимости Cp . Отсюда получаем

$$D = R_5(R_1 + R_2 + R_3 + Lp)(R_4 Cp + 1) + (R_1 + R_2)(R_3 + Lp)[(R_4 + R_5)Cp + 1]. \quad (34)$$

Числитель выражения (31) находится по частям. Первая часть

$$N_{ZUJ}^{ELJC \rightarrow 0} = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} R_2 \text{---} \\ | \\ R_1 \\ | \\ \text{---} R_3 + Lp \text{---} \\ | \\ R_4 \\ | \\ R_5 \\ | \\ Cp \\ | \\ \text{---} \end{array} \\ \end{array} \right|. \quad (35)$$

Схемно-алгебраическая формула (35) получена согласно [10] из схемы на рис. 4 б путем замены источника тока $J(p)$ и приемника напряжения $U_5(p)$ ГНУИ и ПНУИ соответственно, а также нейтрализации источников Li_0 и Cu_0 . Выделим в (35) сопротивления R_1 и R_5 , параллельные ГНУИ и ПНУИ соответственно. Стянем сопротивление R_2 , соединенное последовательно с ГНУИ. Выделим сопротивление $R_3 + Lp$, параллельное ГНУИ. Заменяем идеальным проводником параллельное согласное соединение ГНУИ и ПНУИ. Запишем определитель элементарного контура из сопротивления R_4 и проводимости Cp . Отсюда получается выражение первой части числителя (31)

$$N_{ZUJ}^{ELJC \rightarrow 0} = R_1 R_5 (R_3 + Lp) (R_4 Cp + 1). \quad (36)$$

Аналогично находятся вторая и третья части выражения (31), которые приведены ниже без комментариев

$$N_{KUEL}^{JJC \rightarrow 0} = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} R_2 \text{---} \\ | \\ R_1 \\ | \\ \text{---} R_3 + Lp \text{---} \\ | \\ \uparrow \\ | \\ R_4 \\ | \\ R_5 \\ | \\ \downarrow \\ Cp \\ | \\ \text{---} \end{array} \\ \end{array} \right| = -R_5 (R_1 + R_2) (R_4 Cp + 1), \quad (37)$$

$$N_{ZUJC}^{JEL \rightarrow 0} = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} R_2 \text{---} \\ | \\ R_1 \\ | \\ \text{---} R_3 + Lp \text{---} \\ | \\ R_4 \\ | \\ R_5 \\ | \\ \downarrow \\ Cp \\ | \\ \text{---} \end{array} \\ \end{array} \right| = R_5 (R_3 + Lp) (R_1 + R_2). \quad (38)$$

Подставляя выражения (32), (36)–(38) в формулу (31), получаем искомое выражение напряжения по явному методу наложения

$$U_5(p) = \frac{R_1 (R_3 + Lp) R_5 (R_4 Cp + 1) J(p) - R_5 (R_1 + R_2) (R_4 Cp + 1) Li_0 + R_5 (R_3 + Lp) (R_1 + R_2) Cu_0}{D}. \quad (39)$$

Теперь сформируем выражение для искомого напряжения, воспользовавшись неявным методом наложения, например по формуле (13), которая в данном случае имеет вид

$$U_5(p) = \frac{N_{ZUJ=1}}{D}, \quad (40)$$

$$U_5(p) = \frac{R_5 \{ (R_3 + Lp) [JR_1(R_4Cp + 1) + Cu_0(R_1 + R_2)] - Li_0(R_1 + R_2)(R_4Cp + 1) \}}{D}, \quad (44)$$

Сравним выражение (39) полученное явным методом наложения и выражение (44), сформированное с помощью предлагаемого неявного метода. Числитель формулы (39) содержит 18 операций умножения и 8 операций сложения. Числитель выражения (44) включает 14 и 7 операций соответственно. Длина выражения (39) составляет 65 символов. При этом учитываются знаки операций, каждая из скобок, идентификатор переменной представляется одним символом. Формула (44) содержит 56 соответствующих символов. Таким образом, выражение по неявному методу наложения является более компактным и экономичным по количеству вычислительных операций.

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1988.- 552 с.
2. Максвелл Д.К. Трактат об электричестве и магнетизме. В 2-х т. Т. 1.- М.: Наука, 1989.- 416 с.
3. Теоретические основы электротехники: В 2 т. Т. 1: Основы теории линейных цепей / П.А.Ионкин, А.И.Даревский, Е.С.Кухаркин, В.Г.Миронов, Н.А.Мельников.- М.: Высшая школа, 1976.- 544 с.
4. Кирхгоф Г.Р. Избранные труды.- М.: Наука, 1988.- 428 с.
5. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // Электричество.- 1995.- № 4.- С. 36-43.
6. Курганов С.А., Филаретов В.В. Неявный принцип наложения воздействий в линейных электрических цепях // Электричество.- 2003. (находится в редакции).
7. Richard Shi C.-J., Xiang-Dong Tan. Canonical symbolic analysis of large analog circuits with determinant decision diagrams // IEEE Trans. on computer-aided design of integrated circuits and systems.- 2000.- Vol. 19.- No. 1.- P. 1-13.
8. Филаретов В.В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. междунард. конф.- Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.- С. 13-15.
9. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.- 1998.- № 5.- С. 43-52.
10. Филаретов В.В. Формирование символьных функций для активных электрических цепей методом стягивания и удаления ветвей // Электричество.- 2001.- № 4.- С. 43-51.
11. Иваницкий А.М. Принцип взаимосоответствия // Радиотехника.- 1976.- Т. 31, № 7.- С. 45-52.
12. Основы теории цепей / Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов.- М.: Энергоатомиздат, 1989.- 528 с.
13. Дьяконов В.П. Математическая система MapleV.- М.: Солон, 1998.- 399 с.