

# СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

## САД-2020

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| G11        | G12        | <b>G13</b> | <b>G14</b> |
| <b>G21</b> | <b>G22</b> | G23        | G24        |
| G31        | G32        | <b>G33</b> | <b>G34</b> |
| <b>G41</b> | <b>G42</b> | G43        | G44        |

$$- (\mathbf{G21 * G42 - G22 * G41}) * (\mathbf{G13 * G34 - G14 * G33})$$

Ульяновск 2020

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE  
OF THE RUSSIAN FEDERATION

ULYANOVSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY

**SYNTHESIS, ANALYSIS  
AND DIAGNOSIS  
OF ELECTRONIC NETWORKS**

**SAD-2020**

Ulyanovsk 2020

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

# СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

Международный сборник научных трудов

Вып. 16

Подготовлен из докладов  
Третьей международной заочной конференции  
«Синтез, анализ и диагностика электронных цепей»  
(Ульяновск, 18–22 мая 2020 года)

Ульяновск  
УлГТУ  
2020

УДК 516.7.24/25+519.873  
ББК 32.85  
С38

УДК 516.7.24/25+519.873

**Синтез, анализ и диагностика электронных цепей** : Международный сборник научных трудов.– Вып. 16 / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск : УлГТУ, 2020. – 224 с.

Сборник продолжает серию специализированных сборников, изданных в Ульяновском государственном техническом университете (УлГТУ) в рамках международных конференций: «Континуальные логико-алгебраические исчисления и нейроматематика», «Конференция по логике, информатике, науковедению», «Волгинские чтения», «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей».

Данный выпуск составлен из докладов Третьей международной заочной конференции «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей», проходившей в УлГТУ 18–22 мая 2020 года.

В докладах рассматриваются теоретические вопросы и практические приложения современной теории электрических и электронных цепей, в том числе: структурный синтез и преобразования, схемно-алгебраический анализ и диагностика. Обсуждается моделирование электронных цепей и электроэнергетических систем с позиций схемной алгебры, матричного анализа, теории графов и символьных вычислений.

Рекомендуется для специалистов в области аналоговой и цифровой схемотехники, прикладной математики и информатики, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

Редакционная коллегия:

Горшков К.С., канд. техн. наук (ответственный секретарь);  
Grishkevich A., д-р техн. наук, Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy (Polska);  
Курганов С. А., д-р техн. наук (зам. ответственного редактора);  
Мауко G., канд. техн. наук, Broadcom Corporation (USA);  
Соловьева Е. Б., д-р техн. наук, СПбГЭУ – ЛЭТИ им. В.И.Ленина;  
Филаретов В. В., д-р техн. наук (ответственный редактор);

ISBN 978-5-9795-1381-2

© Коллектив авторов, 2020  
© Оформление. УлГТУ, 2020

**Третья международная заочная научно-техническая конференция  
«Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» (САД-2020)  
Ульяновск: УЛГТУ, 18–22 мая 2020 года.**

***Организационный комитет:***

Председатель оргкомитета – д.т.н. **Филаретов В.В.**

Зам председателя –

профессор кафедры «Электроснабжение», д.т.н. **Курганов С.А.**

Ответственный секретарь –

ст. преподаватель кафедры «Электроснабжение» **Ребровская Д.А.**

Члены оргкомитета:

**Дубов А.Л.** – декан энергетического факультета;

**Кузнецов А.В.** – зав кафедрой «Электроснабжение»;

**Почкайло Н.А.** – начальник отдела НТИ УНИ.

Первая конференция (САД–2015) была посвящена памяти **Леонида Ивановича Волгина – основателя сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей (САД)»**. Предыдущие конференции с другими названиями также служили для апробации и публикации материалов в большинстве выпусков нашего сборника. С самого начала издания сборника САД (в 2003г.) мы отказались от «бумагооборота» между авторами и редколлегией, принимая электронные версии статей. Настоящая конференция проходит уже в традиционном заочном формате.

Процесс подготовки выпусков теперь отличает активное взаимодействие с авторами по электронной почте. Оно служит доработке и развитию статей, заказу материалов, повышению научного уровня разделов сборника. Такое взаимодействие не знает границ и не сопряжено со значительными материальными затратами для авторов.

Очные встречи на конференциях, конечно, более привычны, но отнимают несопоставимо больше времени, сил, и денег, чем многие участники не располагают. Заочная конференция предполагает интенсификацию взаимного обсуждения докладов участниками конференции и читателями по электронной почте в течение отведенного времени и за его пределами. Это определяет актуальные темы для будущих выпусков, ориентирует авторов статей и читателей на незамедлительную подготовку новых материалов. Виртуальные встречи коллег менее эмоциональны и потому более результативны.

# АНАЛИЗ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

## ПАТОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МНОГОВЫХОДНЫХ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Г. В. Майко, В. В. Филаретов

*Сформулированы требования к моделям многовыходных активных элементов на базе патологических элементов, проведён обзор и анализ существующих решений, показаны их недостатки. Исследована модель многовыходного активного элемента по току с репликацией напряжений на основе патологических элементов. По аналогии, но для репликации тока, предложен подход к построению моделей многовыходных элементов по напряжению и приведен вариант такой модели.*

*Requirements for models of multi-output active elements based on pathological elements are formulated, existing solutions are reviewed and analyzed, and their disadvantages are shown. A model of a multi-output active current element with voltage replication based on pathological elements is studied. By analogy, but for current replication, an approach to building models of multi-output elements by voltage is proposed and a variant of such a model is presented.*

Патологические двухполюсные элементы – нуллаторы, нораторы, зеркальные элементы напряжения (ЗЭН) и зеркальные элементы тока (ЗЭТ)<sup>1</sup>[1, 2] – находят широкое применение в анализе и синтезе различных электронных схем [3, 4, 5, 6]. Такие элементы хорошо описывают идеальные модели активных элементов – полевых и биполярных

---

<sup>1</sup> Хотя ЗЭН и ЗЭТ являются трёхполюсными элементами, но обычно третий вывод подключается к земле и его на схеме не показывают. В настоящее время появляются методы анализа и синтеза, явно учитывающие этот плавающий узел [14, 20], в статье далее это будет так же рассмотрено.

транзисторов, операционных и других усилителей, конверторов тока и напряжения, повторителей и т.д. [3, 7, 8]. Такие модели особенно полезны на этапе структурного синтеза схем, когда целесообразно использовать именно идеальные модели активных элементов [3], а учёт их реальных характеристик можно делать на этапе параметрического синтеза и анализа, используя более подробные модели активных элементов для стандартных систем моделирования, например, семейства SPICE, предоставляемые производителями [9, 10, 11, 12 и др.]. Модели аналоговых схем на основе паталогических элементов не зависят от их практической реализации<sup>2</sup> [2, 13]. Это позволяет построить универсальные системы автоматизированного проектирования аналоговых цепей.

В последнее время появляются более сложные, много-входные и многовыходные активные элементы с числом выводов больше 2. Кроме широко известных токовых зеркал с несколькими выходами, в литературе представлены активные схемы с несколькими входами и выходами, расширяющими отмеченные выше традиционные активные схемы [14, 15, 16, 17, 18, 19]. В связи с этим возникает интерес к разработке моделей таких схем на основе паталогических элементов. Это позволяет значительно упростить анализ и синтез аналоговых цепей на их основе.<sup>3</sup>

**Требования к моделям многовыходных активных элементов.** При рассмотрении моделей объединим нуллятор и ЗЭН в группу паталогических элементов по напряжению, а норатор и ЗЭТ – в другую группу по току.

Сформулируем требования к моделям многовыходных элементов на основе паталогических элементов:

**1. Многовыходной элемент по U описывается формулой:**

$$U_1 = \pm K_2 \cdot U_2 = \dots = \pm K_n \cdot U_n. \quad (1)$$

---

<sup>2</sup> “The main reasons for the popularity of nullor elements are their ability to model active circuits independently of the particular realization of the active devices” [2]

<sup>3</sup> “It is necessary to be able to obtain ideal representations for such active building-blocks using pathological elements, so that to benefit from the advantages of using the pathological elements in the synthesis, modeling, and analysis of active circuits incorporating these devices” [20].

Напряжения отсчитываются от общего узла (земли). Обычно коэффициенты  $K_i$  ( $i = 2...n$ ) равны 1, однако желательно чтобы модель могла обеспечивать произвольные коэффициенты  $K_i$ . Многовыходной элемент по I описывается формулой:

$$I_1 = \pm K_2 \cdot I_2 = \dots = \pm K_n \cdot I_n. \quad (2)$$

Знак показывает направление тока: условимся, что плюс означает направление тока внутрь элемента, минус - направление тока из элемента.

**2.** Патологические модели многовыходных элементов одной группы должны объединяться с патологическими моделями другой группы так, чтобы обеспечивать физическую реализацию полученной схемы. Как отмечается в [21], для физической реализации модели количество нуллаторов и ЗЭН должно быть равным количеству нораторов и ЗЭТ<sup>4</sup>. Но этого мало – подключение этих патологических элементов должно обеспечивать квадратную матрицу проводимости [13,22]. В частности, не должно быть параллельного соединения однотипных элементов, как на рис.1.В или 2.В в [22]. Такие схемы будут физически нереализуемыми [23]. Отсюда можно сделать следующее следствие: модель многовыходного патологического элемента по напряжению (току) должна содержать на 1 больше патологических элементов по напряжению (току), чем по току (напряжению). Это позволяет объединять модели многовыходных элементов с различным числом входов и выходов и тем не менее получать физически реализуемые схемы. Например, один нуллатор и многовыходной элемент по току образуют модель широко известных токовых зеркал с несколькими выходами.

**3.** Модели должны легко масштабироваться на любое число выводов. Это полезно для практического использования.

**4.** Модели должны быть симметричными – их выводы можно подключать к схеме в любом порядке и свойства всей схемы не должны меняться.

---

<sup>4</sup> “It is important to point out that for a physical realization of the circuit the total number of nullators plus the number of VM must equal to the number of norators plus the number of CM” [21].

**Обзор существующих решений.** Проблеме получения моделей многовыходных элементов по току и напряжению уделяется достаточно большое внимание, ниже представлен обзор представленных и описанных в литературе вариантов. Известна хорошая модель многовыходного (многоотерминального) элемента по току [24, 25] (рис.1).

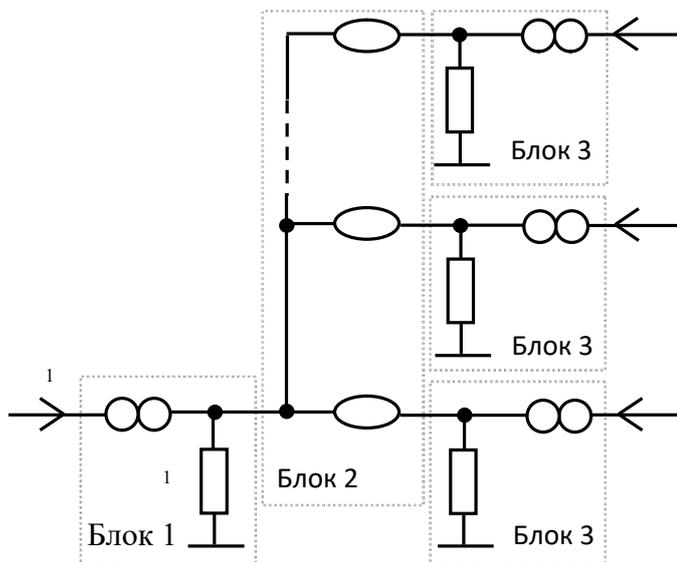


Рис.1.

Эта схема удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям к многовыходным элементам. Модель легко масштабируется на любое число выводов, причем количество элементов по току всегда на единицу больше элементов по напряжению. Один из выводов в схеме можно считать опорным, имея в виду то, что токи всех других выводов будет выражаться через него в выражении (2). Выбор опорного узла произволен, и представленная модель легко это обеспечивает, так как она является симметричной из-за того, что представленное на рисунке дерево-звезду нуллаторов (и, возможно, ЗЭН), подключённых к первому опорному выводу, легко можно заменить другим эквивалентным деревом-звездой из нуллаторов и/или ЗЭН [26, 27, 28, 29], в котором все патологические элементы будут подключены к любому другому выводу. Такое изменение схемы, по сути, изменяет «опорный» вывод, ток которого будет определять токи других выводов.

В схеме на рис.1 можно выделить три типа блоков. Произвольно выбирая «опорный» вывод (и, при необходимости, изменяя дерево нуллаторов и ЗЭН так, чтобы образовалось дерево-звезда с общим узлом в опорном выводе), можно выделить преобразователь опорного тока в напряжение (блок 1), репликаторы напряжения на основе нуллаторов и/или ЗЭН (блок 2) и преобразователи напряжения в ток (блоки 3). Преобразователи тока в напряжения и напряжения в ток представлены на рис.2.a и 2.b соответственно.

Используя различные комбинации патологических элементов в преобразователях [30], можно получить любые соотношения между направлениями токов. Например, в работах [3, 24] представлены модели многовыходного элемента по току, в котором используется ЗЭТ для изменения направления тока одного из выходов (см. рис.9, [24], рис.6а, 6с, 6h-6m [3]) и приведены примеры использования таких моделей (см. рис.10 [24]). Выбирая различные сопротивления резисторов, можно получить любые значения модулей коэффициента передач  $K_i$ .

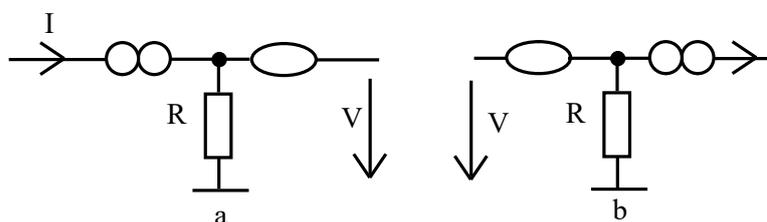


Рис.2

Другой вариант моделей основывается на более сложных патологических элементах по току – плавающих ЗЭТ, заземлённых ЗЭТ с двумя и тремя выходами (grounded two-output and floating two-output current mirrors) [13, 20, 22, 31, 32]. Например, в [13] приведены частные (с различными знаками коэффициентов передачи) модели многовыходных элементов по току (рис. 2.с – 2.е), однако не приводятся общие (с любым количеством выводов и с любыми вариантами знаков коэффициентов передачи) модели по току.

В моделях по напряжению (току) используются только патологические элементы по напряжению (току), поэтому возникают

сложности с объединениями этих моделей с противоположными для обеспечения физической реализуемости. Для решения этой проблемы в схему вводятся так называемых «dummy» элементы [20, 22, 33]. Но при этом не приводятся правила определения мест подключения «dummy» элементов. Как уже отмечалось, несколько приведённых схем физически нереализуемые потому что нуллаторы включены параллельно, а в некоторых случаях они просто не нужны, так как в схемах есть одинаковое количество патологических элементов (рис. 3.b и 4.b в [33]).

В работе [34] авторы приводят модели многовыходных элементов по току и напряжению на основе управляемых источников – ИТУТ для элементов по току и ИНУН для элементов по напряжению. В работе используются неидеальные управляемые источники, поэтому, применяя известные методы их преобразования, можно получить любые типы управляемых источников. Поэтому модели оказываются эквивалентными и правила их включения в матрицу проводимости так же оказываются идентичными (и они построены на основе ИТУН, хотя авторы это и не приводят). Такие модели больше подходят для описания усилителей напряжения или тока с одним входом и несколькими выходами.

Приводятся также модели многовыходных элементов по току и напряжению на основе патологических элементов. Авторы утверждают, что эти модели сопряженные (adjoint), хотя на рисунках 2 и 4 они идентичные. Эти модели не удовлетворяют условию 2, в них одинаковое число патологических элементов. Оба типа моделей – на основе управляемых источников и на основе патологических элементов, - являются несимметричными. Авторы верно замечают, что нет хорошей модели многовыходного элемента по напряжению.

**Построение модели многотерминального элемента по напряжению.** Для получения моделей многотерминальных элементов по напряжению можно применить такой же подход, как и в моделях по току: использовать преобразователь напряжения в ток ( $U \rightarrow I$ ), репликаторы тока ( $I \rightarrow I, I, \dots, I$ ) и преобразователи тока в напряжения ( $I \rightarrow U$ ). Преобразователи  $U \rightarrow I$  и  $I \rightarrow U$  приведены выше на рис.2.a и 2.b.

Для получения репликаторов тока можно использовать следующий подход. Во-первых, реализовать первичный контур с током,

пропорциональным входному напряжению. В контуре можно использовать последовательно включенные пары резисторов и нораторов, что обеспечивает равенство токов через все резисторы. Нораторы используются для изолирования репликаторов тока друг от друга. Напряжения на плавающих резисторах можно передать на другие вторичные контуры с помощью двух нуллаторов и приемного плавающего резистора (рис.3). Одинаковое сопротивление резисторов  $R_1$  и  $R_2$  обеспечивает репликацию тока из первичного во вторичный контур. Похожая схема с двумя контурами приведена на рис.2.b в [31].

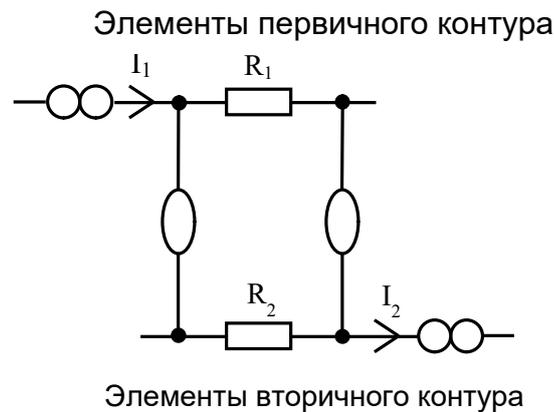


Рис.3

Напряжение на оконечном заземлённом резисторе в первичном контуре можно сразу передать на один выход с помощью одного нуллатора. Это известный преобразователь тока в напряжения ( $I \rightarrow U$ ), приведенный на рис.2.a выше. Вторичные контуры образуются так же, как и первичный, в виде последовательностей резисторов и нораторов.

Преобразователь тока в напряжение ( $I \rightarrow U$ ) во вторичном контуре можно реализовать следующим образом (рис.4), резистор  $R_1$  является приёмным резистором вторичного контура, а  $R_2$  – резистором в преобразователе тока в напряжение. Нораторы обеспечивают равенство токов в резисторах. Соотношения между резисторами позволяют выбрать любой коэффициент пропорциональности при преобразовании тока в напряжения. Для изменения направления напряжения можно или перенести резистор  $R_2$  в цепь левого норатора, или использовать ЗЭН вместо нуллатора, или использовать два ЗЭТ вместо двух нораторов.

На рис.5 приведена схема модели по напряжению с четырьмя выходами. Она соответствует перечисленным выше четырём требованиям к моделям многотерминальных элементов. Изменяя соотношения между резисторами первичного и вторичных контуров, можно получить любой модуль коэффициентов передачи  $K_i$  в (1), а для изменения знака можно воспользоваться правилами, приведенными выше.

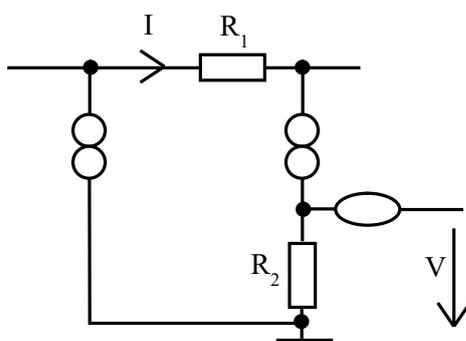


Рис.4

Видно, что при любом количестве выводов, число патологических элементов по напряжению будет на единицу больше числа патологических элементов по току. Это позволяет корректно объединять такие схемы или с одиночными нуллаторами или ЗЭТ, или с многовыходными патологическими элементами по току.

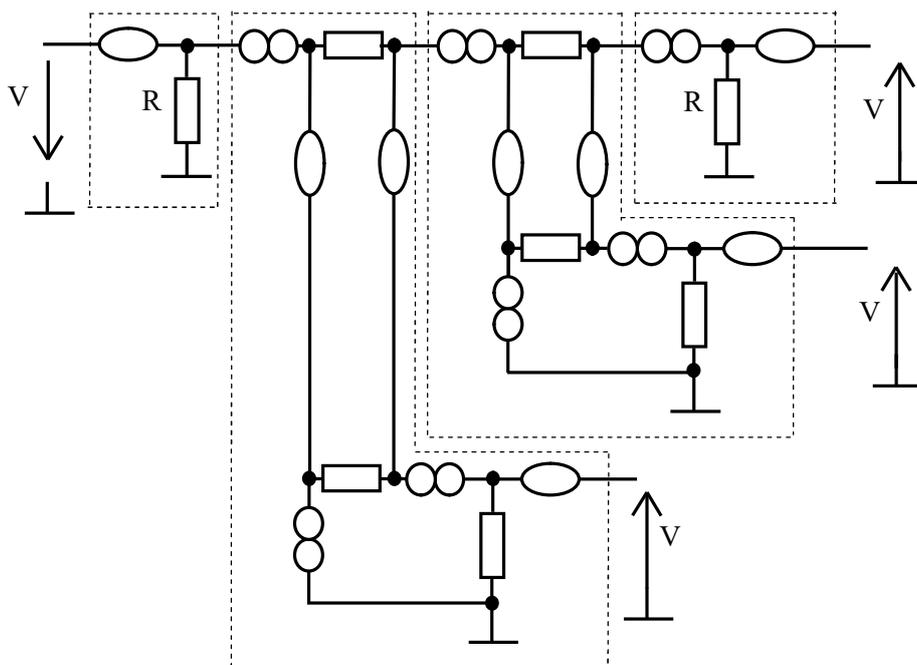


Рис. 5

Для получения любых передаточных функций в аналитическом виде схемы на рис. 5, как и других схемных моделей с нулловыми и зеркальными патологическими элементами, может быть использована программа CirSym [35]. В базовый набор программы включены все типы линейных элементов, отсутствуют ограничения на структуру и сложность анализируемых схем.

За рамками обсуждения остались интересные схемы с незаземленными (плавающими) зеркальными патологическими элементами. Анализ таких схем существенно усложняется при использовании матричного метода, но нет препятствий использования для этого программы CirSym [8].

### **Выводы**

1. Среди моделей многовыходных активных элементов на базе патологических элементов имеются как удачные решения, так и решения с недостатками.

2. Интересна модель многовыходного активного элемента по току, в которой используется репликация напряжений с помощью патологических элементов. На этой основе, но для репликации тока, предложен подход к построению моделей многовыходных элементов по напряжению и приведен один из вариантов такой модели.

### **Список литературы**

1. Carlin H. J. Singular network elements. // IEEE Trans. Circuit Theory. 1964.– Vol. CT-11.– P. 67–72.

2. Awad I. A., Soliman A. M. The inverting second generation current conveyors: The missing building blocks, CMOS realizations and applications // Int. J. Electron.– 1999.– Vol. 84, no. 4.– P. 413–432.

3. Sanchez-Lopez C., Fernandez F.V., Tlelo-Cuautle, E., Tan S.X.D. Pathological element-based active device models and their application to symbolic analysis. // IEEE Trans. Circuits Syst. I.– 2011.– Vol. 58.– P. 1382–1395.

4. Wang H.Y., Huang W.C., Chiang N.H. Symbolic nodal analysis of circuits using pathological elements. // IEEE Trans. Circuits Syst. II.– 2010.– Vol. 57.– P. 874–877.

5. Tlelo-Cuautle E., Martínez-Romero E., Sánchez-López C., V. Fernández F.V, Sheldon X.-D. Tan, Peng Li, Fakhfakh M. Behavioral Modeling of Mixed-Mode Integrated Circuits // *Advances in Analog Circuits.*– 2011.
6. Sánchez-López C. Modeling Active Devices with Nullors for Analog Signal Processing // *Design of Analog Circuits through Symbolic Analysis.*– Bentham Scientific Publisher, 2012.
7. Sánchez-López C. Pathological Equivalents of Fully-Differential Active Devices for Symbolic Nodal Analysis // *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2013.– Vol. 60.– P. 603–615.
8. *Pathological Elements in Analog Circuit Design* / Ed. Editors: M. Fakhfakh, M. Pierzchala.– Springer, 2017.
9. Spice models // *Analog Devices.*– <https://www.analog.com/en/design-center/simulation-models/spice-models.html#>
10. Spice models // *Texas Instruments.*– <http://www.ti.com/design-resources/design-tools-simulation/models-simulators/spice-library.html>
11. Spice models // *Maxim Integrated.*– <https://www.maximintegrated.com/en/design/design-tools/modeling-simulation/spice.html>
12. SPICE Simulation Models. National Instruments // <https://www.ni.com/en-us/innovations/white-papers/06/spice-simulation-models.html>
13. Sujito Huu-Duy Tran, Lin Yueh-Ling, Cong Chuan Pham, Hung-Yu Wang and Shun-Hsyung Chang. Enhanced Pathological Element-Based Symbolic Nodal Analysis // *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications, Appl. Sci.*– 2019.– Vol 9 (1).– P. 93.– <https://doi.org/10.3390/app9010093> - 27 Dec 2018
14. Indu Prabha Singh, Meeti Dehran, Dr. Kalyan Singh, Dr. S. N. Shukla. *Review of Current Mode Active Blocks*
15. Biolek, D., Senani, R., Biolkova, V., Kolka, Z. Active Elements for Analog Signal Processing: Classification, Review, and New Proposals. // *Radioengineering*. 2008, 17.
16. Soliman A.M., Pathological representation of the two-output CCII and ICCII family and application // *Int. J. Circ. Theor. Appl.*– 2011.– Vol. 39.– P. 589–606.

17. Sponar R., Vrba K., Kubanek D. Universal Conveyor – novel active device suitable for analog signal processing. // WSEAS Transactions on Electronics 2 (4), 2005, 213-216

18 Sponar R., Vrba K., Kubanek D. Universal Current Conveyor and Universal Voltage Conveyor Measurements and Modelling. // International Conference on Networking, International Conference on Systems and International Conference on Mobile Communications and Learning Technologies (ICNICONSMCL'06), 2006.

19. Dostal T., Vrba K., Cajka J. On Multi-port Current Conveyors // Proceedings of the 4th WSEAS international conference Prague, March 13–15, Czech Republic.

20. Saad, R.A., Soliman, A.M. A new approach for using the pathological mirror elements in the ideal representation of active devices. // Int. J. Circuit Theory Appl. 2010.– Vol. 38.– P. 148–178.

21. Soliman A.M. Nodal Admittance Matrix and Pathological Realization of BOOA, DDA, DDOFA and DDOMA // Singapore Journal of Scientific Research.– 2011.– P. 149–163.

22. Soliman A.M. Pathological representation of the two-output CCII and ICCII family and application // Int. J. Circuit Theory Appl.– 2011.– Vol. 39.– P. 589–606.

23. Bruton L.T. RC-Active Circuits. Theory and Design.

24. Duarte-Villaseñor M,A., Tlelo-Cuautle E., Gerardo de la Fraga L., Sánchez-López C. Symbolic Analysis and Synthesis of Analog Circuits Using Nullors and Pathological Mirror Elements // Pathological Elements in Analog Circuit Design: Lecture Notes in Electrical Engineering.– 2018.– Vol. 479.– Springer International Publishing AG.

25. Tlelo-Cuautle E., Sánchez-López C., Tan S.X. Symbolic nodal analysis of analog integrated circuits using pathological elements // 10th IEEE International NEWCAS Conference, Montreal, QC.– 2012.– P. 161–164.

26. Haigh D.G. Analytic approach to nullor transformations for FET circuit synthesis: Part I – nullator-norator tree transformations // IEEE Proc. ISCAS.– 2006.– P. 5231–5234.

27. Haigh D.G. Analytic approach to nullor transformations for FET circuit synthesis: Part II – nullator-norator re-pairing and cloning // IEEE Proc. ISCAS.– 2006.– P. 5235–5238.

28. Wang H.Y., Chiang N.H., Nguyen Q.M., Chang S.H. Advanced Materials chapter 26: Circuit Synthesis Using Pathological Elements.– Springer Proceedings in Physics.– 2014.– Vol. 152.– P. 317–328.

29. Filaretov V.V., Mayko G.V., Gorshkov K.S. Equivalent transformations of trees with nullor and mirror pathological elements // Proceedings of 3rd workshop on advances in information, electronic and electrical engineering (AIEEE–2015), Riga, Latvia, Nov 2015.– P. 1–5.

30. Tan L., Liu K., Bai Y., Teng J. Construction of CDBA and CDTA behavioral models and the applications in symbolic circuit analysis. // Anal. Integr. Circuits Signal Process.– 2013.– Vol. 75.– P. 517–523.

31. Huang, W.C., Wang, H.Y., Cheng P.S., Lin Y.C. Nullor equivalents of active devices for symbolic circuit analysis. // Circuits Syst. Signal Process. 2012.– Vol. 31.– P. 865–875.

32. Soliman A.M. Generalized, Floating and Self Adjoint Differential Voltage Current Conveyor // Trends in Applied Sciences Research.– 2011.– Vol. 6, issue 7.– P. 700–709.

33. Soliman, A.M. On the DVCC and the BOCCII as adjoint elements. // J. Circuits Syst. Comput.– 2009.– Vol. 18.– P.1017–1032.

34. Sanchez-Lopez C., Cante-Michcol B., Morales-Lopez F.E. Pathological equivalents of CMs and VMs with multi-outputs. // Analog Integr. Circuits Signal Process.– 2013.– Vol. 75 (1).– P. 75–83.

35. Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a nested rational form // International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles.– May 2020.– P. 1–25.

**Gennadiy Mayko (Майко Геннадий Владимирович)** – канд. техн. наук, Sr. Principal Engineer, Broadcom Corporation, USA. E-mail: gmayko@gmail.com

**Филаретов Владимир Валентинович** – доктор технических наук, ответственный редактор международного научного сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: vvfil@mail.ru

# ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НА ОСНОВЕ МНОГОКРАТНЫХ СУММАРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЙ

К. С. Горшков, С. А. Курганов, В. В. Филаретов

*Формулы компенсационной диагностики линейных электрических цепей представлены на основе многократных суммарных алгебраических дополнений (МСАД), обеспечивающих компактную запись операций при получении символьных выражений методом схемных определителей.*

*Formulas for compensatory diagnostics of linear electrical circuits are presented on the basis of multiple total algebraic additions, which provide a compact record of operations when obtaining symbolic expressions by the method of circuit determinants.*

Формулы для диагностики параметров элементов электрических цепей основаны на матричных [1–3] или схемных определителях [4,5]. Матричные определители применяется, как правило, к электрическим цепям в базисе проводимостей. В то же время схемно-алгебраические формулы (САФ) на основе схемных определителей не имеют ограничений на элементный состав цепей. При этом САФ раскрываются методом схемных определителей (МСО), который в отличие от матричных методов позволяет получить компактные символьные выражения без избыточных слагаемых.

Недостатком САФ является нестандартная – не имеющая аналогов в математике – форма записи, требующая изображений схем, что делает громоздким изложение материала. В то же время известны компактные формулы на основе многократных суммарных алгебраических дополнений (МСАД), которые используются для анализа режима и чувствительностей электрических цепей [6]. При этом раскрытие МСАД выполняется с помощью МСО для сохранения компактности получаемых символьных выражений.

В настоящей работе предлагаются формулы для диагностики электрических цепей на основе МСАД.

**Соответствие САФ и формул на основе МСАД [7].** САФ коэффициента передачи напряжения схемы (рис. 1,а) представлена на рис. 1,б, где  $|\cdot|$  – определитель соответствующей схемы. Числитель САФ формируется путем замены источника напряжения норатором (одинарная заштрихованная стрелка), а приемника напряжения – нуллатором (двойная стрелка). Знаменатель получается из исходной схемы при нулевом входном напряжении.

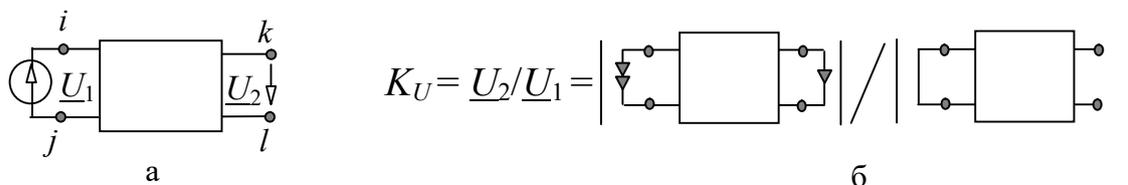


Рис. 1. Схема (а) и САФ коэффициента передачи напряжения (б)

Формула на основе МСАД (МСАД-формула), соответствующая САФ на рис. 1,б, имеет вид

$$K_U = \frac{\Delta_{(i+j)(k+l)}}{\Delta_{(i+j)(i+j)}} \quad (1)$$

В (1):  $\Delta$  – определитель матрицы параметров для схемы на рис. 1,а;  $\Delta_{(i+j)(k+l)}$  – МСАД, полученное из определителя  $\Delta$  путем добавления строки  $i$  к строке  $j$  и столбца  $k$  к столбцу  $l$ ; МСАД  $\Delta_{(i+j)(i+j)}$  получается аналогично  $\Delta_{(i+j)(k+l)}$ . Первая (вторая) сумма индексов при  $\Delta$  соответствует норатору (нуллатору) в САФ. Аналогично записываются через МСАД и другие передаточные и входные функции.

**САФ для диагностики на основе однократного эксперимента [4].** В диагностируемой схеме известны параметры части элементов, параметры остальной части элементов необходимо определить расчетно-экспериментальным путем. Эксперимент проводится однократный, как правило, в рабочем режиме. Измеряются напряжения и токи на доступных узлах и ветвях. Число измерений должно быть равно числу элементов с неизвестными параметрами.

На основе диагностируемой схемы строится компенсированная схема, в которой неизвестные элементы заменяются нораторами, а измеренные напряжения и токи устанавливаются фиксаторами напряжения и тока, которые содержат нуллаторы и соответствующие источники энергии. Компенсировать можно не только элементы, но и подсхемы, при этом

число нораторов и фиксаторов равно числу независимых сторон подсхемы [5]. По компенсированной схеме записываются с помощью МСО схемно-алгебраические формулы для искомым параметров.

В диагностируемой схеме на рис. 1,а неизвестными являются сопротивление  $Z_?$  и параметр  $\beta_?$  источника тока, управляемого током (ИТУТ). Параметры элементов подсхемы (в виде прямоугольника), а также источников ЭДС  $\underline{E}$  и тока  $\underline{J}$  известны. По теореме о косвенной компенсации элементов сопротивление и ИТУТ заменяются норатором, а измеренные напряжение и ток устанавливаются фиксаторами напряжения и тока, которые представляют собой соответствующие источники с измеренным параметром, последовательно и параллельно которым подключены нулаторы (рис. 1,б).

САФ для параметра  $\beta_?$  получается на основе компенсированной схемы на рис. 2,б в виде отношения двух схемных определителей (строка 2, столбец 2 в табл. 1). При этом числитель получен путем удаления компенсирующего норатора  $I$  и замены всех независимых источников многомерным источником, управляемым нулатором  $I$ . Параметром управляемого источника (УИ) является параметр соответствующего независимого источника. Знаменатель получается путем замены ИТУТ нуллором.

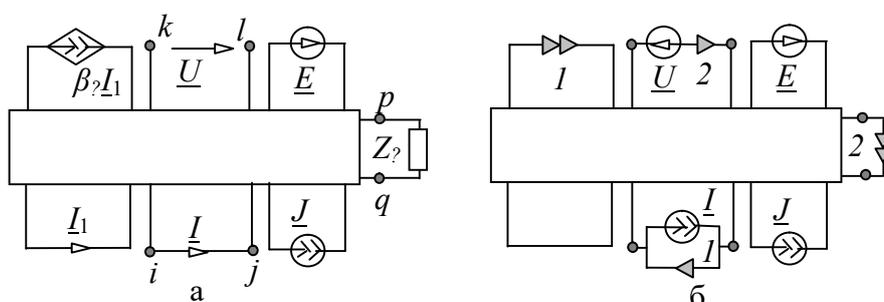


Рис.2. Диагностируемая (а) и компенсированная (б) схемы для нахождения параметра ИТУТ  $\beta_?$  и сопротивления  $Z_?$

САФ для других УИ – источника, управляемого напряжением (ИТУН), источника напряжения, управляемого напряжением (ИНУН) и источника напряжения, управляемого током (ИНУТ) – аналогичны (столбец 2 в табл. 1). При этом САФ для разных управляемых источников отличается только числителями, знаменатели у них одинаковые.

САФ для сопротивления  $Z_?$  получена также по компенсированной схеме на рис. 2,б и приведена в строке 2 и столбце 2 табл. 2. САФ для источников ЭДС и тока сформированы по схемам на рис. 3,а и 3,б и приведены в столбце 2, строках 3 и 4 табл.2.

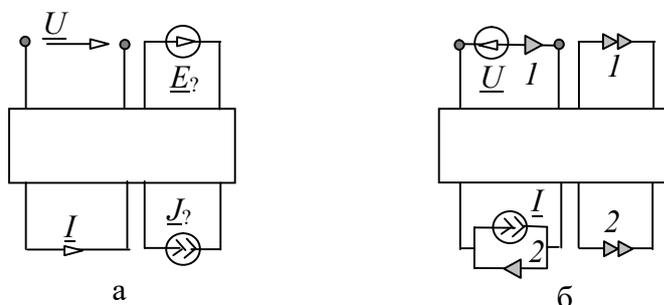


Рис.3. Диагностируемая (а) и компенсированная (б) схемы для нахождения параметров источников ЭДС  $\underline{E}_?$  и тока  $\underline{J}_?$

**Формулы для диагностики на основе МСАД.** Схема (рис. 4,а), на основе которой формируется МСАД-формула для параметра ИТУТ  $\beta_?$  получается из компенсированной схемы (рис. 2,б) путем преобразования независимых источников в многомерный управляемый источник и удаления элементов, соответствующих ИТУТ – норатора  $I$  и проводника в управляющей ветви. Используя изложенное выше соответствие между САФ и МСАД-формулами, запишем МСАД-формулу для параметра  $\beta_?$  (строка 2, столбец 3 в табл. 1). Для других управляемых источников – ИТУН, ИНУН и ИНУТ – МСАД-формулы помещены в столбец 3, в строки 3, 4 и 5 соответственно. Эти формулы, как САФ, отличаются друг от друга числителем.

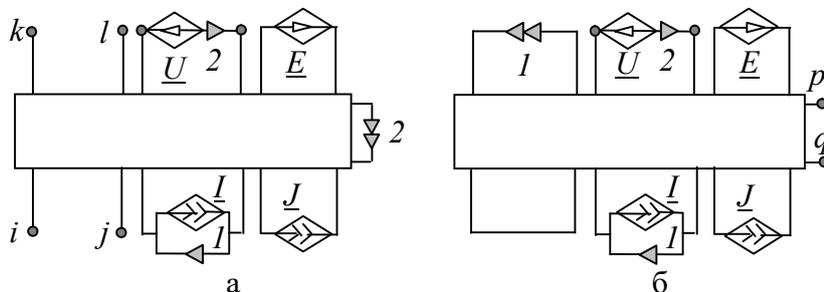
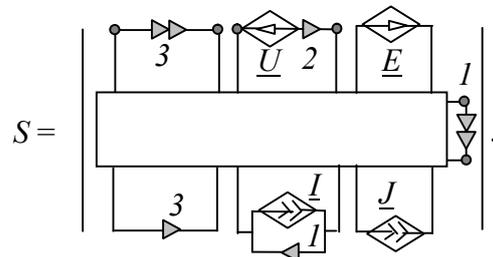


Рис. 4. Схемы, по которым формируются МСАД, для нахождения параметра управляемого источника (а) и сопротивления  $Z$  (б)

Таблица 1. МСАД-формулы для диагностики управляемых источников

| Элемент | САФ* | МСАД-формула<br>(по схеме на рис. 3,а)                                     |
|---------|------|--|
| ИТУТ    |      | $\beta_{\gamma} = -\frac{\Delta_{(i+j)(i+j)}}{\Delta_{(k+l)(i+j)}}$        |
| ИТУН    |      | $g_{\gamma} = -\frac{\Delta}{\Delta_{(k+l)(i+j)}}$                         |
| ИНУН    |      | $K_{\gamma} = -\frac{\Delta_{(k+l)(k+l)}}{\Delta_{(k+l)(i+j)}}$            |
| ИНУТ    |      | $z_{\gamma} = -\frac{\Delta_{(i+j)(i+j),(k+l)(k+l)}}{\Delta_{(k+l)(i+j)}}$ |

\*Знаменатель САФ:



МСАД-формула (строку 2, столбец 2 в табл. 2) для сопротивления  $Z_{\gamma}$  найдена по схеме на рис. 4,б, полученной из схемы на рис. 2,б удалением норатора 2 и преобразованием независимых источников в многомерный управляемый источник. МСАД-формулы для источников ЭДС и тока получены по схемам на рис. 5,а и 5,б и помещены в столбец 3, строки 3 и 4

соответственно. Схемы на рис. 5,а и 5,б получены из компенсированной схемы на рис. 3,б удалением норатора 1 и 2 и преобразованием независимых источников в многомерный УИ.

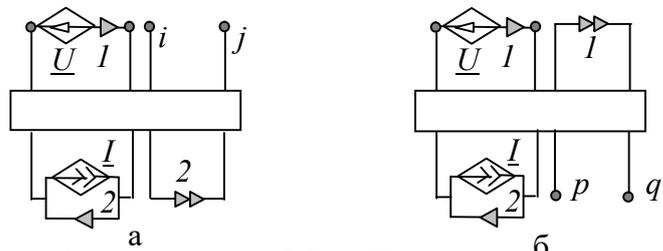
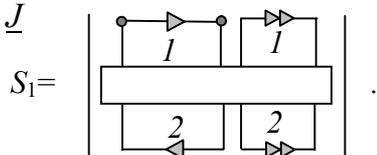


Рис. 5. Схемы для формирования МСАД: для параметров источников ЭДС (а) и тока (б)

Таблица 2. МСАД-формулы для диагностики двухполюсных элементов

| Элемент       | САФ*                | МСАД-формула<br>(по схемам на рис. 4,б, 5,а и 5,б)                                       |
|---------------|---------------------|--|
| Сопротивление | $Z_{\gamma} = -$    | $Z_{\gamma} = - \frac{\Delta_{(p+q)(p+q)}}{\Delta}$                                      |
| Источник ЭДС  | $\underline{E} = -$ | $\underline{E}_{\gamma} = \frac{\Delta_{(i+j)(i+j)}}{\Delta_{(i+j)(\emptyset)}^{E,J=0}}$ |
| Источник тока | $\underline{J} = -$ | $\underline{J}_{\gamma} = \frac{\Delta}{\Delta_{(p+q)(\emptyset)}^{E,J=0}}$              |

\*Знаменатель САФ для  $\underline{E}$  и  $\underline{J}$



**Пример диагностики.** Схема дана на рис. 6 [2]. Параметры элементов подсхемы 1 неизвестны. Во второй подсхеме неизвестно сопротивление  $R_{25?}$ , которое требуется найти. Остальные параметры элементов подсхемы 2 известны. Для измерения напряжений доступны узлы с номерами 16, 17 и 0.

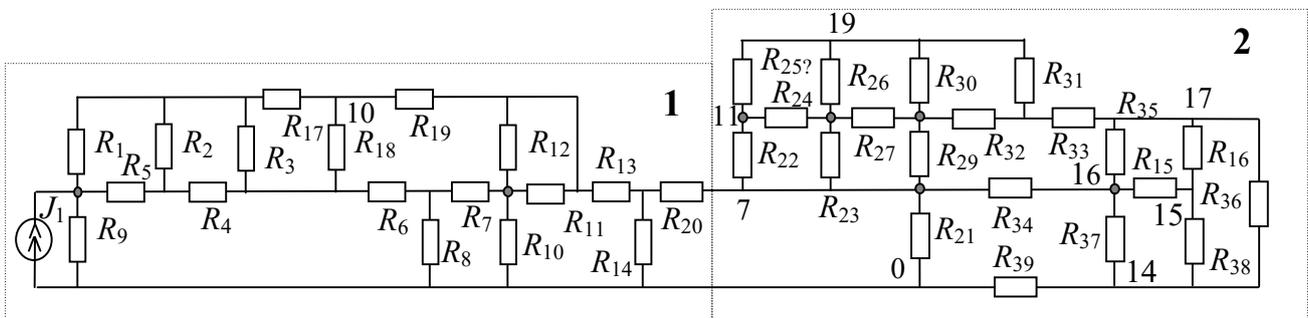


Рис. 6. Диагностируемая схема: 1, 2 – номера подсхем

Известные сопротивления элементов подсхемы 2 (в омах) :  $R_{15}=12.2$ ;  $R_{16}=3.2$ ;  $R_{21}=41.7$ ;  $R_{22}=31.5$ ;  $R_{23}=22.6$ ;  $R_{24}=51.2$ ;  $R_{26}=3.44$ ;  $R_{27}=13.4$ ;  $R_{28}=31.9$ ;  $R_{29}=16.1$ ;  $R_{30}=11.7$ ;  $R_{31}=11.5$ ;  $R_{32}=17.8$ ;  $R_{33}=22.2$ ;  $R_{34}=23.2$ ;  $R_{35}=11.4$ ;  $R_{36}=18.7$ ;  $R_{37}=3.12$ ;  $R_{38}=33.2$ ;  $R_{39}=8.67$  [2].

**Вычислительный эксперимент по определению напряжений  $U_{16}$  и  $U_{17}$  узлов 16 и 17 относительно общего узла 0.** Сопротивления (в омах) элементов подсхемы 1 примем следующими:  $R_1=2.125$ ;  $R_2=3.6$ ;  $R_3=4.7$ ;  $R_4=11.5$ ;  $R_5=12.6$ ;  $R_6=21.2$ ;  $R_7=3.7$ ;  $R_8=0.54$ ;  $R_9=3.54$ ;  $R_{10}=3.125$ ;  $R_{11}=6.6$ ;  $R_{12}=5.7$ ;  $R_{13}=19.5$ ;  $R_{14}=12.8$ ;  $R_{17}=1.54$ ;  $R_{18}=8.7$ ;  $R_{19}=2.27$ ;  $R_{20}=3.16$ ; ток источника  $J_1 = 1$  А. Искомое сопротивление  $R_{25?}$  примем равным 13.7 Ом [2].

По программе символьного анализа CirSym, разработанной В.В. Филаретовым [8]:  $U_{16} = 0.07232173703$  В и  $U_{17} = 0.08342515359$  В.

**Схема для построения МСАД-формулы в соответствии со строкой 2 и столбцом 3 в табл. 2.** Подсхема 1 с неизвестными параметрами компенсируется норатором 1 (рис. 7), удаляется искомое сопротивление  $R_{25?}$ . При этом измеренные напряжения  $U_{16}$  и  $U_{17}$  устанавливаются с помощью фиксаторов. Источники ЭДС фиксаторов  $E_{16} = U_{16}$  и  $E_{17} = U_{17}$  заменяются многомерным источником, управляемым нуллатором 2.

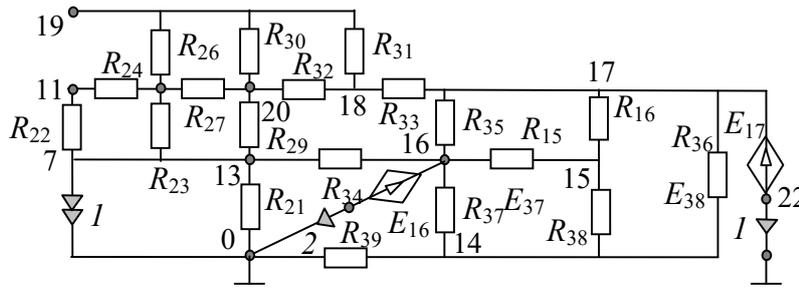


Рис. 7. Схема для построения МСАД-формулы

**Проверка условия диагностируемости.** Определитель компенсированной (с норатором между полюсами 19 и 11 на рис. 7) подсхемы 2 по CirSym имеет вид:

$$D = R_{21} * (R_{29} * R_{35} * (-R_{26} + R_{30} + R_{27}) * R_{24} * R_{23} * (R_{31} + R_{32}) + R_{26} * (R_{27} + R_{30}) * (-R_{23} * (R_{24} + R_{32}) - R_{32} * (R_{22} + R_{24})) + R_{26} * R_{27} * (-R_{22} * R_{31} + R_{23} * (R_{24} - R_{31}) - R_{24} * R_{31}) + R_{27} * R_{26} * R_{24} * R_{23} - (R_{26} + R_{30}) * R_{27} * R_{24} * R_{23} - R_{26} * R_{27} * R_{30} * (R_{22} + R_{24} + R_{23})) * (R_{36} * (R_{15} * ((R_{16} + R_{38}) * (R_{37} + R_{39}) + R_{37} * R_{39}) + R_{16} * (R_{37} * (R_{38} + R_{39}) + R_{38} * R_{39})) + R_{37} * R_{39} * (R_{15} * (R_{16} + R_{38}) + R_{16} * R_{38})) - -R_{27} * R_{35} * R_{32} * R_{30} * (R_{23} * (R_{24} + R_{26}) + R_{26} * (R_{22} + R_{24})) * (R_{36} * (R_{15} * ((R_{16} + R_{38}) * (R_{37} + R_{39}) + R_{37} * R_{39}) + R_{16} * (R_{37} * (R_{38} + R_{39}) + R_{38} * R_{39})) + R_{37} * R_{39} * (R_{15} * (R_{16} + R_{38}) + R_{16} * R_{38})) - -R_{26} * R_{30} * R_{32} * R_{35} * (R_{36} * (R_{15} * ((R_{16} + R_{38}) * (R_{37} + R_{39}) + R_{37} * R_{39}) + R_{16} * (R_{37} * (R_{38} + R_{39}) + R_{38} * R_{39})) + R_{37} * R_{39} * (R_{15} * (R_{16} + R_{38}) + R_{16} * R_{38})) * ((R_{22} + R_{24}) * (R_{23} + R_{28}) + R_{23} * R_{28})).$$

При заданных параметрах задача диагностики имеет решение, поскольку значение определителя  $D = -2.166917159 * 10^{15}$  отлично от нуля.

**Нахождение искомого сопротивления по МСАД-формуле** из строки 2, столбца 3 табл. 2 на основе схемы на рис. 7:

$$R_{25?} = - \frac{\Delta_{(19+11)(19+11)}}{\Delta}. \quad (2)$$

МСАД для формулы (2) находим по CirSym. Символьные выражения здесь не приводятся из-за их громоздкости. Численные значения имеют вид:  $\Delta_{(19+11)(19+11)} = 0.02421394564$ ;  $\Delta = -0.001767441579$ . Найденное значение сопротивления  $R_{25?} = 13.69999774$  Ом равно исходному значению с точностью используемой разрядной сетки.

**Вывод.** Предложены компактные формулы диагностики электрических цепей на основе многократных суммарных алгебраических дополнений.

### Список литературы

1. Демирчян К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей.— М.: Высшая школа, 1988.— 335 с.

2. Starzyk J A, Liu D. Multiple Fault Diagnosis of Analog Circuits by Locating Ambigu ity Groups of Test Equation. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS 2001, pp. 199–202.

3. Киншт Н.В., Петрунько Н.Н. Тестовая диагностика активных электрических цепей на основе коммутационных воздействий // Электричество. – 2014. – № 6. – С. 49–55.

4. V. V. Filaretov, S.A. Kurganov, K. S. Gorshkov. Generalized parameter extraction method for analog circuit fault diagnosis // Proceedings of International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM).– Chelyabinsk, Russia.– May 2016. – P. 1–6.

5. Горшков К.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Диагностика линейных электрических цепей с косвенной компенсацией подсхем при многократном эксперименте // Электричество.– 2017.– № 12.– С. 36–42.

6. Курганов С.А., Филаретов В.В. Обобщенные безызбыточные формулы для чувствительности схемных функций линейных электрических цепей// Электричество.– 2017.–№2.–С. 44–50.

7. Филаретов В.В. Разложение многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений методом схемных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : международ. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2016. – Вып. 13. – С. 93–108.

8. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : междунар. сб. науч. труд. – Ульяновск : УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С. 158–171.

**Горшков Константин Сергеевич** – канд. техн. наук, доцент кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем Санкт-Петербургского научно-исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО).  
E-mail: k.gorshkov@list.ru.

**Курганов Сергей Александрович** – д.т.н, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. Тел. 8-8422-77-81-05. E-mail: sak@ulstu.ru.

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ НА ПРИМЕРЕ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕЗИСТИВНОЙ ЦЕПИ

Д. В. Шушпанов, А. Ю. Шомин

*Рассмотрен вывод аналитического решения линейной задачи дополнителъности (ЛЗД) на примере системы 1-го, 2-го и 3-го порядков. Предложена более быстрая методика нахождения решения ЛЗД любого порядка. Показана корректность аналитического решения ЛЗД на примерах цепей с двумя и тремя идеальными диодами. Показана избыточность полученного аналитического решения ЛЗД и предложена возможность устранения этой избыточности.*

*The conclusion of the analytical solution of the linear complementarity problem (LCP) is considered in detail by the example of a system of the 1st, 2nd, and 3rd orders. A faster method is proposed for finding a solution of any order LCP. The correctness of the analytical solution of LCP is shown on the examples of circuits with two and three ideal diodes. The redundancy of the obtained analytical solution of LCP is shown, and the possibility of eliminating this redundancy is proposed.*

**Линейная задача дополнителъности.** Современная тенденция развития ключевых схем (особенно это актуально для области силовой электроники, использующей ключевые режимы усиления полупроводниковых приборов) приводит к тому, что для упрощения расчета нелинейных цепей используется кусочно-линейная аппроксимация вольтамперной характеристики нелинейных элементов (рис. 1а). В этом случае нелинейные элементы заменяются на схемы замещения, содержащие идеальные диоды (рис. 1б), ВАХ которых имеет прямоугольную форму (рис. 1в), что математически можно представить в виде [1–5]:

$$\begin{cases} i_D(t), u_D(t) \geq 0 \\ i_D(t) \cdot u_D(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

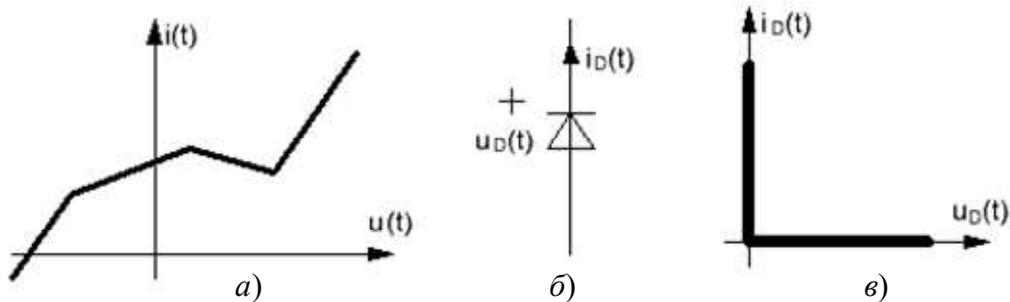


Рис. 1. Кусочно-линейная аппроксимация нелинейного элемента (а) и используемый для неё идеальный диод (б) со своей вольтамперной характеристикой (в)

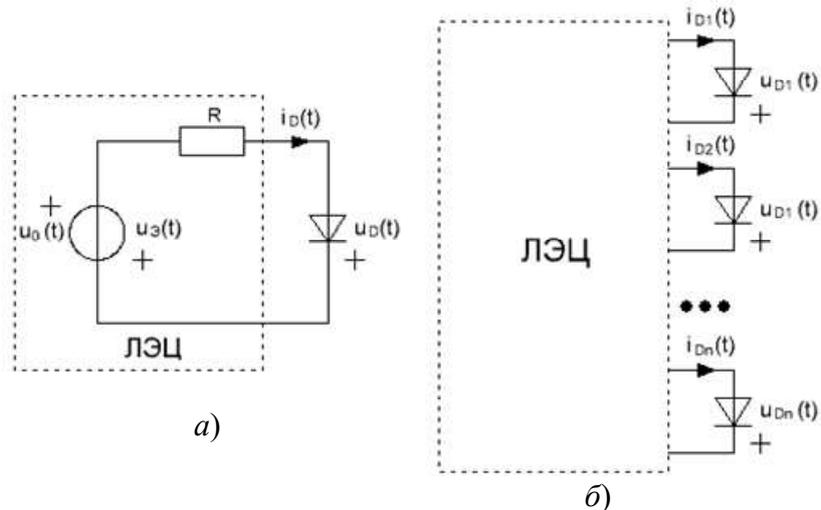


Рис. 2. Электрическая цепь с одним (а) и несколькими (б) идеальными диодами

Для любой электрической цепи с одним идеальным диодом (рис. 2а), используя метод эквивалентного генератора, можно записать уравнение, связывающее ток идеального диода и напряжение на идеальном диоде [1–5]:

$$\begin{cases} u_D(t) = R_D \cdot i_D(t) + u_D(t) \\ i_D(t), u_D(t) \geq 0 \\ i_D(t) \cdot u_D(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

В случае электрической цепи с бóльшим количеством идеальных диодов (рис. 2б) вместо уравнения (2) получаем уже систему уравнений, которую можно записать в виде [1–5]:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_D = \mathbf{R}_D \cdot \mathbf{I}_D + \mathbf{U}_D \\ \mathbf{I}_D, \mathbf{U}_D \geq 0 \\ \mathbf{I}_D^T \cdot \mathbf{U}_D = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где  $U_D$  – вектор напряжений на идеальных диодах,  $I_D$  – вектор токов, протекающих через идеальные диоды,  $R_{\mathcal{D}}$  – матрица линейных компонентов цепи,  $U_{\mathcal{D}}$  – вектор эквивалентных источников возмущения.

Выражение (2) и её матричный вариант (3) в отечественной литературе известно как линейная задача дополнителности (ЛЗД) [6] или Linear Complementarity Problem (LCP) в зарубежной литературе [3, 5]. Линейная задача дополнителности известна уже довольно большое время, и в основном изучается в теории игр и в экономике [6]. В теории цепей данная задача, к сожалению, малоизвестна.

Методы решения системы (3) являются, в основном, численными. Бокховен [3] и Леенартс [4, 5] предложили явное решение линейной задачи дополнителности, использующее функцию модуля, которое можно считать аналитическим. Для решения системы (3) порядка  $n$  необходимо получить решение системы  $n-1$  [4, 5]. Рассмотрим этот метод, производя поиск решения с самого низкого порядка.

**Одномерный случай.** Решение уравнения (2) находится при использовании двух условий: когда диод закрыт ( $i_D(t) = 0, u_D(t) > 0$ ) и когда диод открыт ( $i_D(t) > 0, u_D(t) = 0$ ), т.е.

$$\begin{cases} u_D(t)|_{i_D(t)=0, u_{\mathcal{D}}(t)>0} = u_{\mathcal{D}}(t) \\ i_D(t)|_{u_D(t)=0, u_{\mathcal{D}}(t)<0} = -u_{\mathcal{D}}(t)/R_{\mathcal{D}} \end{cases} \quad (4)$$

Для более компактной формы решение (4) можно переписать, используя передачу модуля (modulus transform) [3, 5]:

$$y = \lfloor x \rfloor \rightarrow \begin{cases} y = x, & x \geq 0 \\ y = 0, & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{x + |x|}{2}. \quad (5)$$

Тогда решением уравнения (3) будет:

$$\begin{cases} u_D(t) = \lfloor u_{\mathcal{D}}(t) \rfloor \\ i_D(t) = \lfloor -u_{\mathcal{D}}(t)/R_{\mathcal{D}} \rfloor \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u_D(t) = \lfloor u_{\mathcal{D}}(t) \rfloor \\ i_D(t) = \lfloor i_{\mathcal{D}}(t) \rfloor \end{cases}, \quad (6)$$

где  $i_{\mathcal{D}}(t) = -u_{\mathcal{D}}(t)/R_{\mathcal{D}}$  – решение уравнения (3) при  $u_D(t) = 0$ .

**Двумерный случай.** Систему уравнений (3) второго порядка можно переписать в виде:

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = R_{\mathcal{D}11}i_{D1}(t) + R_{\mathcal{D}12}i_{D2}(t) + u_{\mathcal{D}1}(t) \\ u_{D2}(t) = R_{\mathcal{D}21}i_{D1}(t) + R_{\mathcal{D}22}i_{D2}(t) + u_{\mathcal{D}2}(t) \end{cases}. \quad (7)$$

Для нахождения  $u_{D1}(t)$  в системе (7) приравняем  $i_{D1}(t) = 0$ . Тогда

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = \left[ R_{\mathcal{E}12} \hat{i}_{D2}(t) + u_{\mathcal{E}1}(t) \right] \\ \hat{i}_{D2}(t) = R_{\mathcal{E}22} \hat{i}_{D2}(t) + u_{\mathcal{E}2}(t) \end{cases}, \quad (8)$$

где  $\hat{i}_{D2}(t)$  – ток через идеальный диод D2, когда  $i_{D1}(t) = 0$ .

Так как второе уравнение системы (7) является одномерным случаем для идеального диода D2 (6), то, подставив решение для  $\hat{i}_{D2}(t)$  в (8), получим решение для  $u_{D1}(t)$ . Аналогично найдем  $u_{D2}(t)$  и получим явное решение для напряжений на диодах:

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = \left[ R_{\mathcal{E}12} \left[ -u_{\mathcal{E}2}(t)/R_{\mathcal{E}22} \right] + u_{\mathcal{E}1}(t) \right] \\ u_{D2}(t) = \left[ R_{\mathcal{E}21} \left[ -u_{\mathcal{E}1}(t)/R_{\mathcal{E}11} \right] + u_{\mathcal{E}2}(t) \right] \end{cases}, \quad (9)$$

или

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = \left[ R_{\mathcal{E}12} \left[ i_{\mathcal{E}2}^0(t) \right] + u_{\mathcal{E}1}(t) \right] \\ u_{D2}(t) = \left[ R_{\mathcal{E}21} \left[ i_{\mathcal{E}1}^0(t) \right] + u_{\mathcal{E}2}(t) \right] \end{cases}, \text{ где } i_{\mathcal{E}i}^0(t) = -u_{\mathcal{E}i}(t)/R_{\mathcal{E}ii}, \quad (10)$$

т.е. напряжение на  $i$ -м диоде зависит от этого напряжения при открытии другого диода ( $u_{\mathcal{E}i}(t)$ ), и тока  $j$ -го диода при закрытии остальных ( $i_{\mathcal{E}j}^0(t)$ ).

Для нахождения в системе (3) решения токов через идеальные диоды необходимо, чтобы для всех диодов выполнялись условия (1), т.е.:

$$\begin{cases} u_{Di}(t) > 0, i_{Di}(t) = 0 \\ u_{Di}(t) = 0, i_{Di}(t) > 0 \end{cases}. \quad (11)$$

Для этого необходимо в системе (3) выразить  $\mathbf{I}_D$  через  $\mathbf{U}_D$ . Тогда получаем следующую систему уравнений в матричном виде для нахождения токов через идеальные диоды:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_D = \mathbf{G}_{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{U}_D + \mathbf{I}_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{I}_D, \mathbf{U}_D \geq 0 \\ \mathbf{I}_D^T \cdot \mathbf{U}_D = 0 \end{cases}, \text{ где } \mathbf{G}_{\mathcal{E}} = \mathbf{R}_{\mathcal{E}}^{-1}, \mathbf{I}_{\mathcal{E}} = -\mathbf{R}_{\mathcal{E}}^{-1} \cdot \mathbf{U}_{\mathcal{E}}. \quad (12)$$

Для двумерного случая систему (12) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} i_{D1}(t) = G_{\mathcal{E}11} u_{D1}(t) + G_{\mathcal{E}12} u_{D2}(t) + i_{\mathcal{E}1}(t) \\ i_{D2}(t) = G_{\mathcal{E}21} u_{D1}(t) + G_{\mathcal{E}22} u_{D2}(t) + i_{\mathcal{E}2}(t) \end{cases}. \quad (13)$$

Как видно, система (13) дуальна системе (7). Тогда по аналогии с решением для напряжений на идеальных диодах (10) получим явное решение для токов через идеальные диоды:

$$\begin{cases} i_{D1}(t) = \left[ G_{\mathfrak{E}12} \left[ u_{\mathfrak{E}2}^1(t) \right] + i_{\mathfrak{E}1}(t) \right] \\ i_{D2}(t) = \left[ G_{\mathfrak{E}21} \left[ u_{\mathfrak{E}1}^2(t) \right] + i_{\mathfrak{E}2}(t) \right] \end{cases} \quad (14)$$

где  $u_{\mathfrak{E}i}^j(t) = -i_{\mathfrak{E}i}(t)/G_{\mathfrak{E}ii} = \begin{cases} u_{\mathfrak{E}1}^2(t) = R_{\mathfrak{E}12}i_{\mathfrak{E}2}^0(t) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \\ u_{\mathfrak{E}2}^1(t) = R_{\mathfrak{E}21}i_{\mathfrak{E}1}^0(t) + u_{\mathfrak{E}2}(t) \end{cases}$ .

Отсюда следует, что ток через  $i$ -й диод зависит от тока через него, когда другой диод закрыт ( $i_{\mathfrak{E}i}(t)$ ) и напряжения на  $j$ -м диоде, когда другой диод открыт ( $u_{\mathfrak{E}j}^i(t)$ ). Заметим, что  $u_{\mathfrak{E}i}(t)$  из выражения (10) не равно  $u_{\mathfrak{E}i}^j(t)$  из (14). Аналогично  $i_{\mathfrak{E}j}^0(t)$  из выражения (10) не равно  $i_{\mathfrak{E}i}(t)$  из (14).

**Трехмерный случай.** Систему (3) можно записать в виде:

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = R_{\mathfrak{E}11}i_{D1}(t) + R_{\mathfrak{E}12}i_{D2}(t) + R_{\mathfrak{E}13}i_{D3}(t) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \\ u_{D2}(t) = R_{\mathfrak{E}21}i_{D1}(t) + R_{\mathfrak{E}22}i_{D2}(t) + R_{\mathfrak{E}23}i_{D3}(t) + u_{\mathfrak{E}2}(t) \\ u_{D3}(t) = R_{\mathfrak{E}31}i_{D1}(t) + R_{\mathfrak{E}32}i_{D2}(t) + R_{\mathfrak{E}33}i_{D3}(t) + u_{\mathfrak{E}3}(t) \end{cases} \quad (15)$$

Как и в предыдущем случае, для нахождения  $u_{D1}(t)$  в системе (15) приравняем  $i_{D1}(t) = 0$ :

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = \left[ R_{\mathfrak{E}12}\hat{i}_{D2}(t) + R_{\mathfrak{E}13}\hat{i}_{D3}(t) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \right] \\ \hat{u}_{D2}(t) = R_{\mathfrak{E}22}\hat{i}_{D2}(t) + R_{\mathfrak{E}23}\hat{i}_{D3}(t) + u_{\mathfrak{E}2}(t) \\ \hat{u}_{D3}(t) = R_{\mathfrak{E}32}\hat{i}_{D2}(t) + R_{\mathfrak{E}33}\hat{i}_{D3}(t) + u_{\mathfrak{E}3}(t) \end{cases} \quad (16)$$

где  $\hat{i}_{D2}(t)$ ,  $\hat{i}_{D3}(t)$  – токи через идеальные диоды D2, D3, при  $i_{D1}(t) = 0$ .

Из (16): 
$$\begin{cases} u_{D1}(t) = \left[ R_{\mathfrak{E}12}\hat{i}_{D2}(t) + R_{\mathfrak{E}13}\hat{i}_{D3}(t) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \right] \\ \hat{\mathbf{U}}_{\mathfrak{D}}^1 = \hat{\mathbf{R}}_{\mathfrak{E}}^1 \cdot \hat{\mathbf{I}}_{\mathfrak{D}}^1 + \hat{\mathbf{U}}_{\mathfrak{E}}^1 \end{cases} \quad (17)$$

где  $\hat{\mathbf{U}}_{\mathfrak{D}}^1 = \begin{pmatrix} \hat{u}_{D2}(t) \\ \hat{u}_{D3}(t) \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{I}}_{\mathfrak{D}}^1 = \begin{pmatrix} \hat{i}_{D2}(t) \\ \hat{i}_{D3}(t) \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathfrak{E}}^1 = \begin{pmatrix} R_{\mathfrak{E}22} & R_{\mathfrak{E}23} \\ R_{\mathfrak{E}32} & R_{\mathfrak{E}33} \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{U}}_{\mathfrak{E}}^1 = \begin{pmatrix} u_{\mathfrak{E}2}(t) \\ u_{\mathfrak{E}3}(t) \end{pmatrix}$ . (18)

Второе уравнение в (17) с учетом (18) представляет двумерный случай, но теперь нужно найти не напряжения на диодах  $\hat{\mathbf{U}}_{\mathfrak{D}}^1$ , а токи через диоды  $\hat{\mathbf{I}}_{\mathfrak{D}}^1$ . Поэтому выразим токи из второго уравнения системы (17):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{D}}^1 = \tilde{\mathbf{G}}_{\mathfrak{D}}^1 \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{D}}^1 + \tilde{\mathbf{I}}_{\mathfrak{D}}^1 \\ \hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{D}}^1, \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{D}}^1 \geq 0 \\ \left(\hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{D}}^1\right)^{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{D}}^1 = 0 \end{cases}, \text{ где } \tilde{\mathbf{G}}_{\mathfrak{D}}^1 = \left(\hat{\mathbf{R}}_{\mathfrak{D}}^1\right)^{-1}, \tilde{\mathbf{I}}_{\mathfrak{D}}^1 = \left(\hat{\mathbf{R}}_{\mathfrak{D}}^1\right)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\mathfrak{D}}^1. \quad (19)$$

Система уравнений (19) равносильна (12). По аналогии с решением системы (12) решение системы (19) будет:

$$\begin{cases} \hat{i}_{\mathfrak{D}2}(t) = \left[ \tilde{G}_{\mathfrak{D}12}^1 \left[ u_{\mathfrak{D}3}^2(t) \right] + \tilde{i}_{\mathfrak{D}1}^1(t) \right] \\ \hat{i}_{\mathfrak{D}3}(t) = \left[ \tilde{G}_{\mathfrak{D}21}^1 \left[ u_{\mathfrak{D}2}^3(t) \right] + \tilde{i}_{\mathfrak{D}2}^1(t) \right] \end{cases} \quad (20)$$

$$\text{где } u_{\mathfrak{D}i}^j(t) = -\tilde{i}_{\mathfrak{D}k}^1(t) / \tilde{G}_{\mathfrak{D}kk}^1 = \begin{cases} u_{\mathfrak{D}2}^3(t) = R_{\mathfrak{D}23} i_{\mathfrak{D}3}^0(t) + u_{\mathfrak{D}2}(t) \\ u_{\mathfrak{D}3}^2(t) = R_{\mathfrak{D}32} i_{\mathfrak{D}2}^0(t) + u_{\mathfrak{D}3}(t) \end{cases}.$$

Подставляем (20) в первое уравнение системы (17) и получаем решение для напряжения  $u_{\mathfrak{D}1}(t)$ . Аналогично:

$$\begin{cases} u_{\mathfrak{D}1}(t) = \left[ R_{\mathfrak{D}12} \left[ \tilde{G}_{\mathfrak{D}12}^1 \left[ u_{\mathfrak{D}3}^2(t) \right] + \tilde{i}_{\mathfrak{D}1}^1(t) \right] + R_{\mathfrak{D}13} \left[ \tilde{G}_{\mathfrak{D}21}^1 \left[ u_{\mathfrak{D}2}^3(t) \right] + \tilde{i}_{\mathfrak{D}2}^1(t) \right] + u_{\mathfrak{D}1}(t) \right] \\ u_{\mathfrak{D}2}(t) = \left[ R_{\mathfrak{D}21} \left[ \tilde{G}_{\mathfrak{D}12}^2 \left[ u_{\mathfrak{D}3}^1(t) \right] + \tilde{i}_{\mathfrak{D}1}^2(t) \right] + R_{\mathfrak{D}23} \left[ \tilde{G}_{\mathfrak{D}21}^2 \left[ u_{\mathfrak{D}1}^3(t) \right] + \tilde{i}_{\mathfrak{D}2}^2(t) \right] + u_{\mathfrak{D}2}(t) \right], \\ u_{\mathfrak{D}3}(t) = \left[ R_{\mathfrak{D}31} \left[ \tilde{G}_{\mathfrak{D}12}^3 \left[ u_{\mathfrak{D}2}^1(t) \right] + \tilde{i}_{\mathfrak{D}1}^3(t) \right] + R_{\mathfrak{D}32} \left[ \tilde{G}_{\mathfrak{D}21}^3 \left[ u_{\mathfrak{D}1}^2(t) \right] + \tilde{i}_{\mathfrak{D}2}^3(t) \right] + u_{\mathfrak{D}3}(t) \right] \end{cases} \quad (21)$$

Чтобы соблюдалось условие (11), для нахождения токов через идеальные диоды переходим от системы (3) к системе (12). В трехмерном случае система (11) будет иметь вид:

$$\begin{cases} i_{\mathfrak{D}1}(t) = G_{\mathfrak{D}11} u_{\mathfrak{D}1}(t) + G_{\mathfrak{D}12} u_{\mathfrak{D}2}(t) + G_{\mathfrak{D}13} u_{\mathfrak{D}3}(t) + i_{\mathfrak{D}1}(t) \\ i_{\mathfrak{D}2}(t) = G_{\mathfrak{D}21} u_{\mathfrak{D}1}(t) + G_{\mathfrak{D}22} u_{\mathfrak{D}2}(t) + G_{\mathfrak{D}23} u_{\mathfrak{D}3}(t) + i_{\mathfrak{D}2}(t) \\ i_{\mathfrak{D}3}(t) = G_{\mathfrak{D}31} u_{\mathfrak{D}1}(t) + G_{\mathfrak{D}32} u_{\mathfrak{D}2}(t) + G_{\mathfrak{D}33} u_{\mathfrak{D}3}(t) + i_{\mathfrak{D}3}(t) \end{cases} \quad (22)$$

Для нахождения  $i_{\mathfrak{D}1}(t)$  в (22) приравняем  $u_{\mathfrak{D}1}(t) = 0$ . Тогда получаем:

$$\begin{cases} i_{\mathfrak{D}1}(t) = \left[ G_{\mathfrak{D}12} \hat{u}_{\mathfrak{D}2}(t) + G_{\mathfrak{D}13} \hat{u}_{\mathfrak{D}3}(t) + i_{\mathfrak{D}1}(t) \right] \\ \hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{D}}^1 = \hat{\mathbf{G}}_{\mathfrak{D}}^1 \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{D}}^1 + \hat{\mathbf{I}}_{\mathfrak{D}}^1 \end{cases}, \quad (23)$$

$$\text{где } \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{D}}^1 = \begin{pmatrix} \hat{u}_{\mathfrak{D}2}(t) \\ \hat{u}_{\mathfrak{D}3}(t) \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{I}}_{\mathbf{D}}^1 = \begin{pmatrix} \hat{i}_{\mathfrak{D}2}(t) \\ \hat{i}_{\mathfrak{D}3}(t) \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{G}}_{\mathfrak{D}}^1 = \begin{pmatrix} G_{\mathfrak{D}22} & G_{\mathfrak{D}23} \\ G_{\mathfrak{D}32} & G_{\mathfrak{D}33} \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{I}}_{\mathfrak{D}}^1 = \begin{pmatrix} i_{\mathfrak{D}2}(t) \\ i_{\mathfrak{D}3}(t) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Заметим, что  $\hat{\mathbf{G}}_{\mathfrak{D}}^1$  в (24) не равняется  $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathfrak{D}}^1$  в (19), а  $\hat{\mathbf{I}}_{\mathfrak{D}}^1$  в (24) не равняется  $\tilde{\mathbf{I}}_{\mathfrak{D}}^1$  в (19).

Поскольку (23) дуальна (17), то из второго уравнения (23) следует:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{U}}_D^1 = \tilde{\mathbf{R}}_3^i \cdot \hat{\mathbf{I}}_D^1 + \tilde{\mathbf{U}}_3^i \\ \hat{\mathbf{I}}_D^1, \hat{\mathbf{U}}_D^1 \geq 0 \\ (\hat{\mathbf{I}}_D^1)^T \cdot \hat{\mathbf{U}}_D^1 = 0 \end{cases}, \text{ где } \tilde{\mathbf{R}}_3^i = (\hat{\mathbf{G}}_3^i)^{-1}, \tilde{\mathbf{U}}_3^i = (\hat{\mathbf{G}}_3^i)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{I}}_3^i. \quad (25)$$

Так как (25) равносильна (3), то решение (25) примет вид:

$$\begin{cases} \hat{u}_{D2}(t) = \left[ \tilde{R}_{312}^1 \left[ i_{33}^2(t) \right] + \tilde{u}_{31}^1(t) \right] \\ \hat{u}_{D3}(t) = \left[ \tilde{R}_{321}^1 \left[ i_{32}^3(t) \right] + \tilde{u}_{32}^1(t) \right] \end{cases}, \quad (26)$$

$$\text{где } i_{3i}^j(t) = -\tilde{u}_{3k}^1(t) / \tilde{R}_{3kk} = \begin{cases} i_{32}^3(t) = G_{323} u_{33}^0(t) + i_{32}(t) \\ i_{33}^2(t) = G_{332} u_{32}^0(t) + i_{33}(t) \end{cases}, u_{3i}^0(t) = -i_{3i}(t) / G_{3ii}.$$

Подставляем (26) в первое уравнение (23) и получаем ток  $i_{D1}(t)$ . Аналогично находим решение для остальных токов:

$$\begin{cases} i_{D1}(t) = \left[ G_{312} \left[ \tilde{R}_{312}^1 \left[ i_{33}^2(t) \right] + \tilde{u}_{31}^1(t) \right] + G_{313} \left[ \tilde{R}_{321}^1 \left[ i_{32}^3(t) \right] + \tilde{u}_{32}^1(t) \right] + i_{31}(t) \right] \\ i_{D2}(t) = \left[ G_{321} \left[ \tilde{R}_{312}^2 \left[ i_{33}^1(t) \right] + \tilde{u}_{31}^2(t) \right] + G_{323} \left[ \tilde{R}_{321}^2 \left[ i_{31}^3(t) \right] + \tilde{u}_{32}^2(t) \right] + i_{32}(t) \right], \quad (27) \\ i_{D3}(t) = \left[ G_{331} \left[ \tilde{R}_{312}^3 \left[ i_{32}^1(t) \right] + \tilde{u}_{31}^3(t) \right] + G_{332} \left[ \tilde{R}_{321}^3 \left[ i_{31}^2(t) \right] + \tilde{u}_{32}^3(t) \right] + i_{33}(t) \right] \end{cases}$$

***n*-мерный случай.** Таким образом, можно найти решение системы (3) *n*-го порядка путем поиска решения системы (3) меньшего порядка: определяем решение 1-го, 2-го, 3-го порядка, используя преобразования для найденного решения 2-го порядка и т.д. до нужного порядка. Получаем, что *n*-мерный случай ведет к *n* уровням передачи модуля. Кроме того, как видно из (21) и (27), нахождение напряжений на идеальных диодах дуально нахождению токов через идеальные диоды, значит, можно записать аналитическое решение для напряжений на идеальных диодах и токов (путем замены переменных).

Из (21) и (27) следует решение для  $u_{D1}(t)$  системы более высокого порядка в виде дерева (рис. 3). В этом случае получаем преобразования

$$\begin{cases} \mathbf{R}_3 \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}_3^i \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}_3^{i-j} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}_3^{i\dots z} \left( \tilde{\mathbf{G}}_3^{i\dots z} \right) \\ \mathbf{U}_3 \rightarrow \tilde{\mathbf{I}}_3^i \rightarrow \tilde{\mathbf{U}}_3^{i-j} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\mathbf{U}}_3^{i\dots z} \left( \tilde{\mathbf{I}}_3^{i\dots z} \right) \end{cases}. \quad (28)$$

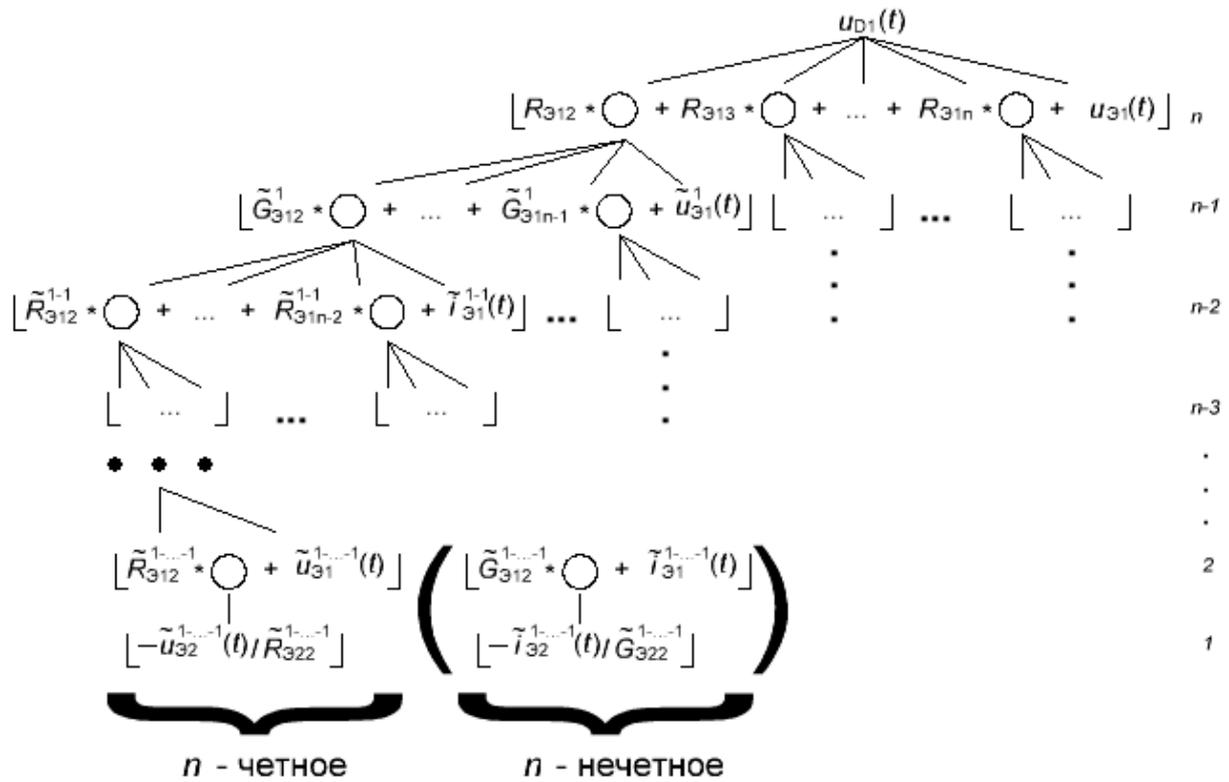


Рис. 3. Рекуррентный алгоритм решения в виде дерева для напряжения  $u_{D1}(t)$

Происходит чередование матриц  $\mathbf{R}_3 / \mathbf{G}_3$  и  $\mathbf{U}_3 / \mathbf{I}_3$  (одна создается из другой), причем порядок следующей матрицы на единицу меньше (номер удаляемых строки и столбца в верхнем индексе через тире).

Отсюда следует, что для решения системы (3) не нужно решение для меньших порядков, можно записать ответ в виде рис. 3. Кроме матриц  $\mathbf{R}_3$  и  $\mathbf{U}_3$ , нужны дополнительные матрицы. По алгоритму для  $u_{D1}(t)$  получается любое другое напряжение. Для токов через идеальные диоды необходимо в алгоритме (рис. 3) поменять местами  $\mathbf{R}_3 / \mathbf{G}_3$  и  $\mathbf{U}_3 / \mathbf{I}_3$ .

**О корректности предложенного аналитического решения ЛЗД на примерах расчета схем с идеальными диодами.** Сравним предложенный аналитический расчет схем с численным расчетом этих схем в программе FASTMEAN [7].

**1. Разветвленная цепь с двумя идеальными диодами [8].** В цепи с двумя идеальными диодами (рис. 4) были получены  $\mathbf{R}_3$  и  $\mathbf{U}_3$ :

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} R_4 + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & -\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ -\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{pmatrix}, \mathbf{U}_3 = \begin{pmatrix} u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{u_{01}(t)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - u_{02}(t) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

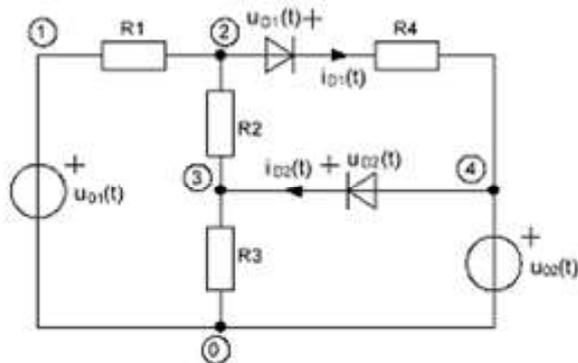


Рис. 4. Пример разветвленной цепи с двумя диодами

Согласно (14) для нахождения токов через идеальные диоды необходимо определить матрицы  $\mathbf{G}_\mathfrak{D}$  и  $\mathbf{I}_\mathfrak{D}$ . Исходя из (29), для цепи (рис. 4) они будут равны:

$$\mathbf{G}_\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4} & \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4} \\ \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4} & \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_3 (R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}_\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \frac{-u_{o2}(t)R_2 + \frac{u_{o1}(t)((R_2 + R_3)(R_1 + R_2) - R_1 R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}}{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4} \\ \frac{u_{o2}(t)(R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_3 R_4) - \frac{u_{o1}(t)R_3(R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_3 R_4)}{R_1 + R_2 + R_3}}{R_3 (R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4)} \end{pmatrix}.$$

Подставив полученные  $\mathbf{G}_\mathfrak{D}$  и  $\mathbf{I}_\mathfrak{D}$  в (14), можно определить токи через идеальные диоды для схемы на рис. 4. Эту схему рассчитаем с помощью программы FASTMEAN, использующей численные методы, и с помощью программы MATHCAD, используя выражение (14). В схеме на рис. 4 используются следующие параметры:  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 3$  кОм,  $R_3 = 4$  кОм,  $R_4 = 100$  Ом. На рис. 5 приведены временные диаграммы токов через диоды (слева D1, справа D2) при следующих значениях источников напряжения:

- а)  $u_{o1}(t) = 5 \cos(2\pi 10^3 t)$ ,  $u_{o2}(t) = \cos(2\pi 10^3 t)$ ;  
б)  $u_{o1}(t) = 5 \cos(2\pi 10^3 t)$ ,  $u_{o2}(t) = \cos(4\pi 10^3 t)$ ; в)  $u_{o1}(t) = 5 \cos(2\pi 10^3 t)$ ,  $u_{o2}(t) = 1$ .

Расчет тока диодов данной схемы этими методами показывает полное совпадение, что говорит о том, что полученное аналитическое решение

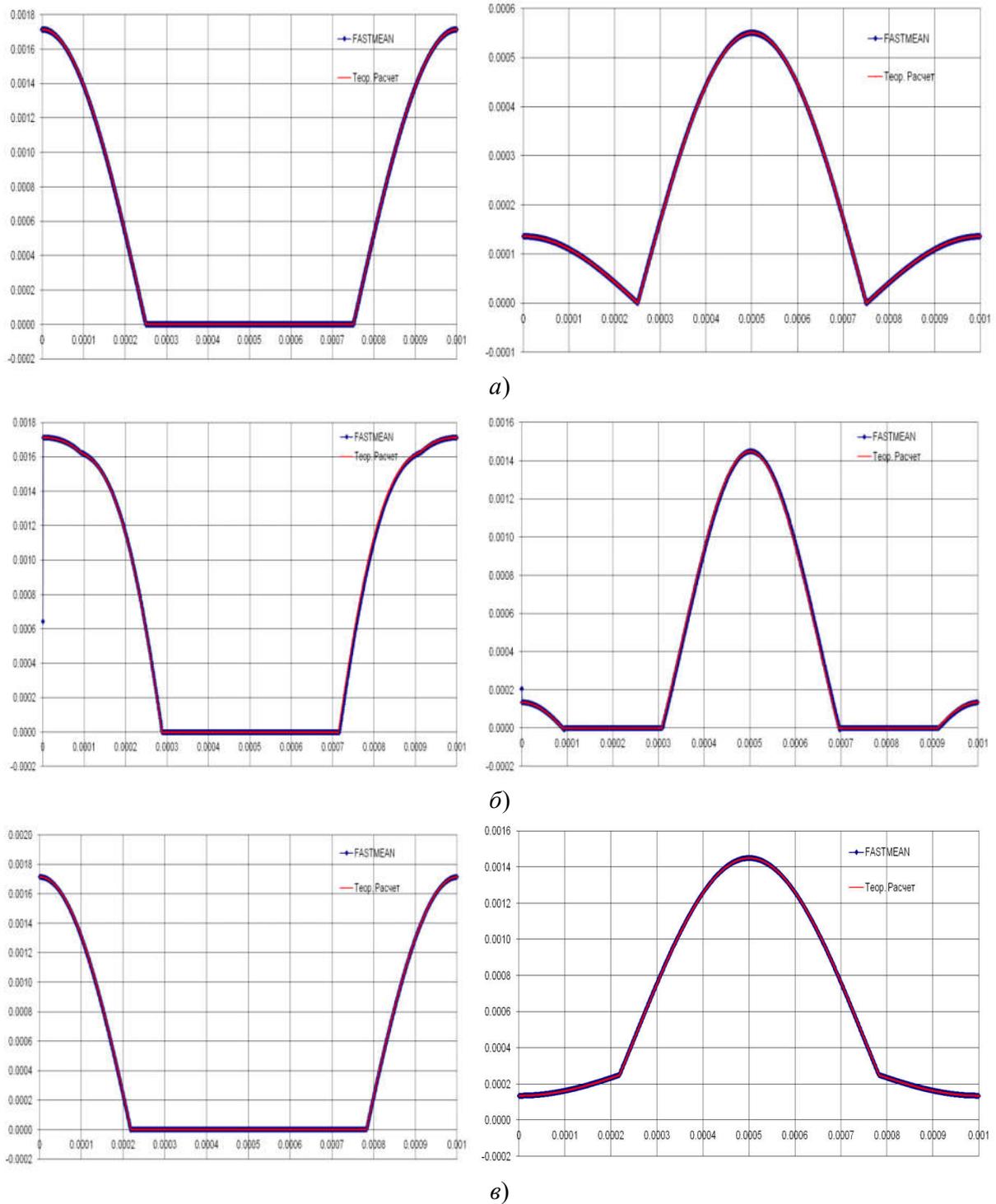


Рис. 5. Расчет токов через диоды (слева D1, справа D2) схемы (рис. 4):  
 $R_1 = 2 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 3 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 1 \text{ кОм}$ ,  $R_4 = 200 \text{ Ом}$   
 при различных значениях входного напряжения.

точно описывает токи, протекающие через диоды, в отличие от [8].  
 Отличие полученных результатов от [8] связано с тем, что для токов через идеальные диоды в [8] используются формулы, предложенные в [1, 2]:

$$i_{D1}(t) = \left[ -\frac{R_{Э12}}{R_{Э11}} \left[ \frac{-u_{Э2}(t)}{R_{Э22}} \right] - \frac{u_{Э1}(t)}{R_{Э11}} \right], i_{D2}(t) = \left[ -\frac{R_{Э21}}{R_{Э22}} \left[ \frac{-u_{Э1}(t)}{R_{Э11}} \right] - \frac{u_{Э2}(t)}{R_{Э22}} \right], (30)$$

а не (14). Использование (30) для нахождения токов через идеальные диоды приводит к некорректным результатам: возникают моменты, когда  $u_{Di}(t) > 0$ ,  $i_{Di}(t) > 0$ , что противоречит условию (11). Эти временные интервалы и были показаны в [8], как различия между численным и аналитическим решениями.

Данная ошибка в определении токов через идеальные диоды была сделана авторами в [1, 2], хотя они ссылались и основывались на работе [4]. В дальнейшем эта ошибка перекочевала в [8]. В работе [4] описан алгоритм решения ЛЗД близкий по сути описанному выше. Но в ней и в дальнейшей статье этих же авторов [5] приводится лишь пример электрической цепи с двумя идеальными диодами (рис. 4), в которой находятся только напряжения на идеальных диодах.

Исходя из вышеописанного следует, что для определения токов через идеальные диоды вместо выражения (17) необходимо воспользоваться выражением (14). В этом случае всегда будет выполняться исходное условие (11) для идеальных диодов.

## 2. Вольтамперная характеристика нелинейного элемента.

Рассмотрим классическую схему замещения нелинейного элемента [9, 10], состоящую из параллельных ветвей с идеальными диодами. Для определения её ВАХ подключим к нелинейному элементу (НЭ) источник напряжения и резистор (рис. 6).

Для заданной цепи в [11] были получены элементы матриц  $\mathbf{R}_Э$  и  $\mathbf{U}_Э$ :

$$\mathbf{R}_Э = \begin{pmatrix} R_{D1} + \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1} & \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1} \\ \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1} & R_{D2} + \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1} \end{pmatrix}, \mathbf{U}_Э = \begin{pmatrix} U_{D01} - u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} \\ U_{D02} - u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} \end{pmatrix}. (31)$$

Согласно (14) для нахождения токов через идеальные диоды необходимо определить матрицы  $\mathbf{G}_Э$  и  $\mathbf{I}_Э$ . Исходя из (31), для цепи (рис. 6) они будут равны:

$$\mathbf{G}_Э = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (R_{D2} + R_{D0})R_1 + R_{D2}R_{D0} & R_1R_{D0} \\ R_1R_{D0} & (R_{D1} + R_{D0})R_1 + R_{D1}R_{D0} \end{pmatrix},$$

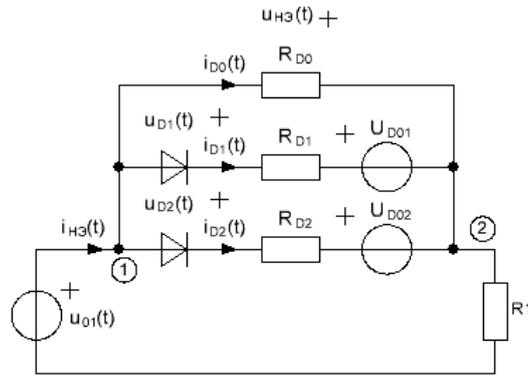


Рис. 6. Схема расчета ВАХ нелинейного элемента  
(классическая схема замещения НЭ с тремя параллельными ветвями)

$$\mathbf{I}_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_1 R_{D0} \left( U_{D02} - u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} \right) - (R_1 R_{D0} + R_{D2} (R_1 + R_{D0})) \left( U_{D01} - u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} \right) \\ R_1 R_{D0} \left( U_{D01} - u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} \right) - (R_1 R_{D0} + R_{D1} (R_1 + R_{D0})) \left( U_{D02} - u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} \right) \end{pmatrix}$$

где  $\Delta = (R_{D1} + R_{D2}) R_{D0} R_1 + R_{D1} R_{D2} (R_{D0} + R_1)$

Подставляя  $\mathbf{G}_3$  и  $\mathbf{I}_3$  в (14), определяем токи через диоды для данной схемы (рис. 6). Согласно [11] находим ток и напряжение на НЭ:

$$i_{\text{НЭ}}(t) = \frac{u_{01}(t) + (i_{D1}(t) + i_{D2}(t)) R_{D0}}{R_1 + R_{D0}}, \quad (32)$$

$$u_{\text{НЭ}}(t) = -R_{D0} \frac{u_{01}(t) - (i_{D1}(t) + i_{D2}(t)) R_1}{R_1 + R_{D0}}. \quad (33)$$

В [10, 11] уже рассчитаны параметры схемы замещения так, чтобы ВАХ нелинейного элемента проходила через следующие характерные точки ( $U_0 = 0$  В,  $I_0 = 0$  А;  $U_1 = 10$  В,  $I_1 = 0,1$  А;  $U_2 = 20$  В,  $I_2 = 0,4$  А;  $U_3 = 30$  В,  $I_3 = 0,9$  А):  $R_{D0} = 100$  Ом,  $R_{D1} = R_{D2} = 50$  Ом,  $U_{D01} = 10$  В,  $U_{D02} = 20$  В. Назовем данную вольтамперную характеристику планируемой ВАХ.

С помощью программы MathCAD, используя (32) и (33), строим ВАХ нелинейного элемента, а также строим планируемую ВАХ НЭ (рис. 7). При построении ВАХ в программе MathCAD варьировалось входное напряжение  $U_{01}$  (было взято сопротивление  $R_1 = 10$  Ом, а напряжение  $U_{01}$  менялось от 0 В до 40 В), а также сопротивление  $R_1$  (было взято напряжение  $U_{01} = 30$  В, а сопротивление  $R_1$  менялось от 1 мкОм до 10 МОм).

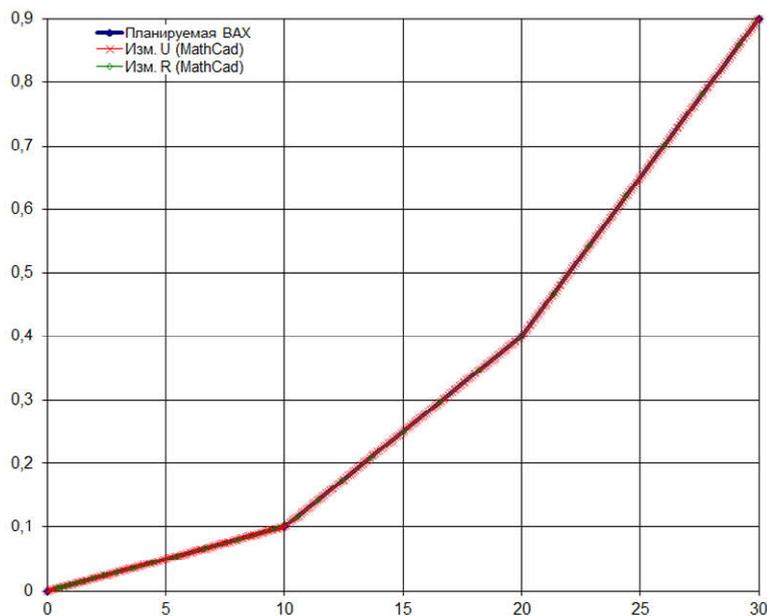


Рис. 7. ВАХ нелинейного элемента: планируемая и рассчитанная согласно (32) и (33) при изменении напряжения и сопротивления

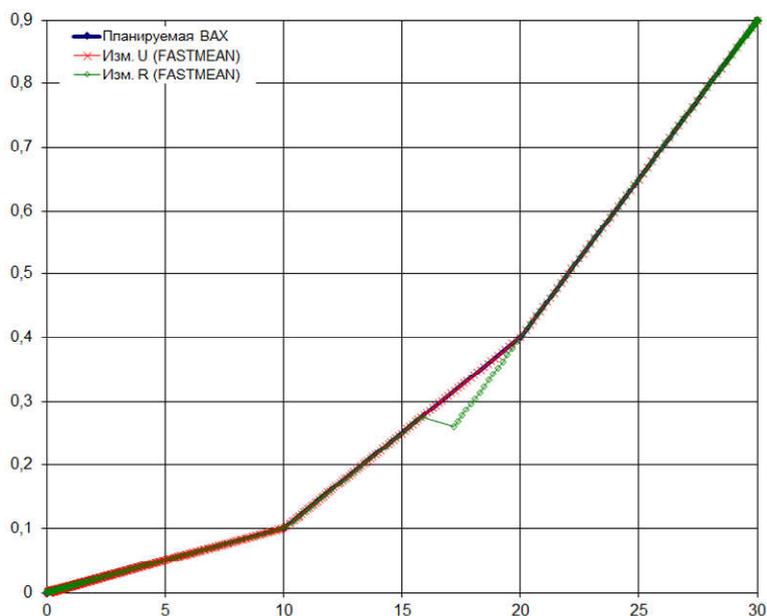


Рис. 8. ВАХ нелинейного элемента: планируемая и рассчитанная в программе FASTMEAN при изменении напряжения и сопротивления

ВАХ нелинейного элемента, построенного с использованием аналитического решения, полностью повторяет планируемую ВАХ (рис. 7). Это ещё раз нам говорит о корректности нахождения токов через идеальные диоды с помощью полученных аналитических выражений. Отличие результатов в [10] связано с тем, что для токов через идеальные диоды в [10], как и в предыдущем случае, используются формулы, предложенные в [1, 2].

Кроме того, расчет ВАХ нелинейного элемента (рис. 6) был проведен с использованием численного метода, используя программу FASTMEAN (рис. 8).

При варьировании напряжения  $U_{01}$  в программе FASTMEAN вольтамперная характеристика НЭ полностью повторяет планируемую ВАХ (рис. 8), что в принципе повторяет результаты аналитического

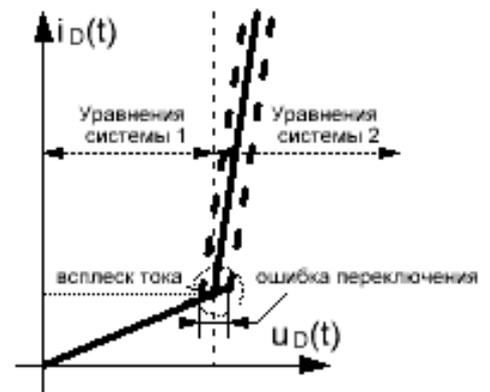


Рис. 9. Кусочно-линейная аппроксимация диода

метода. Но при варьировании сопротивления  $R_1$  происходит ошибка переключения (второй диод включается при меньшем напряжении) — рис. 8. Данная ошибка в программе FASTMEAN связана с тем, что программа не решает линейную задачу дополненности (она её игнорирует). Программа для каждого состояния диода составляет уравнение системы, а далее определяет какое уравнение системы использовать (рис. 9). Для схемы с одним «идеальным» диодом ошибки переключения не наблюдается, а в схеме с двумя «идеальными» диодами уже может появиться ошибка переключения, что и наблюдается на рис. 8.

**3. Вольтамперная характеристика нелинейного элемента с бóльшим количеством ветвей.** В случае использования нелинейного элемента с ВАХ, которая содержит бóльшее количество ветвей (рис. 10), получаем следующие значения элементов матриц  $\mathbf{R}_3$  и  $\mathbf{U}_3$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} R_{D1} + R_3 & R_3 & R_3 \\ R_3 & R_{D2} + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_3 & R_{D3} + R_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_3 = \begin{pmatrix} U_{D01} - u_{01}(t)R_3/R_1 \\ U_{D02} - u_{01}(t)R_3/R_1 \\ U_{D03} - u_{01}(t)R_3/R_1 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где  $R_3 = R_{D0}R_1/(R_{D0} + R_1)$ .

Определив  $\mathbf{G}_3$  и  $\mathbf{I}_3$ , подставим их в (14) и определим токи через идеальные диоды для данной схемы (рис. 10). Далее находим ток и напряжение на НЭ:

$$i_{H3}(t) = \frac{u_{01}(t) + (i_{D1}(t) + i_{D2}(t) + i_{D3}(t))R_{D0}}{R_1 + R_{D0}}, \quad (34)$$

$$u_{H3}(t) = -R_{D0} \frac{u_{01}(t) - (i_{D1}(t) + i_{D2}(t) + i_{D3}(t))R_1}{R_1 + R_{D0}}. \quad (35)$$

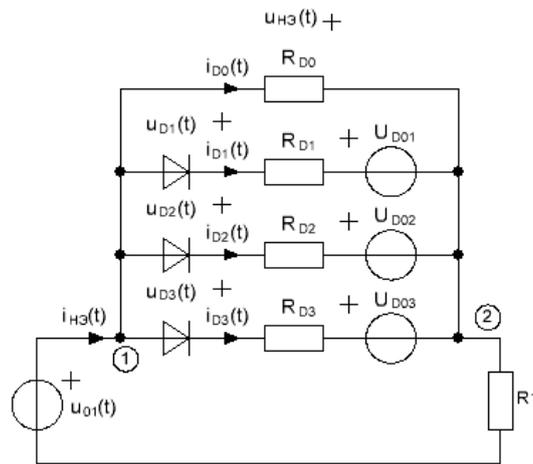


Рис. 10. Схема расчета ВАХ нелинейного элемента  
(классическая схема замещения НЭ с четырьмя параллельными ветвями)

В этом варианте (рис. 10) подберем параметры нелинейного элемента так, чтобы его ВАХ проходила через следующие характерные точки ( $U_0 = 0$  В,  $I_0 = 0$  А;  $U_1 = 10$  В,  $I_1 = 0,1$  А;  $U_2 = 20$  В,  $I_2 = 0,4$  А;  $U_3 = 30$  В,  $I_3 = 0,9$  А,  $U_4 = 40$  В,  $I_4 = 1,6$  А):  $R_{D0} = 100$  Ом,  $R_{D1} = R_{D2} = R_{D3} = 50$  Ом,  $U_{D01} = 10$  В,  $U_{D02} = 20$  В,  $U_{D03} = 30$  В. Назовем эту вольтамперную характеристику планируемой ВАХ.

С помощью программы MathCAD, используя (34) и (35), строим ВАХ нелинейного элемента, а также строим планирующую ВАХ НЭ (рис. 11). При построении ВАХ в программе MathCAD варьировалось входное напряжение  $U_{01}$  (было взято сопротивление  $R_1 = 10$  Ом, а напряжение  $U_{01}$  менялось от 0 В до 60 В), а также сопротивление  $R_1$  (было взято напряжение  $U_{01} = 40$  В, а сопротивление  $R_1$  менялось от 1 мкОм до 10 кОм).

ВАХ нелинейного элемента, построенного с использованием аналитического решения, полностью повторяет планирующую ВАХ (рис. 11), что говорит о корректности аналитического решения ЛЗД 3-го порядка.

Расчет ВАХ нелинейного элемента (рис. 10) также был проведен с использованием численного метода, используя программу FASTMEAN (рис. 12). Некорректность в определении момента переключения идеальных диодов начинает сказываться уже при варьировании входного напряжения. При варьировании сопротивления нагрузки возникает уже две некорректности переключения идеальных диодов.

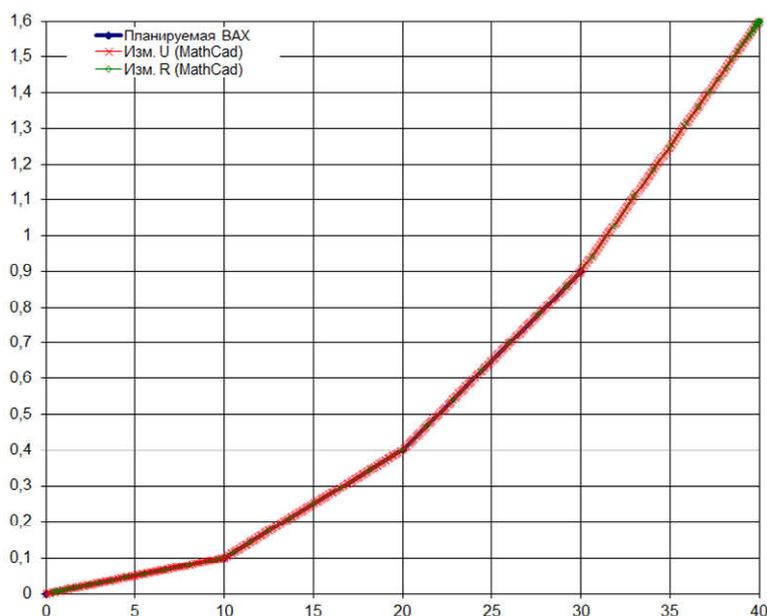


Рис. 11. ВАХ нелинейного элемента: планируемая и рассчитанная согласно (34) и (35) при изменении напряжения и сопротивления

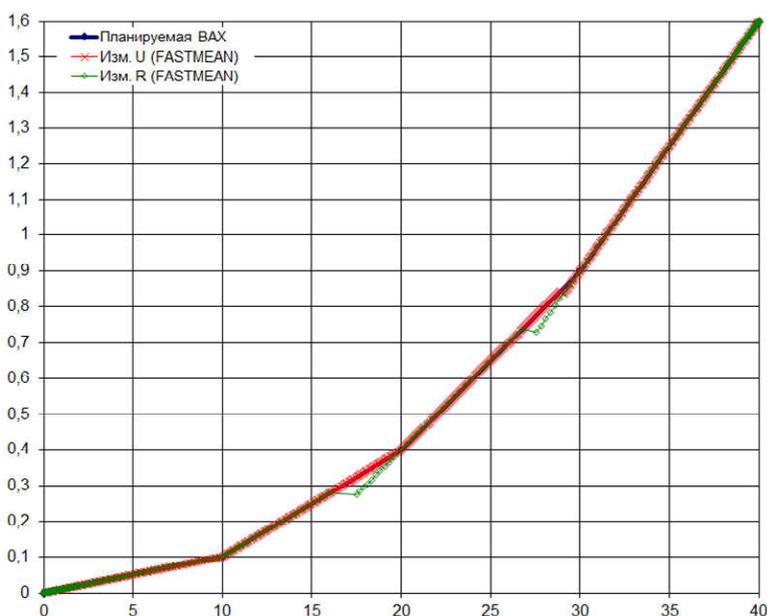


Рис. 12. ВАХ нелинейного элемента: планируемая и рассчитанная в программе FASTMEAN при изменении напряжения и сопротивления

Как было сказано выше, такие ошибки переключения в программе FASTMEAN связаны с тем, что программа не решает линейную задачу дополненности. Поэтому использовать диоды близкие к идеальным (значительное расхождение в значениях открытого и закрытого состояниях диода) в программе FASTMEAN нельзя. Для возможности использования таких диодов в программе FASTMEAN надо реализовать какой-либо метод решения линейной задачи дополненности (например, метод Катценельсона или метод Лемке).

Как видно из рис. 7, 8, 11, 12, данная задача (расчет ВАХ нелинейного элемента произвольного порядка) может хорошо показать корректность решения линейной задачи дополненности (особенно при изменении нагрузки). Т.к. в определении ВАХ нелинейного элемента используются только токи через идеальные диоды, то для определения корректности нахождения напряжений на идеальных диодах можно воспользоваться проверкой ЗНК. Т.е. находится напряжение на нелинейном элементе

$$u_{\text{НЭ}}(t) = \begin{cases} -u_{D1}(t) + R_{D1}i_{D1}(t) + U_{D01} \\ -u_{D2}(t) + R_{D2}i_{D2}(t) + U_{D02} \\ -u_{D3}(t) + R_{D3}i_{D3}(t) + U_{D03} \end{cases}$$

и сравниваются эти три значения с (35). Такая комплексная проверка позволяет определить корректность решения ЛЗД любого порядка.

**Избыточность предложенного аналитического метода.** Выше был описан алгоритм аналитического решения ЛЗД, который был проверен на эклектических цепях с двумя и тремя идеальными диодами. Как видно из алгоритма решения ЛЗД (рис. 3), данный метод обладает двумя видами избыточности. Во-первых, необходимо создавать новые матрицы и производить перемножения элементов этих матриц, в которых могут содержаться взаимно-уничтожаемые слагаемые. Во-вторых, с ростом  $n$  значительно растет количество операций передачи модуля  $\Sigma_n$  для одного решения, а именно: для 1-го порядка –  $\Sigma_1 = 1$ ; для 2-го порядка –  $\Sigma_2 = 2$ ; для 3-го порядка –  $\Sigma_3 = 5$ ; для  $n$ -го порядка –  $\Sigma_n = (n-1) \cdot \Sigma_{n-1} + 1$ .

**Использование бинарного дерева.** Представим полученные решения ЛЗД в виде бинарного дерева. Для ЛЗД первого порядка согласно (6) существует 2 варианта решения (рис. 13) или, если переписать его через функцию передача модуля, одна операция передачи модуля. Т.е. для ЛЗД первого порядка при использовании бинарного дерева ничего не меняется.

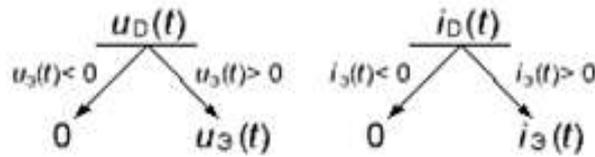


Рис. 13. Решение (6) в виде бинарного дерева

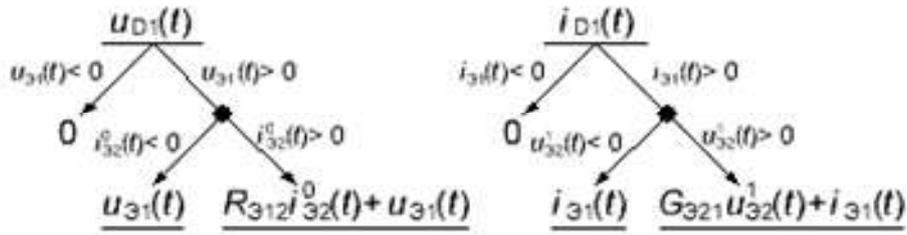


Рис. 14. Решения (10) и (14) в виде бинарного дерева

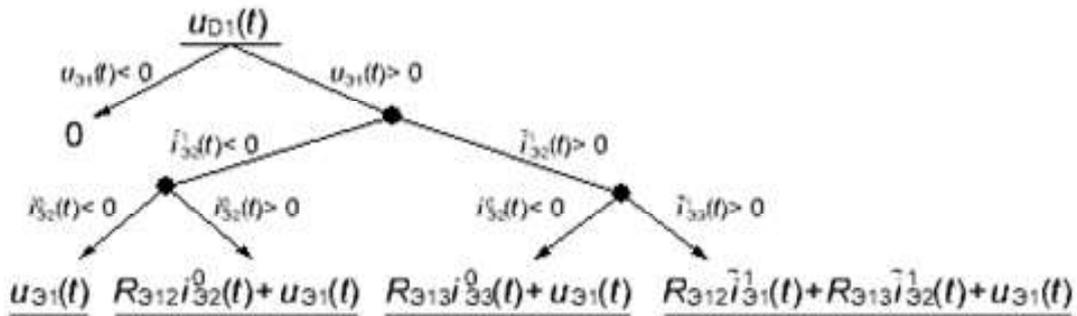


Рис. 15. Решение (6) в виде бинарного дерева для  $u_{D1}(t)$

Для ЛЗД второго порядка согласно (10) и (14) получаем 3 варианта решения (рис. 14). Т.к. решение может быть только одно из этих вариантов, то можно ввести функцию для напряжения и тока соответственно, которая определяет какое из решений использовать, т.е.

$$\begin{cases} f_U(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i \\ f_I(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j \end{cases} \quad (36)$$

Тогда бинарное дерево для напряжения и тока можно (рис. 14) переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = f_U(\lfloor R_{312}i_{32}^0(t) + u_{31}(t) \rfloor, \lfloor u_{31}(t) \rfloor) \\ i_{D1}(t) = f_I(\lfloor G_{312}u_{32}^1(t) + i_{31}(t) \rfloor, \lfloor i_{31}(t) \rfloor) \end{cases} \quad (37)$$

Как видно из (37) мы получаем 2 операции передачи модуля, как и в случае предложенного аналитического метода. Но здесь можно сразу определить решение первой функции передачи модуля, не ища по отдельности элементы матрицы, например, воспользовавшись методом схемных определителей [12], что уменьшит избыточность в отношении лишних операций сложения, умножения и деления.

Для ЛЗД третьего порядка согласно (21) и (27) получаем 5 вариантов решения, которые можно по аналогии с предыдущем случаем переписать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{D1}(t) = f_U \left( \begin{array}{l} \left[ R_{\mathfrak{E}12} \left( \tilde{G}_{\mathfrak{E}12}^1 u_{\mathfrak{E}33}^2(t) + \tilde{i}_{\mathfrak{E}1}^1(t) \right) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \\ \left[ R_{\mathfrak{E}13} \left( \tilde{G}_{\mathfrak{E}21}^1 u_{\mathfrak{E}32}^3(t) + \tilde{i}_{\mathfrak{E}2}^1(t) \right) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \\ \left[ R_{\mathfrak{E}12} \tilde{i}_{\mathfrak{E}1}^1(t) + R_{\mathfrak{E}13} \tilde{i}_{\mathfrak{E}2}^1(t) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \left[ u_{\mathfrak{E}1}(t) \right] \end{array} \right) \\ i_{D1}(t) = f_I \left( \begin{array}{l} \left[ G_{\mathfrak{E}12} \left( \tilde{R}_{\mathfrak{E}12}^1 i_{\mathfrak{E}33}^2(t) + \tilde{u}_{\mathfrak{E}1}^1(t) \right) + i_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \\ \left[ G_{\mathfrak{E}13} \left( \tilde{R}_{\mathfrak{E}21}^1 i_{\mathfrak{E}32}^3(t) + \tilde{u}_{\mathfrak{E}2}^1(t) \right) + i_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \\ \left[ G_{\mathfrak{E}12} \tilde{u}_{\mathfrak{E}1}^1(t) + G_{\mathfrak{E}13} \tilde{u}_{\mathfrak{E}2}^1(t) + i_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \left[ i_{\mathfrak{E}1}(t) \right] \end{array} \right) \end{array} \right.$$

или, если раскрыть первое и второе слагаемые и сократить их,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{D1}(t) = f_U \left( \begin{array}{l} \left[ R_{\mathfrak{E}12} i_{\mathfrak{E}2}^0(t) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \left[ R_{\mathfrak{E}13} i_{\mathfrak{E}3}^0(t) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \\ \left[ R_{\mathfrak{E}12} \tilde{i}_{\mathfrak{E}1}^1(t) + R_{\mathfrak{E}13} \tilde{i}_{\mathfrak{E}2}^1(t) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \left[ u_{\mathfrak{E}1}(t) \right] \end{array} \right) \\ i_{D1}(t) = f_I \left( \begin{array}{l} \left[ G_{\mathfrak{E}12} u_{\mathfrak{E}2}^0(t) + i_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \left[ G_{\mathfrak{E}13} u_{\mathfrak{E}3}^0(t) + i_{\mathfrak{E}1}(t) \right] \\ \left[ G_{\mathfrak{E}12} \tilde{u}_{\mathfrak{E}1}^1(t) + G_{\mathfrak{E}13} \tilde{u}_{\mathfrak{E}2}^1(t) + i_{\mathfrak{E}1}(t) \right], \left[ i_{\mathfrak{E}1}(t) \right] \end{array} \right) \end{array} \right). \quad (38)$$

Т.е. получаем следующее бинарное дерево (рис. 15), являющееся решением (6) для напряжения  $u_{D1}(t)$ . Как видно из (38) мы получаем 4 операции передачи модуля, что меньше, чем в предложенном аналитическом методе. Как и в предыдущем случае, здесь можно сразу определять функции передачи модуля, не делая лишних математических операций, что позволит ещё уменьшить избыточность производимых вычислений.

Как несложно видеть, использование бинарного дерева позволяет получить минимальное количество решений, равное  $\Sigma_n = 2^{n-1}$ , что позволяет значительно (особенно при  $n > 5$ ) сократить количество операций передачи модуля по сравнению с предложенным аналитическим методом (рис. 16). Похожий подход для сокращения количества решений (использование бинарного дерева) предлагали авторы в [1], но, как было сказано выше, в [1] была допущена ошибка в определении токов через идеальные диоды.

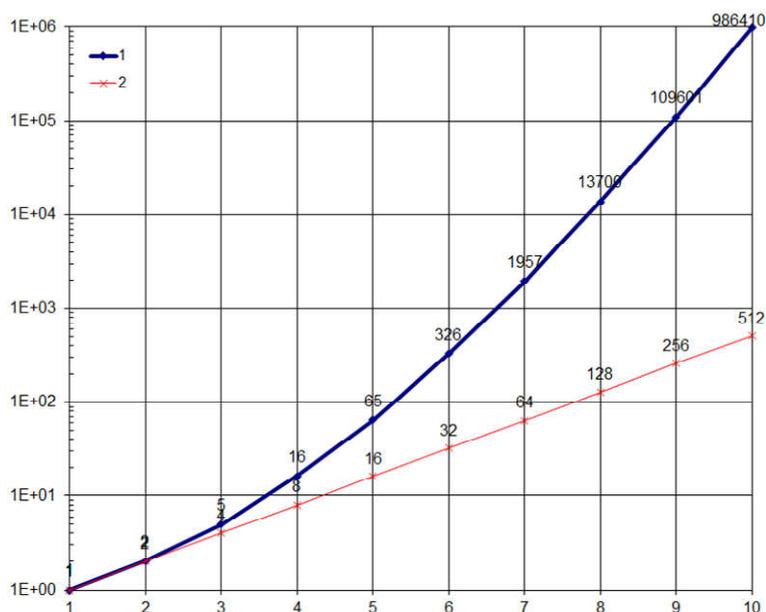


Рис. 16. Количество операций передачи модуля в зависимости от  $n$  в различных методах:  
 1 – предложенный аналитический метод;  
 2 – аналитический метод с использованием бинарного дерева

Исходя из выражений (37) и (38), можно сказать, что данный метод, использующий бинарное дерево, является по сути перебором различных состояний напряжения на диоде или тока через диод. Поэтому главной сложностью этого метода является определение функций перебора для напряжения  $f_U(\dots)$  и тока  $f_I(\dots)$  в конкретной цепи. Задача упрощается, если все элементы матрицы  $\mathbf{R}_\Omega$  положительны. Тогда получаем, что все недиагональные элементы в матрице  $\mathbf{G}_\Omega$  отрицательны. В этом случае каждое новое состояние в (37) и (38) для напряжения будет больше предыдущего, а для тока – меньше. Т.е.  $f_U(\dots) = \max(\dots)$ , а  $f_I(\dots) = \min(\dots)$ . Для более общего случая требуются дополнительные исследования.

Другой интересный вариант использования бинарного дерева – это поиск решения, не используя все варианты решения и перебирая их, а используя путь по бинарному дереву вниз к необходимому решению. В этом случае получаем  $n$  переходов и одно решение (или один переход в случае нулевого решения), что значительно меньше  $2^{n-1}$ . Но для этого варианта необходимо разработать алгоритм перехода по дереву и алгоритм формирования бинарного дерева. В этом случае мы не получаем явно аналитического решения, а получаем численно-аналитическое, т.к. переход по дереву происходит в зависимости от знака численного решения конкретного перехода. Но это позволит нам значительно сократить время расчета.

В данной статье показана лишь возможность использования бинарного дерева для уменьшения избыточности в нахождении аналитического решения ЛЗД на примере линейной задачи дополненности 2-го и 3-го порядков.

### **Выводы**

1. Подробно рассмотрен вывод аналитического решения линейной задачи дополненности на примере системы 1-го, 2-го и 3-го порядков. Предложена более быстрая методика нахождения решения ЛЗД любого порядка.

2. Показана корректность аналитического решения ЛЗД на примерах цепей с двумя и тремя идеальными диодами. Приведена ошибка решения ЛЗД, допущенная авторами в [1, 2, 8, 11]. Показана важность нахождения решения ЛЗД в нелинейной цепи на примере расчета нелинейной резистивной цепи в программы FASTMEAN.

3. Показана избыточность полученного аналитического решения ЛЗД и предложена возможность устранения этой избыточности.

### **Список литературы**

1. Manthe A., Li Z., Shi C.-J.R., and Mayaram K. Symbolic Analysis of Nonlinear Analog Circuits // Proceedings of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE'03). Mar. 2003. P. 11108–11109.

2. Manthe A., Li Z., Shi C.-J.R. Symbolic Analysis of Analog Circuits with Hard Nonlinearity // Proceedings of the Design Automation Conference (DAC'03). June 2-6. 2003.– P. 542–545.

3. van Bokhoven W.M.G. Piecewise-linear modelling and analysis / Eindhoven. University of Technology, 1981.– 145 p.

4. van Bokhoven W.M.G., Leenaerts D.M.W. Explicit Formulas for the Solutions of Piecewise Linear Networks // IEEE Transactions on Circuit and System – I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 46, No. 9, September 1999.– P. 1110–1117.

5. Leenaerts D.M.W., van Bokhoven W.M.G. Piecewise Linear Modeling and Analysis / Kluwer Academic Publishers, 1998.– 208 p.

6. Петрова Е.Г. Методы решения задач дополненности и двухуровневого программирования / Дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.01 – «Системный анализ, управление и обработка информации (в технике, экологии и экономике)».– Иркутск, 2011.– 129 с.

7. URL: <http://www.fastmean.ru>. Официальный сайт программы FASTMEAN.

8. Шушпанов Д.В., Лучанский О.Д. Аналитический метод расчета резистивных цепей с идеальными диодами // Андреев Василий Андреевич: ученый, педагог, организатор: Международный сборник научных трудов «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей». – Вып. 14 / под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2017.– С. 68–87.

9. Смоллов В.Б. Диодные функциональные преобразователи / Л.: Энергия, 1967.– 136 с.

10. Сборник задач по ТОЭ: учеб. пособие для энерг. и приборост. спец. вузов. — 3-е изд., перераб. и доп. / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др.; под ред. Л.А.Бессонова. — М.:Высш. шк., 1988.– 543 с.

11. Шушпанов Д.В. Схема замещения нелинейного двухполюсника без зависимости вольтамперной характеристики от внешней цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов.– Вып. 15 / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск : УлГТУ, 2018.– С. 32–43.

12. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ и диакоптика электрических цепей методом схемных определителей: Учебное пособие / Ульяновск: УлГТУ, 2003.– 228 с.

**Шушпанов Дмитрий Викторович** – к.т.н., доцент кафедры «Теория электрических цепей и связи» Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича.  
E-mail: [dimasf@inbox.ru](mailto:dimasf@inbox.ru).

**Шомин Артём Юрьевич** – магистрант факультета фундаментальной подготовки Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича.

# РАСЧЕТ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ОСНОВЕ СИМВОЛЬНЫХ ФОРМУЛ

С. А. Курганов, И. А. Прокофьев

*Предлагается итерационный алгоритм расчета режима электрических сетей переменного тока при постоянной мощности в узлах на основе символьных формул. Алгоритм не требует решения систем уравнений на каждом итерационном шаге в отличие от метода Ньютона и итерационного метода Гаусса, и при этом обладает значительно лучшей сходимостью, чем метод Зейделя.*

*We propose an algorithm for calculating the mode of electric networks based on symbolic formulas, which does not require solving systems of equations at each iterative step, in contrast to the Newton method, and at the same time has better convergence than the Seidel method.*

Для решения нелинейной задачи анализа установившегося режима электрических сетей наибольшее распространение получил метод Ньютона и его модификации [1]. Этот метод сходится значительно быстрее метода Зейделя и, как правило, быстрее итерационного метода Гаусса (ИМГ) [2]. В то же время метод Ньютона и ИМГ требуют решения систем уравнений на каждом итерационном шаге.

Не требуют многократного решения систем уравнений символьные методы, которые позволяют получить выражения напряжений и токов однократно и использовать их многократно при изменении параметров элементов [3]. Компактные символьные выражения для линейных электрических цепей формируются методом схемных определителей (МСО) [4] с применением многомерного управляемого генератора [5]. При этом напряжения и токи записываются в виде отношения двух схемных определителей – схемно-алгебраических формул (САФ), а символьные выражения получаются путем рекуррентного разложения схемных определителей – выделения параметров элементов.

В настоящей работе символьные выражения предлагается использовать для решения нелинейной задачи расчета установившихся режимов электрических сетей.

**Формирование символьных выражений для напряжений электрических сетей.** Электрическая сеть, содержащая генератор ЭДС  $\underline{E}$ , комплексные сопротивления, генераторные и нагрузочные узлы с заданными мощностями  $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \dots, \underline{S}_k, \dots, \underline{S}_n$  представлена на рис. 1. Многополюсник содержит комплексные сопротивления и проводимости.

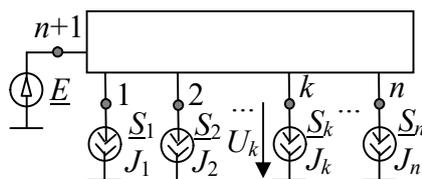


Рис. 1. Общий вид электрической сети

САФ для напряжения  $k$ -го узла при известных нагрузочных и генераторных токах  $\underline{J}_1, \underline{J}_2, \dots, \underline{J}_n$  в соответствии с МСО имеет вид

$$\underline{U}_k = \left| \begin{array}{c} n+1 \\ \hline \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \end{array} \right| \Bigg/ \left| \begin{array}{c} n+1 \\ \hline \text{---} \end{array} \right|, \quad (1)$$

где  $|\cdot|$  – схемный определитель соответствующей схемы, на которой укрупненной заштрихованной стрелкой показан нуллятор.

В (1) числитель получен из схемы на рис. 1 путем замены приемника напряжения  $\underline{U}_k$  нуллатором, а независимых источников – многомерным источником, управляемым нуллатором. Параметры управляемых источников равны параметрам соответствующих независимых источников. Знаменатель получен также из схемы на рис. 1 путем приравнивания к нулю параметров всех независимых источников. Формирование символьного выражения на основе (1) выполняется путем рекуррентного выделения параметров из схемных определителей числителя и знаменателя. В результате получается символьное дробно-рациональное выражение узлового напряжения

$$U_k = \frac{A(p, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{J}, E)}{B(p, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})}, \quad (2)$$

где  $A$ ,  $B$  – рациональные выражения числителя и знаменателя;  $p=j\omega$  – комплексная частота;  $j$  – мнимая единица;  $Z$ ,  $Y$ ,  $J$  – векторы сопротивлений, проводимостей и токов источников электрической сети.

### **Итерационный алгоритм на основе символьных выражений.**

**А.** Получить с помощью САФ (1) символьные выражения вида (2) для узловых напряжений  $\underline{U}_k$ , здесь и далее  $k = 1, \dots, n$  (рис. 1), при этом токи  $\underline{J}_k$  считаются известными.

**Б.** Задать нулевые приближения для узловых напряжений  $\underline{U}_k^v$ , где  $v$  – номер итерации. Здесь  $v = 0$ . Например,  $\underline{U}_k^0 = \underline{E}$ .

**В.** Рассчитать токи источников на шаге  $v$  по формуле

$$J_k^v = \underline{S}_k^* / \underline{U}_k^{v*},$$

где  $*$  – знак сопряженной комплексной переменной.

**Г.** Номер итерации  $v = v + 1$ . Рассчитать по формуле (2) узловые напряжения  $\underline{U}_k^v$ .

**Д.** Рассчитать мощность узлов на шаге  $v$ :

$$S_k^v = \underline{U}_k^v J_k^{v*}.$$

**Е.** Если максимальная относительная невязка мощности меньше заданной невязки  $\xi_3$ :

$$\xi = \text{Max} \left| \frac{S_k - S_k^v}{S_k} \right| \cdot 100\% < \xi_3,$$

то расчет закончен, иначе перейти к п. **В**.

Сходимость алгоритма такая же, как и при использовании итерационного метода Гаусса, поскольку также выполняется расчет линейной  $Z$ - или  $Y$ -части схемы, но символьным методом. Преимущество алгоритма заключается в уменьшении трудоемкости расчета, так как не требуется решать систему уравнений на каждом итерационном шаге. Для формирования символьных выражений можно использовать программу CirSym символьного анализа линейных электрических цепей, разработанную В.В. Филаретовым [6].

**Пример.** Исходная схема сети дана на рис. 2. Параметры элементов: ЭДС  $\underline{E} = 115$  кВ; сопротивления (в омах):  $Z_1 = 5 + j10$ ;  $Z_2 = 10 + j20$ ;  $Z_3 = 2 + j5$ ;  $Z_4 = 4 + j6$ ;  $Z_5 = 3 + j6$ ;  $Z_6 = 2 + j4$ ;  $Z_7 = 1 + j2$ ; мощности в узлах

(В·А):  $\underline{S}_1 = 8.423114503 \cdot 10^7 + j4.134675119 \cdot 10^7$ ;  $\underline{S}_2 = 4.886921800 \cdot 10^7 + j2.479725362 \cdot 10^7$ ;  $\underline{S}_3 = 1.974728766 \cdot 10^7 + j1.273129425 \cdot 10^7$ . Требуется найти узловые напряжения  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$  и  $\underline{U}_3$  с погрешностью не более 1 %.

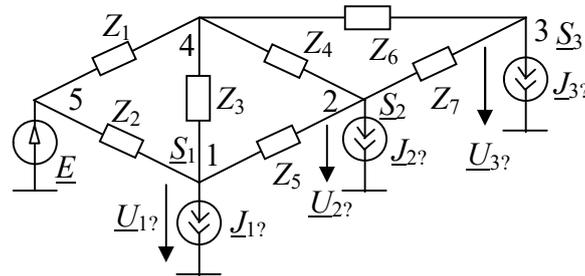
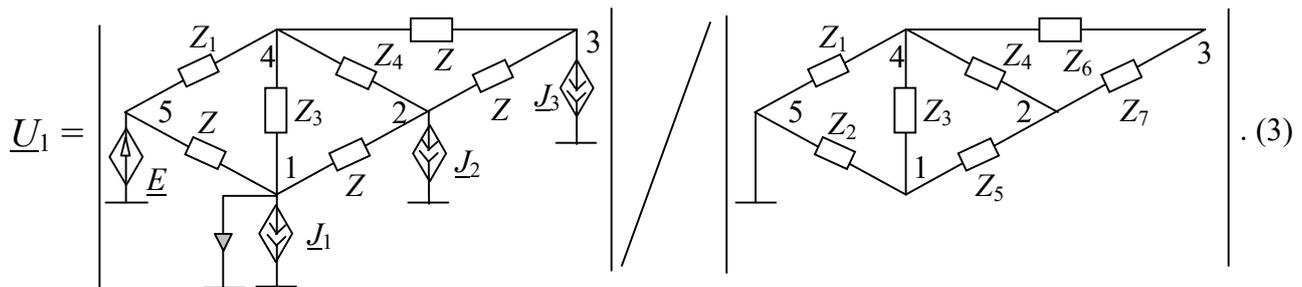


Рис. 2. Электрическая сеть: переменные со знаком вопроса неизвестны

По п. А алгоритма находим символьные выражения для искомым напряжений. САФ для напряжения узла 1 имеет вид



По программе CirSym получаются символьные выражения узловых напряжений:

$$\underline{U}_1 = \underline{E}((Z_1 + Z_2)((Z_3 + Z_5)(Z_4 + Z_6 + Z_7) + Z_4(Z_6 + Z_7)) + Z_3((Z_6 + Z_7)(Z_4 + Z_5) + Z_4Z_5)) + Z_2(-\underline{J}_1((Z_6 + Z_7)((Z_4 + Z_5)(Z_1 + Z_3) + Z_1Z_3) + Z_4(Z_1(Z_3 + Z_5) + Z_3Z_5)) - Z_1\underline{J}_2(Z_3 + Z_5)(Z_4 + Z_6 + Z_7) - \underline{J}_2(Z_1 + Z_3)Z_4(Z_6 + Z_7) + Z_4(-Z_3\underline{J}_3(Z_1 + Z_6) - Z_1\underline{J}_3(Z_5 + Z_7 + Z_6)) - Z_1\underline{J}_3(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_5))/D;$$

$$\underline{U}_2 = \underline{E}((Z_1 + Z_2)((Z_3 + Z_5)(Z_4 + Z_6 + Z_7) + Z_4(Z_6 + Z_7)) + Z_3((Z_6 + Z_7)(Z_4 + Z_5) + Z_4Z_5)) + Z_2(-Z_1\underline{J}_1(Z_3 + Z_5)(Z_4 + Z_6 + Z_7) - \underline{J}_1(Z_1 + Z_3)Z_4(Z_6 + Z_7)) - \underline{J}_2((Z_6 + Z_7)(Z_1((Z_3 + Z_4)(Z_2 + Z_5) + Z_2Z_5) + Z_4(Z_2(Z_3 + Z_5) + Z_3Z_5)) + Z_1Z_4(Z_2(Z_3 + Z_5) + Z_3Z_5)) + Z_4(-Z_3(Z_1 + Z_6)\underline{J}_3(Z_2 + Z_5) - Z_5\underline{J}_3(Z_1(Z_2 + Z_6) + Z_2Z_6) - Z_1Z_2\underline{J}_3(Z_6 + Z_7)) - Z_1(Z_2(Z_3 + Z_5) + Z_3Z_5)\underline{J}_3(Z_6 + Z_7))/D;$$

$$\underline{U}_3 = \underline{E}((Z_1 + Z_2)((Z_3 + Z_5)(Z_4 + Z_6 + Z_7) + Z_4(Z_6 + Z_7)) + Z_3((Z_6 + Z_7)(Z_4 + Z_5) + Z_4Z_5)) + Z_2(Z_4(-Z_3\underline{J}_1(Z_1 + Z_6) - Z_1\underline{J}_1(Z_5 + Z_7 + Z_6)) - Z_1\underline{J}_1(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_5)) + Z_4(-Z_3(Z_2 +$$

$$\begin{aligned}
& +Z_5)J_2(Z_1+Z_6)-Z_5J_2(Z_1(Z_2+Z_6)+Z_2Z_6)-Z_1Z_2J_2(Z_6+Z_7))-Z_1(Z_2(Z_3+Z_5)+ \\
& +Z_3Z_5)J_2(Z_6+Z_7)-J_3(Z_1(Z_2((Z_3+Z_5)(Z_4+Z_6+Z_7)+Z_4(Z_6+Z_7)))+ \\
& +Z_3((Z_4+Z_6)(Z_5+Z_7)+Z_5Z_7)+Z_6(Z_4(Z_5+Z_7)+Z_5Z_7))+Z_6(Z_2((Z_3+Z_5)(Z_4+Z_7)+ \\
& +Z_4Z_7)+Z_3(Z_4(Z_5+Z_7)+Z_5Z_7))),
\end{aligned}$$

где  $D=(Z_1+Z_2)((Z_3+Z_5)(Z_4+Z_6+Z_7)+Z_4(Z_6+Z_7))+Z_3((Z_6+Z_7)(Z_4+Z_5)+Z_4Z_5)$ .

Учитывая, что сопротивления сети и ЭДС постоянные, получаем символично-численные выражения для узловых напряжений (в вольтах), которые содержат только 3 переменных – токи источников (в амперах):

$$\underline{U}_1 = (-0.1237318364 \cdot 10^{-3} + j0.1684062802 \cdot 10^{-4})(-9.12525000 \cdot 10^8 - j1.24200000 \cdot 10^8 + (10. + j20.)[(3145. + j450.)\underline{J}_1 + (2653. + j351.)\underline{J}_2 + (2567. + j339.)\underline{J}_3]);$$

$$\underline{U}_2 = (-0.1237318364 \cdot 10^{-3} + j0.1684062802 \cdot 10^{-4})(-9.12525000 \cdot 10^8 - j1.24200000 \cdot 10^8 + (19510. + j56570.)\underline{J}_1 + (25858. + j73631.)\underline{J}_2 + (23612. + j67909.)\underline{J}_3);$$

$$\underline{U}_3 = (-0.1237318364 \cdot 10^{-3} + j0.1684062802 \cdot 10^{-4})(-9.12525000 \cdot 10^8 - j1.24200000 \cdot 10^8 + (18890. + j54730.)\underline{J}_1 + (23612. + j67909.)\underline{J}_2 + (26068. + j75701.)\underline{J}_3). \quad (4)$$

В п. Б алгоритма задаем нулевые приближения для напряжений:  $\underline{U}_1^0 = \underline{U}_2^0 = \underline{U}_3^0 = 115$  кВ. По п. В рассчитаем нулевые приближения для токов источников (в амперах):  $\underline{J}_1 = 732.4447394 - j359.5369669$ ;  $\underline{J}_2 = 424.9497217 - j215.6282923$ ;  $\underline{J}_3 = 171.7155449 - j110.7069065$ , а в п. Г – по формулам (4) узловые напряжения для итерации  $v = 1$ , которые приведены в строке 2 табл. 1.

Таблица 1. Итерационный расчет узловых напряжений по алгоритму на основе символьных выражений

| № итерации      | $\underline{U}_1$                              | $\underline{U}_2$                              | $\underline{U}_3$                              | Невязка $\xi$ , % |
|-----------------|--|--|--|-------------------|
| 1               | $1.051284196 \cdot 10^5 - 7280.793924 \cdot j$ | $1.047942630 \cdot 10^5 - 7329.352583 \cdot j$ | $1.050779286 \cdot 10^5 - 7115.165270 \cdot j$ | 10.92599188       |
| 2               | $1.036925962 \cdot 10^5 - 7189.075875 \cdot j$ | $1.033216021 \cdot 10^5 - 7218.602983 \cdot j$ | $1.036478410 \cdot 10^5 - 7006.790928 \cdot j$ | 1.405821775       |
| 3               | $1.035346714 \cdot 10^5 - 7289.345050 \cdot j$ | $1.031582527 \cdot 10^5 - 7319.720061 \cdot j$ | $1.034891652 \cdot 10^5 - 7104.898830 \cdot j$ | 0.185485481       |
| 9 верных знаков | $1.034997740 \cdot 10^5 - 7288.907778 \cdot j$ | $1.031210693 \cdot 10^5 - 7318.683667 \cdot j$ | $1.034519627 \cdot 10^5 - 7103.698421 \cdot j$ | —                 |

Для достижения заданной точности в 1% достаточно 3 итерации, при этом невязка не превышает 0,2% (строка 4, столбец 5 в табл. 1). Для сравнения в строке 5 приведены значения напряжения с 9-ю верными знаками. Как видно, рассчитанные с помощью предлагаемого алгоритма напряжения содержат 3...4 верных знака.

Результаты расчета по *итерационному методу Гаусса* совпадают с результатами алгоритма на основе символьных выражений. По *методу Ньютона* для получения тех же 3...4 знаков также достаточно 3 итераций (табл. 2).

Таблица 2. Итерационный расчет узловых напряжений по методу Ньютона

| № итерации | $\underline{U}_1$                              | $\underline{U}_2$                              | $\underline{U}_3$                              |
|------------|--|--|--|
| 1          | $1.049177961 \cdot 10^5 - 6651.366297 \cdot j$ | $1.045814999 \cdot 10^5 - 6674.384594 \cdot j$ | $1.048768725 \cdot 10^5 - 6497.129743 \cdot j$ |
| 2          | $1.035309741 \cdot 10^5 - 7279.290865 \cdot j$ | $1.031545240 \cdot 10^5 - 7308.973201 \cdot j$ | $1.034856577 \cdot 10^5 - 7095.215759 \cdot j$ |
| 3          | $1.035067785 \cdot 10^5 - 7289.492843 \cdot j$ | $1.031296049 \cdot 10^5 - 7319.545606 \cdot j$ | $1.034613466 \cdot 10^5 - 7104.715176 \cdot j$ |

По методу Зейделя расчет сходится значительно медленнее, чтобы получить 2...3 верных знака, потребовалось 55 итераций (табл. 3).

Таблица 3. Итерационный расчет узловых напряжений по методу Зейделя

| Номер итерации | $\underline{U}_1$                              | $\underline{U}_2$                              | $\underline{U}_3$                              |
|----------------|--|--|--|
| 1              | $1.133423985 \cdot 10^5 - 1372.299483 \cdot j$ | $1.141264369 \cdot 10^5 - 644.7831586 \cdot j$ | $1.141555383 \cdot 10^5 - 585.0048936 \cdot j$ |
| 2              | $1.124708899 \cdot 10^5 - 1973.547184 \cdot j$ | $1.132462071 \cdot 10^5 - 1261.893704 \cdot j$ | $1.132371439 \cdot 10^5 - 1238.029407 \cdot j$ |
| 3              | $1.117281165 \cdot 10^5 - 2478.954735 \cdot j$ | $1.123843039 \cdot 10^5 - 1861.347670 \cdot j$ | $1.124039488 \cdot 10^5 - 1816.971193 \cdot j$ |
| ...            | ...  | ...  | ...  |
| 55             | $1.035883021 \cdot 10^5 - 7262.818958 \cdot j$ | $1.032213909 \cdot 10^5 - 7289.634394 \cdot j$ | $1.035500975 \cdot 10^5 - 7075.664538 \cdot j$ |

**Вывод.** Предложенный символьный алгоритм расчета режима электрических сетей при постоянных мощностях в узлах обладает скоростью сходимости, приблизительно равной сходимости метода Ньютона и итерационного метода Гаусса, в тоже время не требует решения систем линейных уравнений на каждом итерационном шаге.

### Список литературы

1. Кононов Ю.Г. Исследование эффективности методов расчета установившихся режимов разомкнутых распределительных электрических сетей // Вестник Северокавказского государственного технического университета.– 2005.– № 1.– С. 55–60.

2. Идельчик В.И. Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем.– М.: Энергоатомиздат.– 1988.– 288 с.

3. Дмитришин Р.В. Оптимизация электронных схем на ЭВМ.– К.: Техника, 1980.– 224 с.

4. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.

5. Filaretov V. V., Gorshkov K. S., Kurganov S. A., Nedorezov M.V. Generalized Parameter Extraction Method for Symbolic Analysis of Analog Circuits Containing Pathological Elements // *Lect. Notes Electrical Eng.*, vol. 479 (Pathological Elements in Analog Circuit Design), pp. 31–70, Mar. 2018.

6. Филаретов В. В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: междунар. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – Вып. 10. – С. 158–171.

**Курганов Сергей Александрович** – д.т.н, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. Тел. 8-8422-77-81-05. E-mail: sak@ulstu.ru.

**Прокофьев Иван Алексеевич** – магистрант Энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета. E-mail: prokofev.ivan.2015@yandex.ru.

# ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

## ПОЛИНОМ С ПАМЯТЬЮ, КАК ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ПРЕДКОМПЕНСАТОРОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КАНАЛОВ СВЯЗИ

Е. Б. Соловьева, А. Д. Шеллер

*Рассматривается полиномиальная модель предкомпенсаторов для борьбы с нелинейными искажениями сигналов в каналах связи. Описывается методика получения полинома с памятью на основе ряда Вольтерры, отмечаются достоинства этой модели, приводятся структуры обучения адаптивных предкомпенсаторов.*

*The polynomial model of precompensators for suppressing nonlinear signal distortion in communication channels is considered. The technique of obtaining a polynomial with memory based on the Volterra series is described, the advantages of this model are emphasized, the learning structures of adaptive precompensators are represented.*

**Введение.** Нелинейные искажения – одна из причин ухудшения работы беспроводных каналов связи (КС). Источник нелинейных искажений – усилитель мощности (УМ), присутствующий в телекоммуникационных системах. При действии широкополосных сигналов в КС и в режиме работы УМ с высоким коэффициентом полезного действия (КПД) характеристики усилителя близки к насыщению, становятся нелинейными и искажают сигнал [1–3].

Для достижения высокого качества передачи сигналов разработаны методы линеаризации характеристик УМ, среди которых перспективным является метод предискажения сигналов. Данный метод обеспечивает: 1) широкополосность системы усиления; 2) высокую степень подавления нелинейных искажений, поскольку реализует адаптивную обработку сигналов в цифровой области; 3) учет старения УМ и влияния характеристик окружающей среды на работу усилителя [4].

Рассматриваемая система усиления основана на введении предискажений в информационный сигнал, чтобы обработка предискаженного сигнала в УМ вела к компенсации искажений усилителя. Каскадное соединение Предысказателя и УМ образует систему с линейной характеристикой [1]–[4] (рис. 1).

Для реализации предкомпенсатора (предысказателя, digital predistorter, DPD) важна простота его математической модели, поскольку большое число сложных операций, в частности, умножений, ведет к росту затрат, замедляющих обработку сигналов в реальном времени; к аппаратной сложности (росту числа микропроцессоров, программируемых интегральных схем) и, как следствие, к увеличению стоимости предкомпенсатора. Такой DPD проигрывает по сравнению с DPD-аналогами и становится не востребованным на рынке технических систем.

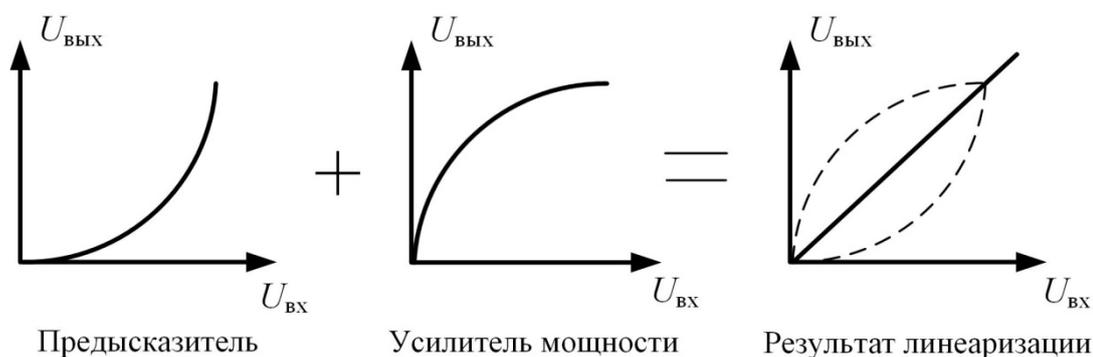


Рис 1. Передаточные характеристики системы усиления с предискажением

Простой математической моделью DPD является полином с памятью, который формируется из комплексной формы ряда Вольтерры. Получим полином с памятью, предварительно описав переход от традиционной формы ряда Вольтерры к его дискретному комплексному представлению.

**Дискретная комплексная форма ряда Вольтерры.** Пусть оператор  $H$  нелинейной динамической системы устанавливает однозначное соответствие между множествами входных  $x_M(t)$  и выходных  $y_M(t)$  сигналов, где  $t$  – переменная непрерывного времени. Для аппроксимации оператора  $H$  можно использовать усеченный ряд Вольтерры [5]:

$$y_M(t) = \sum_{k=1}^P y_{M,k}(t) = \sum_{k=1}^P H_k[x_M(t)],$$

где  $y_{M,k}(t)$  – составляющая степени  $k$  выходного сигнала,  $H_k[x_M(t)]$  – функционал Вольтерры  $k$ -й степени – многомерный интеграл,

$$H_k[x_M(t)] = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \prod_{r=1}^k x_M(t - \tau_r) d\tau_r,$$

$h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$  –  $k$ -мерная импульсная характеристика (ИХ, ядро Вольтерры порядка  $k$ ).

Пусть входным сигналом динамической системы является амплитудно-фазовое модулированное колебание с несущей частотой  $\omega_0$ :

$$x_M(t) = |\dot{x}(t)| \cos(\omega_0 t + \arg(\dot{x}(t))) = (\dot{x}(t)e^{j\omega_0 t} + \dot{x}^*(t)e^{-j\omega_0 t}) / 2,$$

где  $\dot{x}(t)$  – низкочастотная комплексная огибающая входного сигнала,  $\bullet$  – знак комплексности,  $*$  – знак комплексного сопряжения.

При воздействии  $x_M(t)$  выходной сигнал усеченного ряда (с членами нечетных степеней) на несущей частоте  $\omega_0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} y_M(t) = & e^{j\omega_0 t} \sum_{k=1}^P \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \dot{h}_{2k-1}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_{2k-1}) \dot{x}(t - \tau_1) \dot{x}(t - \tau_2) \dots \\ & \dots \dot{x}(t - \tau_k) \dot{x}^*(t - \tau_{k+1}) \dots \dot{x}^*(t - \tau_{2k-1}) \prod_{r=1}^{2k-1} d\tau_r + \\ & + e^{-j\omega_0 t} \sum_{k=1}^P \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \dot{h}_{2k-1}^*(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_{2k-1}) \dot{x}^*(t - \tau_1) \dot{x}^*(t - \tau_2) \dots \\ & \dots \dot{x}^*(t - \tau_k) \dot{x}(t - \tau_{k+1}) \dots \dot{x}(t - \tau_{2k-1}) \prod_{r=1}^{2k-1} d\tau_r, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & \dot{h}_{2k-1}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_{2k-1}) = \\ & = \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} h_{2k-1}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_{2k-1}) \times \\ & \times e^{-j\omega_0 \tau_1} e^{-j\omega_0 \tau_2} \dots e^{-j\omega_0 \tau_k} e^{j\omega_0 \tau_{k+1}} \dots e^{j\omega_0 \tau_{2k-1}}. \end{aligned}$$

Многомерной комплексной ИХ  $\dot{h}_{2k-1}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_{2k-1})$  соответствует смещенная на частоту  $\omega_0$  многомерная частотная характеристика  $H_{2k-1}(\omega_0 + \omega_1, \omega_0 + \omega_2, \dots, \omega_0 + \omega_k, -\omega_0 + \omega_{k+1}, \dots, -\omega_0 + \omega_{2k-1})$ .

Модулированный выходной сигнал с несущей частотой  $\omega_0$  содержит комплексную низкочастотную составляющую:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & \sum_{k=1}^P \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \dot{h}_{2k-1}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_{2k-1}) \dot{x}(t - \tau_1) \dot{x}(t - \tau_2) \dots \\ & \dots \dot{x}(t - \tau_k) \dot{x}^*(t - \tau_{k+1}) \dots \dot{x}^*(t - \tau_{2k-1}) \prod_{r=1}^{2k-1} d\tau_r. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее будем рассматривать лишь низкочастотные комплексные составляющие сигналов, исключая процессы модуляции, смещающие спектры сигналов в высокочастотную область, и опуская знак комплексности у сигналов (для простоты их представления).

Из аналоговой области перейдем в дискретную, где работа с низкочастотными сигналами удобна вследствие низкой частоты их дискретизации (согласно теореме Котельникова или Найквиста) [5]. Из выражения (1) формируем дискретную низкочастотную модель Вольтерры [5]:

$$\begin{aligned} y(n) = & \sum_{k=1}^P \sum_{i_1=0}^{I_1} \sum_{i_2=0}^{I_2} \dots \sum_{i_k=0}^{I_k} \sum_{i_{k+1}=0}^{I_{k+1}} \dots \sum_{i_{2k-1}=0}^{I_{2k-1}} h_{2k-1}(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{2k-1}) \times \\ & \times x(n - i_1) x(n - i_2) \dots x(n - i_k) x^*(n - i_{k+1}) \dots x^*(n - i_{2k-1}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $n$  – нормированное дискретное время.

**Полином с памятью.** Получим полином с памятью, для наглядности выполняя преобразования, например, первых трех членов модели Вольтерры (2), имеющих вид:

$$\text{при } k=1 \quad y(n) = \sum_{i_1=0}^{I_1} h_1(i_1) x(n - i_1), \quad (3)$$

$$\text{при } k=2 \quad y(n) = \sum_{i_1=0}^{I_1} \sum_{i_2=0}^{I_2} \sum_{i_3=0}^{I_3} h_3(i_1, i_2, i_3) x(n - i_1) x(n - i_2) x^*(n - i_3), \quad (4)$$

при  $k=3$

$$y(n) = \sum_{i_1=0}^{I_1} \sum_{i_2=0}^{I_2} \sum_{i_3=0}^{I_3} \sum_{i_4=0}^{I_4} \sum_{i_5=0}^{I_5} h_5(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) x(n - i_1) x(n - i_2) x(n - i_3) x^*(n - i_4) x^*(n - i_5). \quad (5)$$

Преобразуем выражения (3)–(5) с учетом равенств  $i_1 = i_2 = \dots = i_5 = i$ ,  $I_1 = I_2 = \dots = I_5 = I$ , а также следующего факта: произведение комплексно-

сопряженных переменных равно квадрату их модуля. В результате запишем:

$$\text{при } k=1 \quad y(n) = \sum_{i=0}^I h_1(i)x(n-i),$$

$$\text{при } k=2 \quad y(n) = \sum_{i=0}^I h_3(i)x(n-i)x(n-i)x^*(n-i) = \sum_{i=0}^I h_3(i)|x(n-i)|^2 x(n-i),$$

$$\begin{aligned} \text{при } k=3 \quad y(n) &= \sum_{i=0}^I h_5(i)x(n-i)x(n-i)x(n-i)x^*(n-i)x^*(n-i) = \\ &= \sum_{i=0}^I h_5(i)|x(n-i)|^4 x(n-i). \end{aligned}$$

Обобщая описанный подход на выражение модели Вольтерры (2), получим полином с памятью в виде

$$y(n) = \sum_{k=1}^P \sum_{i=0}^I h_{2k-1}(i)|x(n-i)|^{2(k-1)} x(n-i),$$

или в другой записи:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{(L-1)/2} \sum_{i=0}^M a_{2k+1,i} |x(n-i)|^{2k} x(n-i), \quad (6)$$

где  $L$  – нечетный порядок полинома,  $M$  – длина памяти,  $a_{2k+1,i}$  – параметр модели.

Структурная схема полинома с памятью (6) изображена на рис. 2. Блок  $z^{-1}$  означает задержку сигнала во времени на один такт. Параметры модели (6) DPD находятся с помощью адаптивной прямой или обратной структуры обучения предкомпенсатора [6].

**Прямая и обратная структуры адаптивного предсказания.** Прямая структура линеаризации УМ с адаптивным предсказанием показана на рис. 3. Сигналы  $x(n)$  и  $y(n)$  – входной и выходной сигналы структуры соответственно. Для оценки степени нелинейных искажений используется сигнал ошибки  $e(n) = x(n) - y(n)$ . Сигнал  $z(n)$  – выходной сигнал предкомпенсатора.

Обратная структура обучения предкомпенсатора изображена на рис. 4. Для оценки степени искажений используется сигнал ошибки  $e(n) = z(n) - \tilde{z}(n)$ , где  $z(n)$ ,  $\tilde{z}(n)$  – выходные сигналы DPD из прямой и обратной линий преобразований соответственно.

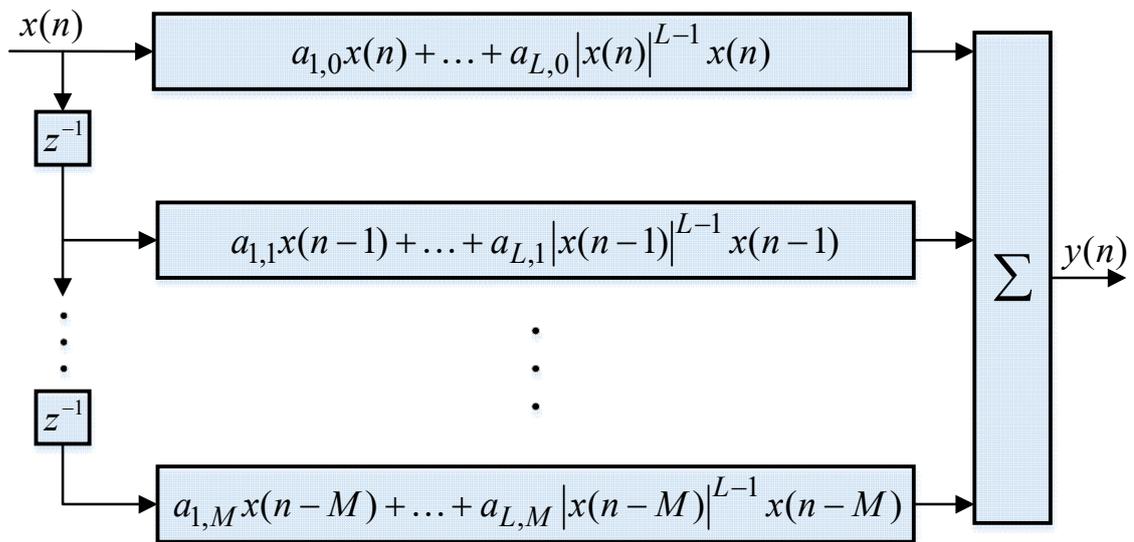


Рис. 2. Структурная схема полинома с памятью

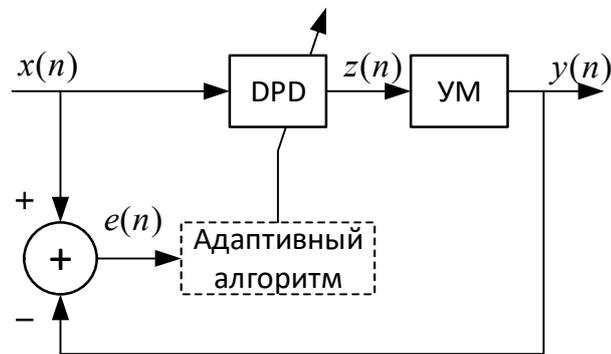


Рис. 3. Прямая структура обучения предкомпенсатора

Отметим, что на практике обе структуры обучения DPD дают одинаковую точность линейризации характеристик УМ, однако обратная структура обеспечивает более быструю сходимость в процессе адаптации [6].

**Вывод.** При решении задачи компенсации нелинейных искажений сигналов в каналах связи, в задачах многомерной оптимизации, возникает противоречие между высокой точностью обработки сигналов и простотой модели. Рассмотренная модель предкомпенсатора – полином с памятью, проста для реализации, но может не обеспечить требуемую точность. В этом случае используется полином с памятью для синтеза кусочно-полиномиальных моделей либо каскадных структур DPD, где простая модель – часть более сложной модели с высокой точностью.

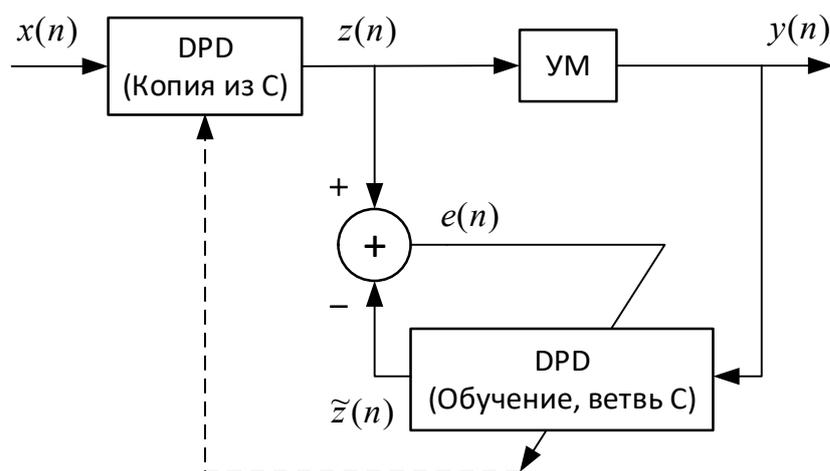


Рис. 4. Обратная структура обучения предкомпенсатора

### Список литературы

1. Ghannouchi F.M., Hammi O., Helaoui M. Behavioral Modeling and Predistortion of Wideband Wireless Transmitters. – U.K. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2015.
2. Wood J. Behavioral Modeling and Linearization of RF Power Amplifiers. – Norwood: Artech House, 2014.
3. Handbook of RF and Microwave Power Amplifiers / Edited by J. L. B. Walker. – New York: Cambridge University Press, 2012.
4. Соловьева Е.Б. Методы линейризации характеристик усилителей мощности // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2015. № 9. С.41-47.
5. Бычков Ю.А., Соловьева Е.Б., Щербаков С.В. Непрерывные и дискретные нелинейные модели динамических систем. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
6. Gan L., Abd-Elrady E. Digital Predistortion of Memory Polynomial Systems Using Direct and Indirect Learning Architectures // Proceedings of the IASTED International Conference Signal and Image Processing (SIP 2009). – USA, Hawaii, Honolulu, 17–19 August, 2009, P.166–171.

**Соловьева Елена Борисовна** – д.т.н., профессор, зав. кафедрой ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
Тел.: (812) 346–17–96, selenab@hotmail.ru

**Шеллер Анастасия Дмитриевна** – студентка, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
Тел.: (812) 346–17–96, nastya-sheller@mail.ru

## ПЕРЕДАЧА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СИГНАЛА СО СКОРОСТЬЮ ВЫШЕ СКОРОСТИ СВЕТА

Т. С. Юрова, А. А. Шубник, Д. Р. Рябов, Д. Новокрещенов

Подтверждено явление распространения сигнала со скоростью выше скорости света, чему дано теоретическое обоснование. Показано, что 1) дальнейшее увеличение отрицательной групповой задержки, увеличивающей скорость передачи сигнала, возможно путем добавления каскадов; 2) четверть периода сигнала на входе определяет пороговый уровень числа каскадов, который будет ограничивать задержку.

The phenomenon of signal propagation at a speed higher than the speed of light is confirmed, which is theoretically justified. It is shown that 1) a further increase in the negative group delay, which increases the speed of signal transmission, is possible by adding cascades; 2) a quarter of the signal period at the input determines the threshold level of the number of cascades that will limit the delay.

Как известно, для волны, распространяющейся в области аномальной дисперсии, находящейся внутри полосы поглощения, групповая скорость может превышать скорость света в вакууме или даже быть отрицательной. В сосредоточенных системах, таких как электронные схемы, сверхсветовая групповая скорость вызвана так называемой отрицательной групповой задержкой. Подобный эффект является важной особенностью электрических цепей, так как он широко используется для устранения искажений формы электрического сигнала. Целью данной работы является экспериментальное наблюдение эффекта передачи электрического сигнала со скоростью выше скорости света.

**Отрицательные задержки и сверхсветовое распространение.**  
Групповая скорость в дисперсивной среде определяется как:

$$v_g^{-1} = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}, \quad (1)$$

где волновое число  $k(\omega)$  является функцией частоты. Эта скорость соответствует скорости распространения огибающего сигнала, спектр которого ограничен внутри короткого интервала, содержащего  $\omega_0$ . Аналогично, групповая задержка определяется как:

$$t_d = \left. \frac{d\varphi}{d\omega} \right|_{\omega_0}, \quad (2)$$

где  $\varphi(\omega)$  представляет собой зависящий от частоты фазовый сдвиг. Это соответствует временному сдвигу огибающей ограниченного сигнала, проходящего через систему. Для среды длины  $L$ , фазовый сдвиг определяется как  $\varphi(\omega) = -k(\omega)L$  и получаем соответственно:

$$t_d = \frac{d(kL)}{d\omega} = \frac{dk}{d\omega} L = v_g^{-1} L. \quad (3)$$

Сосредоточенная система – это такая система, размеры которой намного меньше, чем длина волны  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . Пренебрегая эффектами распространения, поведение системы может быть описано набором обыкновенных дифференциальных уравнений (производные только по времени, но не по пространству).

Для того чтобы понять связь между отрицательной групповой задержкой (ОГЗ) и сверхсветовым распространением, рассмотрим «путь» в вакууме длины  $L$  и сосредоточенную систему (обеспечивает задержку  $t_d$ ), которая располагается в конце данного «пути». Итого, полное время, затрачиваемое сигналом для прохождения через систему:

$$t_{total} = \frac{L}{c} + t_d. \quad (4)$$

Соответствующая скорость  $v_g = L/t_{total}$ :

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} + \frac{t_d}{L}. \quad (5)$$

Если  $t_d > 0$  (положительная задержка), то ничего необычного не происходит, групповая скорость меньше скорости света  $c$ . Если  $t_d < 0$ , то рассматриваются 2 случая. Если  $(-t_d) < L/c$ , то после подстановки убеждаемся, что скорость  $v_g > c$  (сверхсветовое распространение в узком смысле). В том случае, когда  $(-t_d) > L/c$  скорость  $v_g$  становится отрицательной [1, 2]. Важно подчеркнуть, что возникновение ОГЗ не нарушает принципа причинности [3]. Однако, как отмечено в [4], феномен ОГЗ может стать причиной неверных интерпретаций.

Чтобы тоньше понять эффект отрицательной групповой задержки, рассмотрим следующий пример: по телефонной линии разговаривают три человека: Анна (А), Василий (В) и Светлана (С) (рис. 1). Сигналы посылает Анна. Светлана получает сигнал всегда раньше Василия, т.е. она всегда может предсказать импульс, который придет Василию. Таким образом, может создаться ощущение передачи информации в прошлое. Но, в реальности, сигнал исходит не от Василия, как может показаться, а от Анны. Василий никак не может повлиять на сигнал, к нему приходящий, т.е. он просто наблюдатель. На самом деле, сигнал исходит от Анны, и нам необходимо всегда учитывать эту аналогию при рассмотрении эффекта отрицательной групповой задержки.

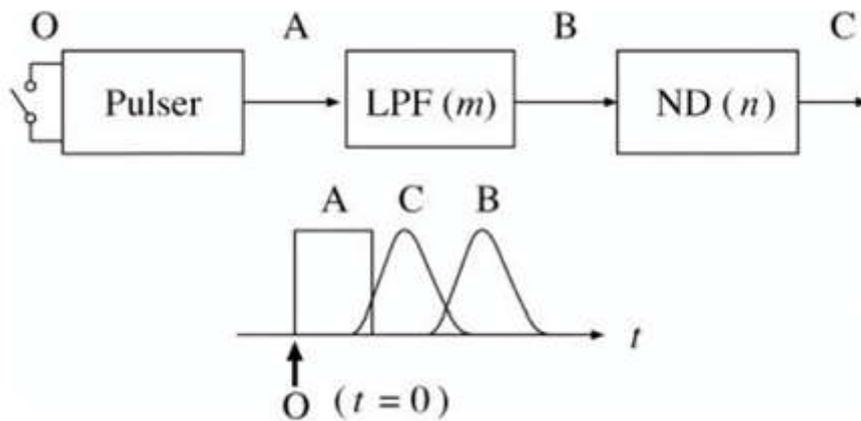


Рис. 1. Иллюстрация эффекта сверхсветовой передачи сигнала

**Реализация схемы с отрицательной задержкой.** Простейшая схема для реализации отрицательной задержки представлена на рис. 2.

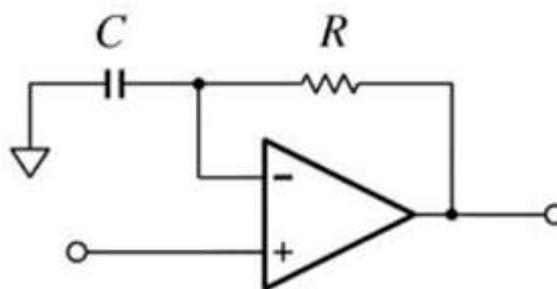


Рис. 2. Простейший контур для реализации отрицательной задержки

Передаточная функция этой схемы:

$$H(\omega) = 1 + i\omega T, \quad (6)$$

где  $T=RC$ .

Рассматривая модуль и аргумент этой функции, находим:

$$A(\omega) = \sqrt{1 + (\omega T)^2} \sim 1 + \frac{(\omega T)^2}{2}, \quad (7)$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \omega T \sim T\omega. \quad (8)$$

На рис. 3,а и рис. 3,б пунктиром обозначены графики идеальных передаточных функций (когда мы можем принять размер системы  $L = 0$  и пренебречь слагаемыми порядка выше первого). Как видно, графики идеальной задержки совпадают с истинными только в ограниченной полосе, поэтому в эксперименте использовались частоты около 1 Гц.

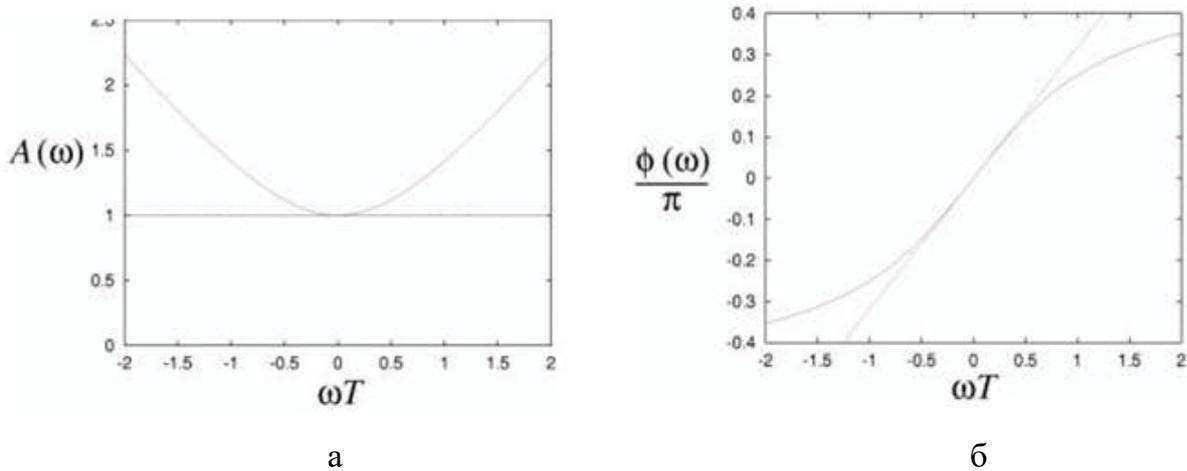


Рис. 3. Амплитудный (а) и фазовый (б) отклики

На практике в качестве входного сигнала обычно используют сигнал импульсный. Для его фильтрации применяют фильтры Бесселя, поэтому добавим элементы для подавления частот высших порядков (рис. 4).

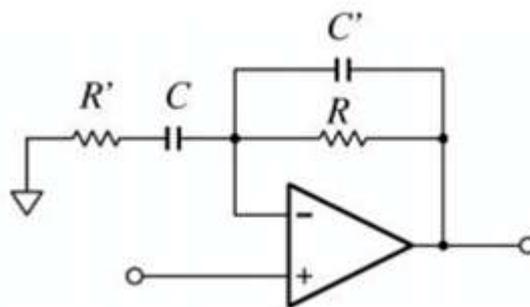


Рис. 4. Практическая реализация схемы с отрицательной задержкой

Ее передаточная схема может быть записана с учетом усиления, определяемого операционным усилителем

$$H(\omega) = 1 + \frac{i\omega T}{(1 + i\omega aT)(1 + i\omega bT)}$$

где  $a = C'/C$ ;  $b = R'/R$

На рис. 5,а и рис. 5,б представлены графики со значениями  $a = 0.2$ ;  $b = 0.05$ .

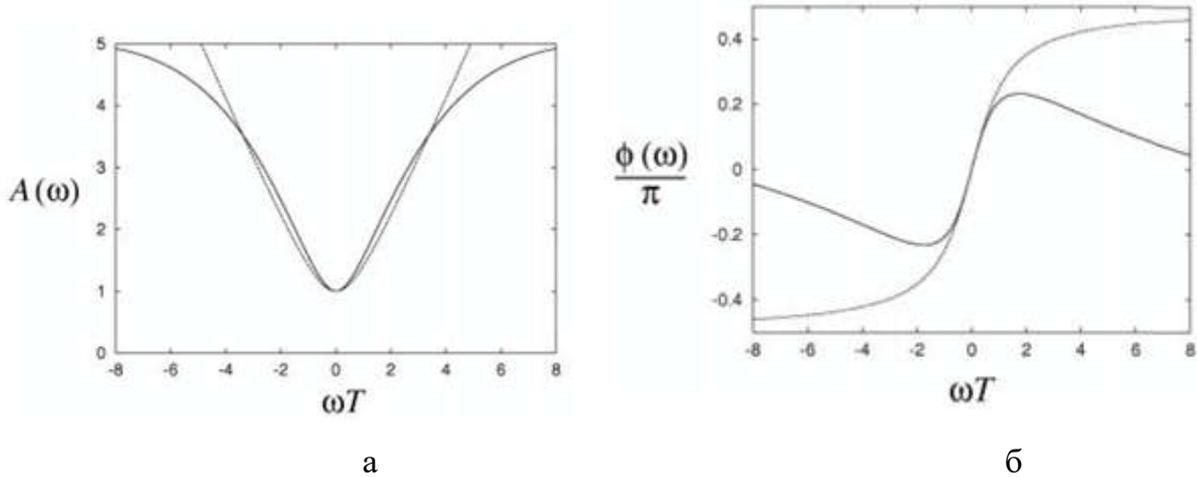


Рис. 5. Амплитудный (а) и фазовый (б) отклики

Известно, что такая схема может давать отрицательную задержку. В нашем проекте необходимо осуществить каскадирование таких блоков задержки для усиления и визуализации эффекта.

**Моделирование.** Сначала покажем, что схема идеальной групповой задержки действительно дает нужный результат. Схемы в LTspice и результаты моделирования показаны на рис. 6.

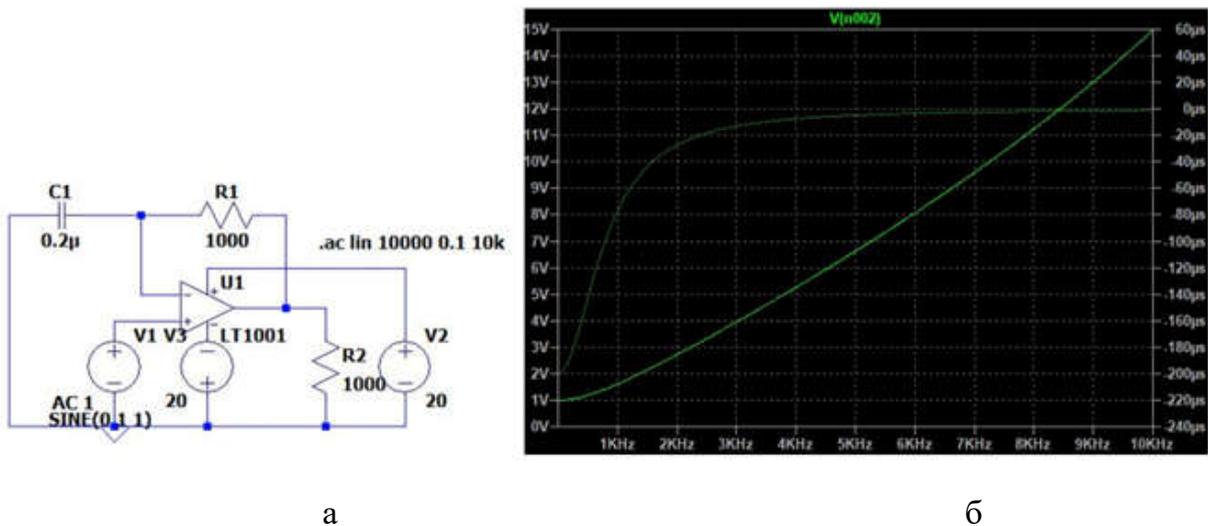


Рис. 6. Моделирование схемы с отрицательной групповой задержкой в LTspice (а); графики АЧХ и групповой задержки (б)

Нетрудно заметить, что такой контур действительно дает хорошие результаты (пунктирная линия – график групповой задержки; для частоты порядка 1 КГц, задержка, получаемая с контура, равняется приблизительно 80 мкс). Однако при таком построении, гармоники сигнала высших частот не затухают.

Мы будем собирать схему, чаще реализуемую на практике, включающую в себя дополнительно компенсирующие конденсатор и резистор, как показано на рис. 7.

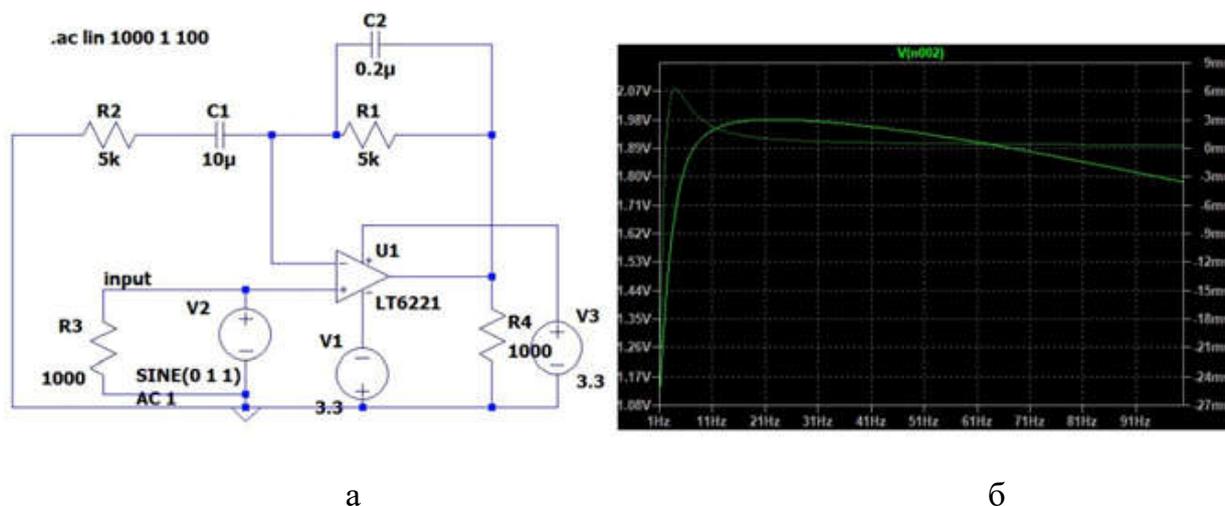
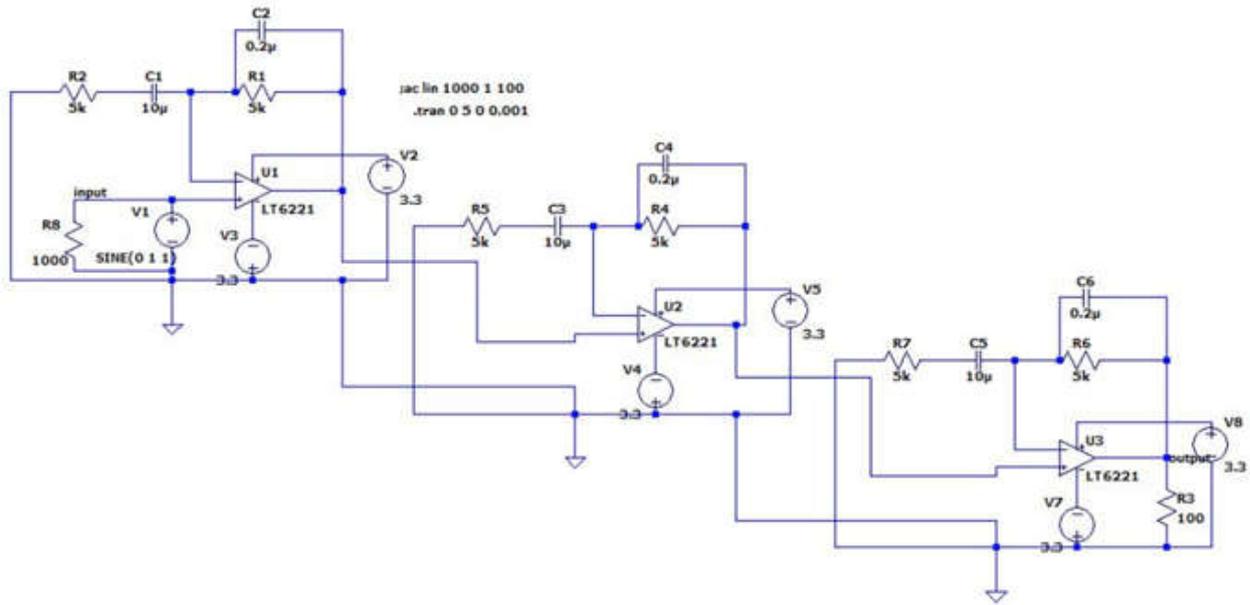


Рис. 7. Моделирование практической схемы с отрицательной групповой задержкой в LTspice (а); графики АЧХ и групповой задержки (б)

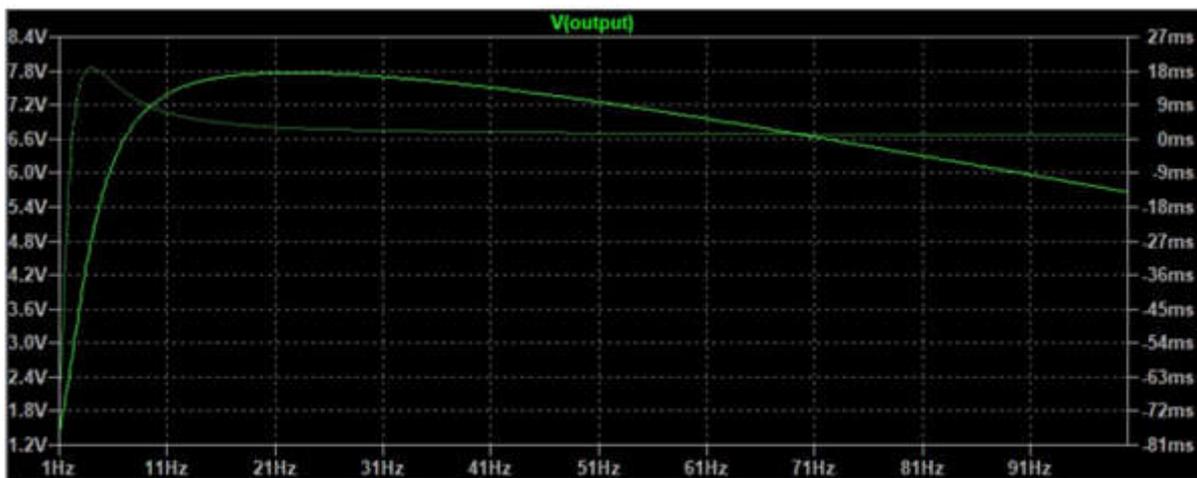
Как видно из графика, результат моделирования дает отрицательную задержку большую, чем в первом случае. Осуществим каскадирование (выполним 3 каскада), как показано на рис 8,а и рассмотрим результаты моделирования на рис. 8,б и рис. 9.

Анализируя график на рис. 9, замечаем, что колебания на выходном сопротивлении достигают своего максимального значения позже, а следовательно, и наблюдать мы будем, что диод на выходе загорается быстрее диода на входе. Данный феномен возникает из-за того, что нельзя детектировать сигнал по первому пришедшему на прибор электрону. Необходимо дождаться сколько-нибудь ощутимого значения тока. Этим обусловлено, казалось бы, парадоксальное явление: амплитуда на выходе растет гораздо быстрее, чем на входе, и, как следствие, диод на выходе загорается раньше, чем на входе.

Например, если бы отрицательная групповая задержка была равно 0, то амплитуды достигали заданного значения (например, 1 Вольт) одновременно, а, значит, и диоды загорались бы одновременно.



а



б

Рис. 8. Моделирование каскадированной схемы с отрицательной групповой задержкой в LTspice (а); графики АЧХ и групповой задержки (б)

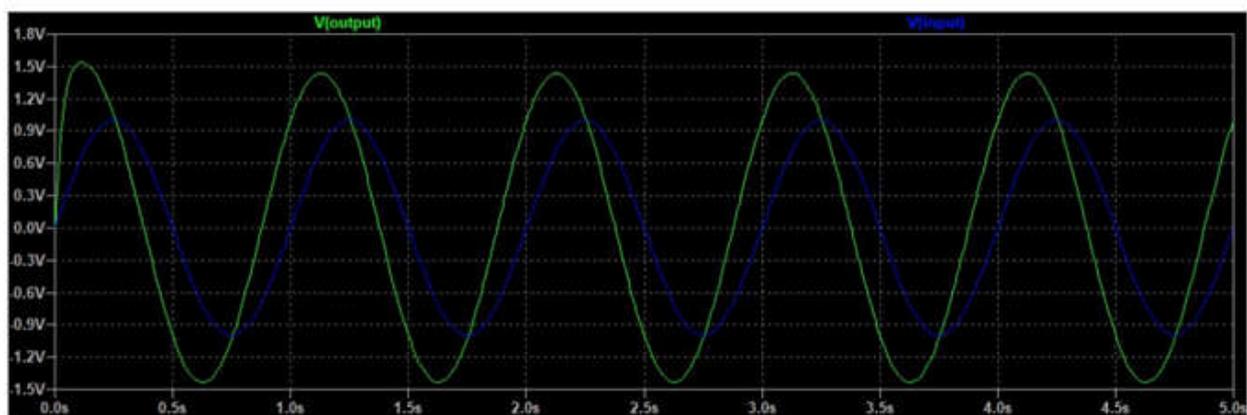
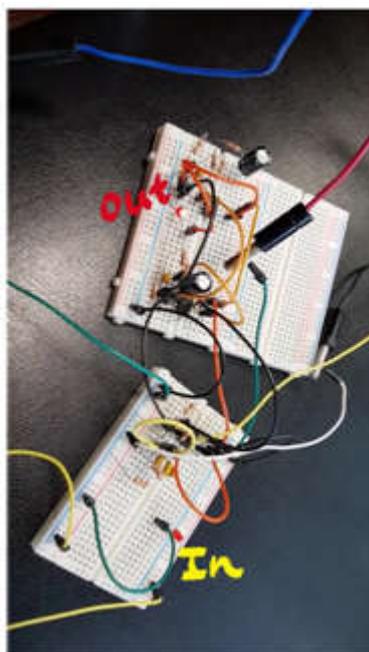
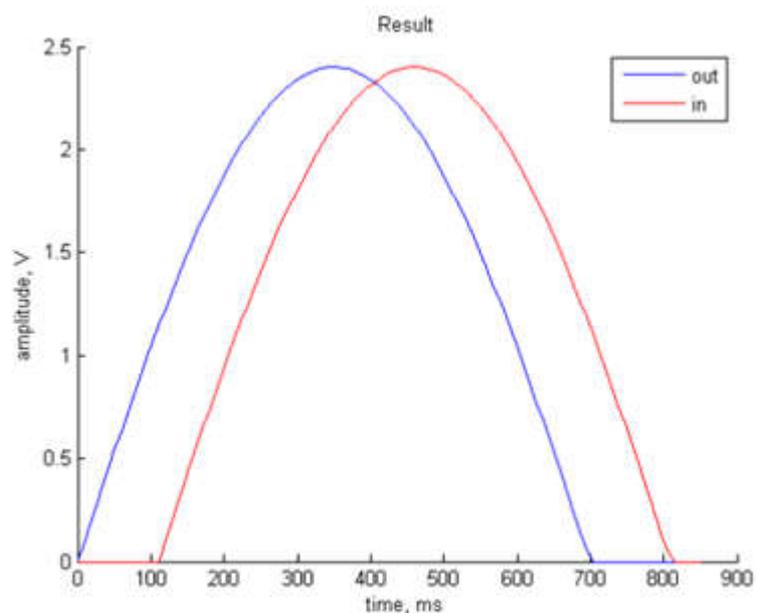


Рис. 9. Сравнение выходного и входного сигнала

**Практическая реализация.** Схема на рис. 10,а была собрана на дискретных элементах на макетной плате. Проведенные эксперименты показали, что входной диод загорается с некоторой задержкой относительно выходного. Один из таких моментов зафиксирован на фото на рис. 10,а. Был проведен расчет практического времени задержки и построен график на рис. 10,б.



а



б

Рис. 10. Схема эксперимента (а); результаты (б)

**Выводы.** В ходе поставленного эксперимента было подтверждено явление распространения сигнала со скоростью выше скорости света, чему дано теоретическое обоснование. Дальнейшее увеличение отрицательной групповой задержки возможно путем увеличения числа каскадов. Однако существует некоторый пороговый уровень увеличения числа каскадов, который будет ограничивать задержку. Таким ограничением выступает четверть периода сигнала на входе.

### **Список литературы**

1. Kitano M., Nakanishi T., Sugiyama K. Negative Group Delay and Superluminal Propagation: An Electronic Circuit Approach // IEEE J. Sel. Top. in Quantum Electron. – 2003. – Vol. 9, no. 1. – P. 43–51.

2. Ravelo B. Baseband NGD circuit with RF amplifier // Electronics Letters. – 2011. – Vol. 47. – P. 752–753.

3. Chiao R. Y. Superluminal (but Causal) Propagation of Wave Packets in Transparent Media with Inverted Atomic Populations // Physical Review A. – 1993. – Vol. 48. – P. 34–37.

4. Давидович М. В. Прохождение сигналов через фильтр с поглощением и отрицательное время задержки // ЖТФ. – 2012. – Т. 82, вып. 3. – С. 15–22.

**Юрова Татьяна Сергеевна,**

**Шубник Антон Александрович,**

**Рябов Даниил Романович,**

**Новокрещёнов Денис –**

студенты группы Z3343 Санкт-Петербургского научно-исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО).

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕМРЕЗИСТИВНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛАТФОРМЕ ARDUINO

Д. Д. Седов, Д. И. Сахно, Г. А. Федорович, Р. А. Гладков, К. С. Горшков

Предложена цифровая модель мемристора. На платформе Arduino разработано устройство для снятия вольт-амперных характеристик цифровых потенциометров, выступающих в качестве мемристоров.

A digital model of the memristor is proposed. On the Arduino platform, a device has been developed for removing the volt-ampere characteristics of digital potentiometers that act as memristors.

**Введение.** Понятие мемристора (англ. *memristor*, от *memory* – память, и *resistor* – электрическое сопротивление) впервые было введено в 1971 году профессором Леоном Чуа [1]. Мемристор можно считать резистором с сопротивлением, меняющимся во времени и зависящим от предыдущих значений тока, проходящего через него. Это дает перспективу использования мемристора в качестве элемента памяти. Кроме того, М. Ди Вентра и Ю. В. Першин [2] предложили концепцию цифровых вычислительных устройств, хранение и обработка информации в которых осуществляется за счет применения технологии мемристоров. Активно принимаются попытки использования мемристоров в качестве искусственных синапсов нейропроцессов и искусственных нейросетей, тем самым повышая пропускную способность элемента с увеличением интенсивности входного сигнала. Данная концепция может значительно упростить конструкцию нейропроцессора и снизить его стоимость. Твердотельные мемристоры могут быть объединены в устройства, называемые поперечными защелками, которые способны заменить транзисторы в будущих компьютерах, занимая гораздо меньшую площадь. Несмотря на существующие проблемы с выведением описанных устройств в активное использование на рынке, выгоды, которые они могут принести, предсказывают огромные объемы прибыли.

В 2008 исследователи из лаборатории НР анонсировали физическую реализацию твердотельного мемристора с использованием слоя диоксида титана между платиновыми электродами. Ввиду сложности и затратности технологии реализации такого устройства, наиболее актуальным до сих пор остается цифровое моделирование мемристора с помощью различных платформ. В рамках этого проекта мы проведем его моделирование с помощью цифрового потенциометра, управляемого платформой Arduino.

Существует математическая модель мемристора на основе диоксида титана [3], согласно которой его сопротивление может меняться строго в диапазоне  $(R_{off}, R_{on})$ . Поведение этого элемента описывается следующими формулами:

$$v(t) = \left( R_{on} \frac{w(t)}{D} + R_{off} \left( 1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right), \quad (1)$$

$$w(t) = w_0 + \mu_v \frac{R_{on}}{D} \int_0^t i(t) dt = w_0 + \mu_v \frac{R_{on}}{D} q(t), \quad (2)$$

где  $v(t)$  – напряжение на мемристоре;  $i(t)$  – ток, текущий через него;  $q(t)$  – заряд, прошедший к моменту времени  $t$ ; функция  $w(t)$ , принимающая значения от  $w_0$  до  $D$ , имеет интересный физический смысл, который, однако, не рассматривается в данной работе, поэтому происхождение констант  $D$ ,  $\mu_v$ ,  $w_0$  объясняться не будет. Они могут быть только неотрицательными. Таким образом, сопротивление мемристора  $R(t)$  подчиняется закону:

$$R(t) = R_{off} \left[ 1 + \frac{w_0}{D} \left( \frac{R_{on}}{R_{off}} - 1 \right) - \frac{\mu_v R_{on}}{D^2} \left( 1 - \frac{R_{on}}{R_{off}} \right) q(t) \right]. \quad (3)$$

**Аналитическое моделирование.** Будем исходить из того, что у нас есть дискретный набор напряжений, соответствующих полупериоду синусоидального сигнала, и начальные условия для сопротивления и заряда.

$$U(t) = U_m \sin(\omega t) \Rightarrow U_k = U(k \cdot \Delta t), \quad (4)$$

$$\begin{cases} R_0 = R_{off}, \\ q_0 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

На основе модели мемристора  $TiO_2$  мы хотим связать сопротивление нашего потенциометра с прошедшим через него за все время зарядом. Делаем мы это следующим образом:

$$Q_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{U_j + U_{j+1}}{R_j} \cdot \Delta t, \quad (6)$$

$$R_k = C_R + C_Q \cdot Q_k, \quad C_R = R_0 = R_{off}. \quad (7)$$

Здесь  $Q_k$  вычисляется интегрированием дискретной функции  $I_k = \frac{U_k}{R_k}$ , которое осуществляется методом трапеций (Рис. 2). Основная задача моделирования состоит в том, чтобы подобрать константы в зависимости  $R(Q) \leftrightarrow R_k(Q_k)$  и получить необходимый диапазон принимаемых значений сопротивления, который должен быть довольно широким для того, чтобы далее мы могли максимально использовать ограниченный набор значений потенциометра при его программировании и получить достаточно гладкую кривую ВАХ.

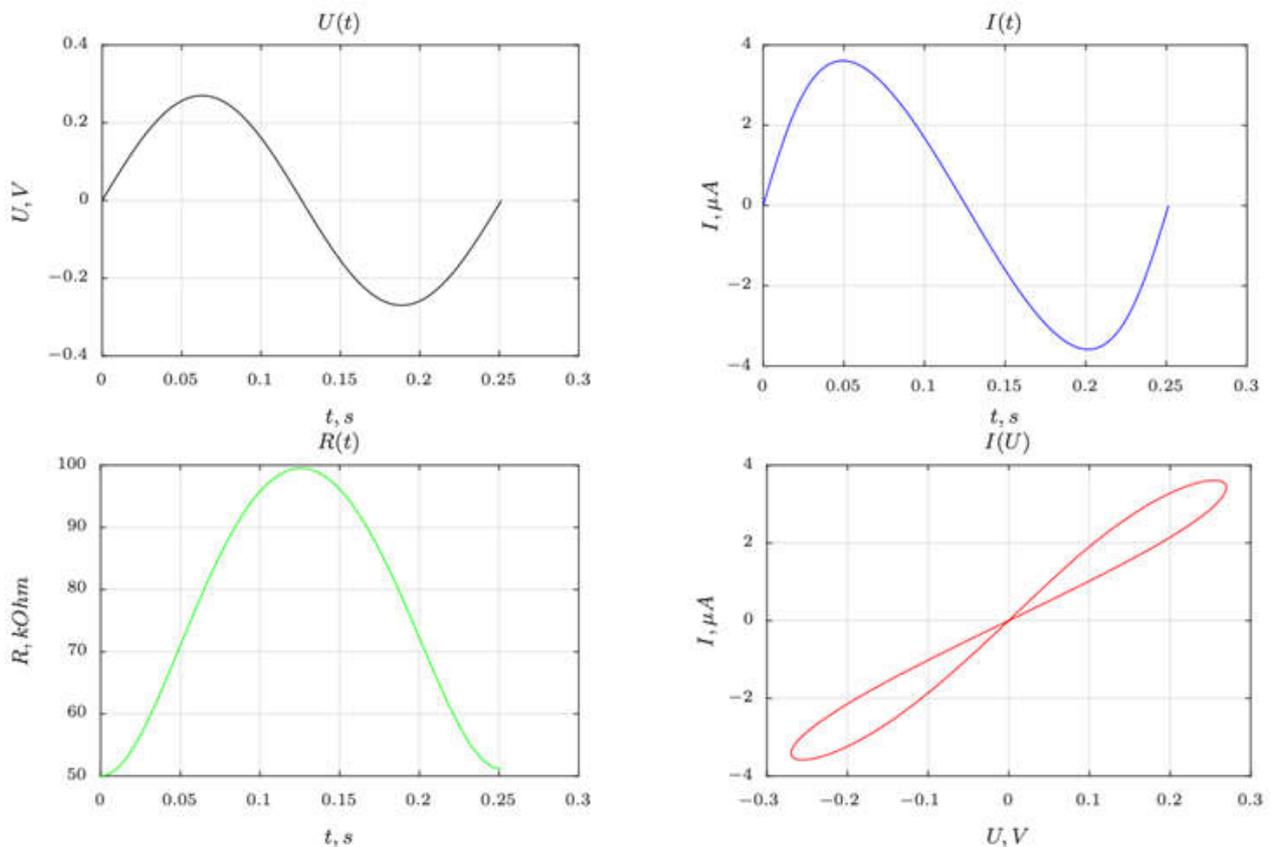


Рис. 1. Результаты аналитического моделирования

На рис. 1 представлен результат аналитического моделирования для конкретных величин амплитудного напряжения, частоты и диапазона сопротивлений потенциометра. Результатом моделирования является функция  $R(q) = \tilde{R}(t)$ , на которой будет основываться наша модель мемристора (рис. 2).

**Описание устройства.** Прежде всего, необходимо подать синусоидальный сигнал на вход цифрового потенциометра №2, выступающего основой для будущего мемристора. Для этого используется схема повторителя на биполярном транзисторе.

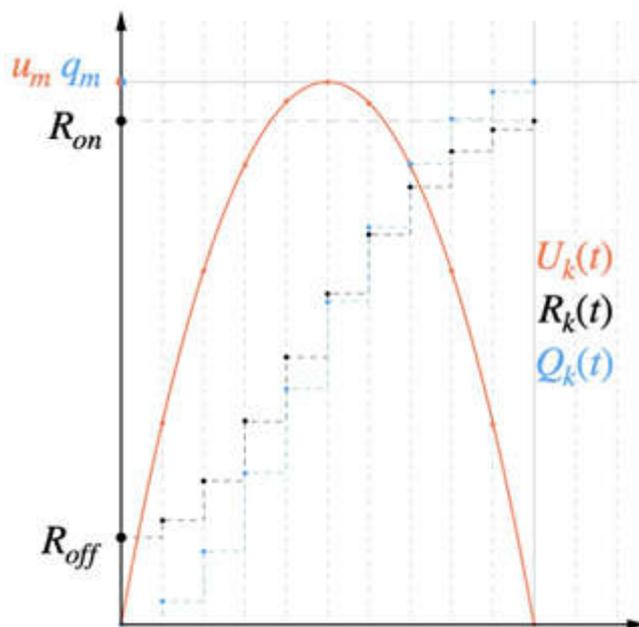


Рис. 2. Визуализация работы алгоритма

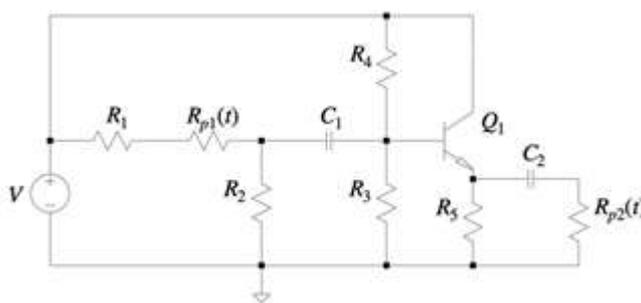


Рис. 3. Принципиальная схема устройства.

Напряжение на входе повторителя генерируется с помощью цифрового потенциометра №1, сопротивление которого меняется по следующему закону:

$$R_{p1}(t) = \frac{U}{A+B\sin(\omega t)} - R_1 - R_2, \quad (8)$$

$$A = \frac{U}{2} \left( \frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_1+R_2+R_{max}} \right), \quad (9)$$

$$B = \frac{U}{2} \left( \frac{1}{R_1+R_2} - \frac{1}{R_1+R_2+R_{max}} \right). \quad (10)$$

Сопротивление потенциометра №2 рассчитывается по описанным в аналитическом моделировании формулами (1)-(3). В качестве результата ожидается получение петли гистерезиса для мемристора. Состав устройства: Arduino UNO; соединительные провода; резисторы:

$R_1 = 2.2 \text{ kOhm}$ ,  $R_2 = R_5 = 1.1 \text{ kOhm}$ ,  $R_3 = R_4 = 3.3 \text{ kOhm}$ ; конденсаторы:

$C_1 = C_2 = 14.1 \text{ }\mu\text{Ohm}$ ; цифровой потенциометр MCP4251-103E/SL; цифровой потенциометр MCP4131-104E/P;

В ходе выполнения проекта мы столкнулись с проблемой, заключающейся в том, что Arduino не позволяет снимать напряжение на отрицательной области. Поэтому мы исключили их схемы повторителя конденсатор, предназначенный для срезания постоянной составляющей. Таким образом, на протяжении всего периода сигнал оставался в положительной области.

Цифровой потенциометр MCP4251-103E/SL был выбран ввиду высокой скорости чтения-записи ( $f = 10 \text{ MHz}$ ) в качестве потенциометра, отвечающего за генерацию синусоиды. MCP4131-104E/P, обладающий большим диапазоном сопротивлений, лучше подходит на роль потенциометра №2.

**Результаты.** Сигнал, поступающий на вход ( $f = 3.979 \text{ Hz}$ ,  $U_m = 270 \text{ mV}$ ) моделирующего мемристора, зависимость сопротивления на нем от времени и ВАХ представлены на рисунке 5. Поскольку Arduino Uno не может выступать непосредственно в качестве источника переменного

напряжения, выходной сигнал задавался с помощью цифрового потенциометра и повторителя на биполярном транзисторе.

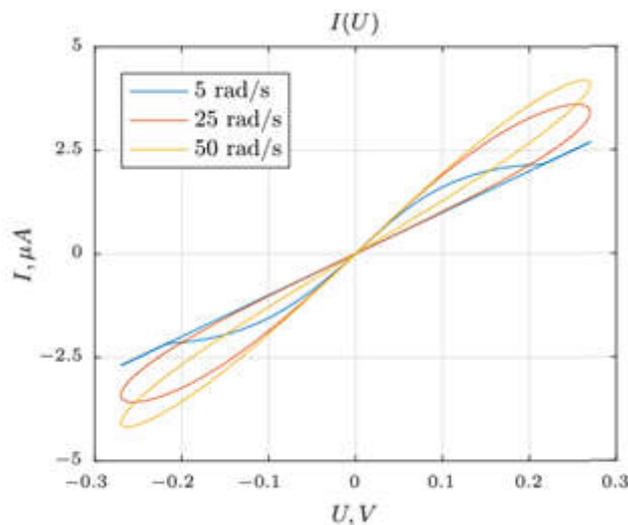


Рис. 4. Зависимость ВАХ от частоты

Довольно долгая запись на потенциометр ограничила сверху возможный диапазон частот, ограничения снизу были связаны с использованием в схеме конденсаторов. Более того, для каждой частоты отдельно необходимо было подбирать элементы так, чтобы разрешение Arduino позволило корректно считать величину выходного напряжения, и чтобы особенности используемого транзистора не дали о себе знать. Таким образом, мы не смогли получить зависимость ВАХ от частоты входного сигнала (Рис. 4) и остановились на частоте 25 рад/с, дающей лучшие результаты, которые и представлены в данной работе.

Положительный и отрицательный полупериоды входного синусоидального сигнала получились несимметричными, что является следствием сразу нескольких факторов. Первый (и, пожалуй, главный) из них заключается в том, что при выводе зависимости напряжения цифрового потенциометра для генерации синусоиды мы не учитывали всю схему с повторителем, а ограничились сильно упрощённой моделью, не учитывающей влияния конденсаторов и транзистора. Следующий фактор связан с дискретностью возможных значений сопротивления потенциометра, на каждом временном шаге оно отличалось от необходимого, что также могло повлиять на выходной сигнал.

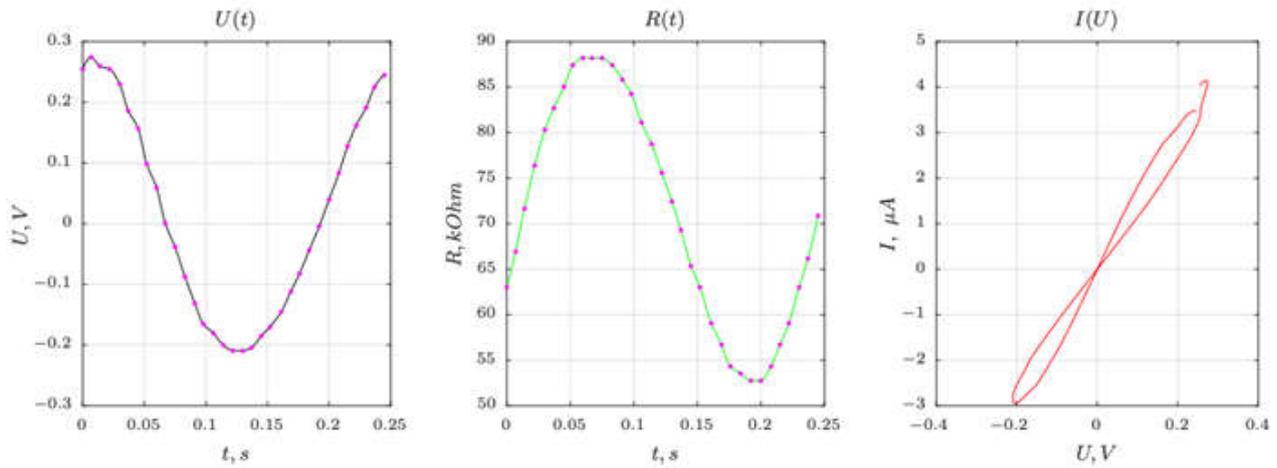


Рис. 5. Результаты эксперимента.

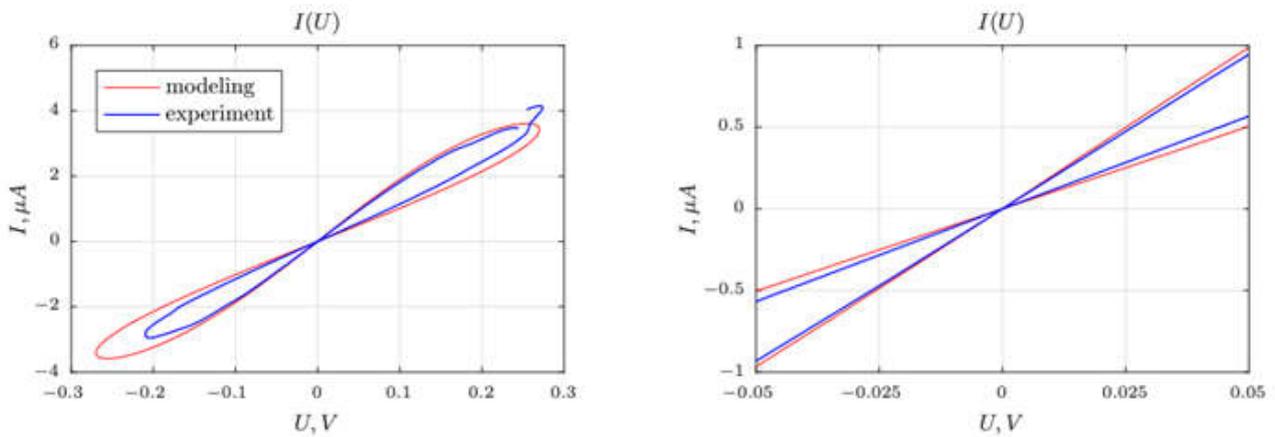


Рис. 6. Сравнение моделирования и эксперимента

Последняя причина, с помощью которой можно объяснить возникшую асимметрию, кроется в том, что в реальной схеме мы не использовали конденсатор на выходе повторителя – вместо этого мы искусственно высчитали постоянную составляющую сигнала, которую находили ранее обычным усреднением выходного напряжения во времени. Описанная несимметричность входного сигнала привела, в частности, к асимметрии петли гистерезиса.

Как видно из графика (рис. 6), диапазон значений сопротивлений, принимаемых мемристором, в действительности отличается от предполагаемого при моделировании:  $R_{mod} = [50, 100] \text{ kOhm}$ , а  $R_{exp} = [53, 89] \text{ kOhm}$ . Это связано с тем, что функция сопротивления, получаемая в

результате моделирования и зависимость, которая была использована при программировании микроконтроллера, отличались в силу особенностей его работы: достаточно низкой и непостоянной скорости вычислений и медленного взаимодействия с потенциометром №2 (MCP4131-104E/P).

### **Выводы**

1. Проведено цифровое моделирование мемристора по его уравнениям (1)–(3).

2. На платформе Arduino поставлен эксперимент, позволяющий наблюдать поведение мемристора для входного сигнала  $\omega = 25 \text{ rad/s}$ .

3. Получена вольтамперная характеристика цифрового потенциометра, выступающего в качестве мемристора, и проведено ее сравнение с паспортными данными.

### **Список литературы**

1. Chua L.O. Memristor - the missing circuit element // IEEE Trans. Circuit Theory. – 1971. – Vol. 18. – P. 507–519

2. Ventra M.D., Pershin Y. V., Chua L. O. Circuit Elements With Memory: Memristors, Memcapacitors, and Meminductors // in Proc. of IEEE. – 2009. – Vol. 97, no 10. – P. 1717–1724.

3. Biolek Z., Biolek D., Biolkova V., Improved model of TiO<sub>2</sub>memristor // Radioengineering. – 2015. – Vol. 2, P. 378–383.

**Гладков Руслан Алексеевич,**

**Сахно Денис Игоревич,**

**Седов Денис Денисович,**

**Федорович Глеб Андреевич** – студенты группы Z3343 Университета ИТМО.

**Горшков Константин Сергеевич** – канд. техн. наук, доцент кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем Санкт-Петербургского научно-исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО). E-mail: k.gorshkov@list.ru.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УСТРОЙСТВ

## ПРОБЛЕМЫ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ 6-10 КВ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕМУ ЗАКОНОДАТЕЛЬСТВУ

А. Л. Дубов, А. А. Ульман

*Отмечены проблемы в области технического обслуживания воздушных линий 6-10 кВ согласно действующим нормативно-правовым актам, в частности: некоторое несоответствие требований к обрезке деревьев на трассах воздушных линий, отсутствие порядка согласования работ вне охранных зон воздушных линий 6-10 кВ.*

*Problems in the field of technical maintenance of 6-10 kV overhead lines in accordance with applicable laws and regulations are noted, in particular: some discrepancy between the requirements for pruning trees on the routes of overhead lines, the lack of coordination procedures for work outside the border zone of overhead lines 6-10 kV.*

**Определения нормативно-технических документов и нормативно-правовых актов.** Широко известно, что надежность электроснабжения очень важная вещь, от непрерывной подачи электроэнергии зависит работа многих предприятий, заводов, учреждений. Поэтому требования к надежности электроснабжения в данное время высоки. И для обеспечения данных требований важно, в том числе, проводить качественное техническое обслуживание.

Как известно, порядок проведения технического обслуживания, в том числе воздушных линий 6–10 кВ регулируется как нормативно-технической документацией, так и нормативно-правовыми актами.

Нормативно-технические документы – это официальные документы, изданные полномочным органом государственной власти или организацией, уполномоченной разрабатывать такие акты, устанавливают, изменяют или отменяют техническую норму, не содержат общих правил поведения (правовых норм), однако устанавливают обязательные для индивидуально-неопределенного круга лиц и рассчитанные на неоднократное применение технические требования и условия деятельности, в т.ч. формы документов, технические правила и стандарты, форматы данных и т.п.

К нормативно–техническим документам относятся:

- Правила устройства электроустановок (утверждены приказом Минэнерго России от 20 мая 2003 г. N 187) [1];
- Правила организации технического обслуживания и ремонта оборудования, зданий и сооружений электростанций и сетей [2];
- Типовая инструкция по техническому обслуживанию и ремонту воздушных линий электропередачи напряжением 0,38-20 кВ с неизолированными проводами [3].

Нормативные правовые акты – письменные официальные документы, принятые (изданные) в определенной форме правотворческим органом в пределах его компетенции и направленные на установление, изменение или отмену правовых норм. В свою очередь, под правовой нормой принято понимать общеобязательное государственное предписание постоянного или временного характера, рассчитанное на многократное применение и распространяющееся на индивидуально-неопределенный круг лиц.

Нормативно-технические документы, подпадающие под оценочные и формальные признаки, зарегистрированные в Минюсте России, также являются нормативно-правовыми актами.

К нормативно–правовым актам относятся:

- Постановление Правительства РФ от 24.02.2009 N 160 О порядке установления охранных зон объектов электросетевого хозяйства и особых условий использования земельных участков, расположенных в границах таких зон [4];

– Приказ Минэнерго России от 25.10.2017 N 1013 Об утверждении требований к обеспечению надежности электроэнергетических систем, надежности и безопасности объектов электроэнергетики и энергопринимающих установок "Правила организации технического обслуживания и ремонта объектов электроэнергетики" [5];

– Приказ Минэнерго России от 19.06.2003 N 229 Об утверждении Правил технической эксплуатации электрических станций и сетей Российской Федерации [6];

Из выше сказанного следует, что нормативно-правовые акты стоят выше нормативно-технических документов и именно они определяют в случае противоречий законный порядок проведения технических и организационных мероприятий по обслуживанию воздушных линий.

**Связь между надежностью электроснабжения и несовершенством действующего законодательства.** Как было отмечено выше, именно нормативно-правовые акты регулируют порядок технического обслуживания. Однако тот порядок регулирования, который описан в них, приводит к недостаточному уровню надежности электроснабжения.

На основании опытных данных [7] была проанализирована статистика технологических нарушений АО «УСК», при этом наибольшее количество технологических нарушений зафиксировано на воздушных линиях 6-10 кВ. При разборе причин отключения воздушных линий были получены следующие результаты:



Рис.1

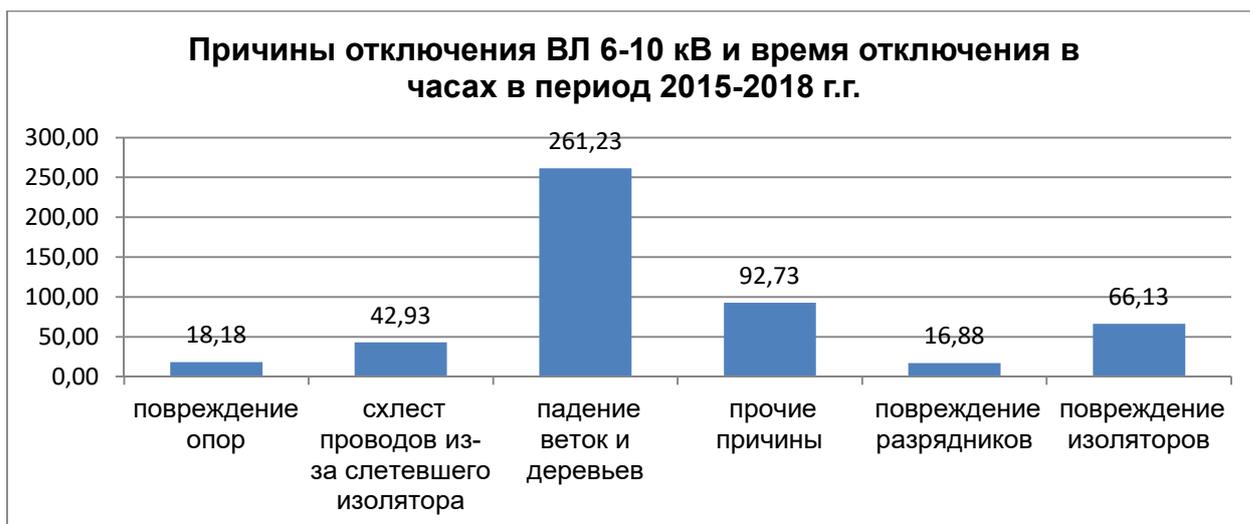


Рис.2

Из выше представленных рисунков видно, что наибольшее количество технологических нарушений произошло в результате падения веток и деревьев. И именно с порядком регулирования обрезки деревьев возникают проблемы в сфере технического обслуживания. Несовершенство действующего законодательства в вопросах обрезки деревьев для качественного обслуживания воздушных линий приводит к значительному увеличению технологических нарушений электрооборудования.

**Различия в нормативно-технических документах и нормативно-правовых актах в вопросах обслуживания воздушных линий.** Прежде всего стоит рассмотреть как должно происходить обслуживание воздушных линий согласно нормативно-техническим документам для понимания правильного подхода к вопросам обрезки древесно-кустарниковой растительности.

Первым таким документом, в котором достаточно подробно и ясно описываются размеры между деревьями и воздушными линиями является ПУЭ. Согласно ПУЭ:

«Ширина просек в насаждениях должна приниматься в зависимости от высоты насаждений с учетом их перспективного роста в течение 25 лет с момента ввода ВЛ в эксплуатацию и группы лесов.

При прохождении ВЛ в насаждениях лесов I группы, парках и фруктовых садах. Согласно ПУЭ ширина просеки рассчитывается по формуле:

$$A = D + 2 (B + a + K),$$

где  $A$  — ширина просеки, м;  $D$  — расстояние по горизонтали между крайними, наиболее удаленными проводами фаз, м;  $B$  — наименьшее допустимое расстояние по горизонтали между крайним проводом ВЛ и кроной деревьев, для ВЛ 6-10 кВ принимается 3 м;  $a$  — горизонтальная проекция стрелы провеса провода и поддерживающей гирлянды изоляторов, м, при наибольшем их отклонении согласно с учетом типа местности;  $K$  — радиус горизонтальной проекции кроны с учетом перспективного роста в течение 25 лет с момента ввода ВЛ в эксплуатацию, м.

Радиусы проекций кроны деревьев основных лесообразующих пород принимаются в основном от 4,5 до 9 м.

Расстояние от проводов до деревьев в данном случае определяется как  $B + a + K$ . Получается, что расстояния равны от 7,5 м до 12 м без учета отклонения проводов.

В лесах II и III групп ширина просеки принимается равной большему из двух значений, рассчитанных по формуле, приведенной в п.2, и по формуле

$$A = D + 2 H,$$

где  $H$  — высота насаждений с учетом перспективного роста, м.

Также по ПУЭ «Отдельные деревья или группы деревьев, растущие вне просеки и угрожающие падением на провода или опоры ВЛ, должны вырубаться.[1]»

Стоит отметить, что ПУЭ подробно описывает меры обслуживания по расчистке трассы ВЛ, которые сводят к минимуму возможность происшествий технологических нарушений, связанных с падением веток и деревьев на провода ВЛ. Однако ПУЭ распространяется только на «вновь сооружаемые и реконструируемые электроустановки». Для действующих электроустановок ПУЭ предьявляет лишь рекомендательный характер.

Остальные нормативно-технические документы [2], [3] в плане обрезки древесно-кустарниковой растительности также ссылаются на ПУЭ.

Теперь рассмотрим требования по обрезке древесно-кустарниковой растительности согласно нормативно-правовым документам. Наибольшую юридическую силу в данном вопросе имеет Постановление Правительства РФ от 24.02.2009 N 160 «О порядке установления охранных зон объектов электросетевого хозяйства и особых условий использования земельных участков, расположенных в границах таких зон». Согласно п.22. данного документа:

«Необходимая ширина просек, прокладываемых в соответствии с пунктом 21 настоящих Правил, расстояния, в пределах которых осуществляется вырубка отдельно стоящих (групп) деревьев (лесных насаждений), а также минимально допустимые расстояния до крон деревьев определяются в соответствии с *требованиями законодательных и иных нормативных правовых актов Российской Федерации, в том числе настоящих Правил*»[4].

Согласно Приказу Рослесхоза от 10.06.2011 N 223 "Об утверждении Правил использования лесов для строительства, реконструкции, эксплуатации линейных объектов", который является нормативно-правовым актом и зарегистрирован в Минюсте РФ:

п.8: «...Ширина просеки для линий электропередачи определяется в соответствии с требованиями и размерами охранных зон воздушных линий электропередачи, предусмотренными пунктом "а" Приложения к Правилам установления охранных зон объектов электросетевого хозяйства и особых условий использования земельных участков, расположенных в границах таких зон, утвержденных Постановлением Правительства Российской Федерации от 24 февраля 2009 г. N 160» [8].

Охранная зона для воздушных линий 6-10 кВ составляет 10 м. То есть согласно законодательству обрезка деревьев предполагается только в этой зоне, тогда как согласно ПУЭ эта зона может быть значительно больше (от 7,5 до 12 м – леса I группы или расстояние равное высоте насаждений с учетом перспективного роста – в лесах II и III групп).

Также стоит отметить проблемы согласования работ вне охранной зоны. Согласно п.1[4]:

«Настоящие Правила определяют порядок установления охранных зон объектов электросетевого хозяйства (далее - охранные зоны), а также особые условия использования *земельных участков, расположенных в пределах охранных зон (далее - земельные участки)*, обеспечивающие безопасное функционирование и эксплуатацию указанных объектов»

Далее по п.17 [4]:

«Плановые (регламентные) работы по техническому обслуживанию объектов электросетевого хозяйства производятся с предварительным уведомлением собственников (землепользователей, землевладельцев, арендаторов) *земельных участков*». Таким образом, в данном нормативно-правовом акте говорится о согласовании работ только в пределах охранной зоны. Порядок согласования работ вне охранной зоны в данном документе не прописан. В остальных нормативно-правовых актах также отсутствует порядок согласования работ вне охранной зоны.

## **Выводы**

1. Для устранения различий требований в нормативно-правовых и нормативно-технических документах установить требования ПУЭ приоритетными в вопросах обрезки древесно-кустарниковой растительности.

2. Прописать порядок согласования работ в [4] как в охранной зоне воздушных линий, так и вне нее.

## **Список литературы**

1. Правила устройства электроустановок [Электронный ресурс]: приказ Минэнерго России от 20 мая 2003 г. N 187 (с изм. и доп., внесенными изменениями приказом Минэнерго России от 20 декабря 2017 года). Доступ из справ.-правовой системы «Техэксперт: 6 поколение»

2. Правила организации технического обслуживания и ремонта оборудования, зданий и сооружений электростанций и сетей [Электронный ресурс]: Стандарт организации Россети СО 34.04.181-2003 (применяется от 01 января 2004 года). Доступ из справ.-правовой системы «Техэксперт: 6 поколение»

3. Типовая инструкция по техническому обслуживанию и ремонту воздушных линий электропередачи напряжением 0,38-20 кВ с неизолированными проводами [Электронный ресурс]: утверждена Департаментом электрических сетей РАО "ЕЭС России" 19 мая 1998 г. Доступ из справ.-правовой системы «Техэксперт: 6 поколение»

4. О порядке установления охранных зон объектов электросетевого хозяйства и особых условий использования земельных участков, расположенных в границах таких зон [Электронный ресурс]: Постановление Правительства Российской Федерации от 24 февраля 2009 года N 160 (с изм. и доп., внесенными постановлением Правительства Российской Федерации 21 декабря 2018 года). Доступ из справ.-правовой системы «Техэксперт: 6 поколение»

5. Правила технической эксплуатации электрических станций и сетей Российской Федерации [Электронный ресурс]: Приказ Минэнерго России от 19.06.2003 N 229 (с изм. и доп., от 13 февраля 2019 года). Доступ из справ.-правовой системы «Техэксперт: 6 поколение»

6. Правила организации технического обслуживания и ремонта объектов электроэнергетики [Электронный ресурс]: Приказ Минэнерго России от 25 октября 2017 N 1013. Доступ из справ.-правовой системы «Техэксперт: 6 поколение»

7. Технологические нарушения 2015-2018. URL: <http://www.oao-usk.ru/post-519.html>

8. Об утверждении Правил использования лесов для строительства, реконструкции, эксплуатации линейных объектов [Электронный ресурс]: Приказ Рослесхоза от 10.06.2011 N 223. Доступ из справ.-правовой системы «Техэксперт: 6 поколение»

**Дубов Александр Леонидович** – канд. техн. наук, доцент, декан Энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета.  
432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. Тел. 8-8422-77-83-97.  
E-mail: a.dubov@ulstu.ru.

**Ульман Александр Андреевич** – магистрант энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета.  
E-mail: alexulman81@mail.ru.

## КРИТЕРИИ ВЫБОРА ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНОГО ВАРИАНТА ТЕХНИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

А. В. Манин, В. В. Юдин, А. В. Юдин

*Предложен способ формализованного описания задачи выбора предпочтительного варианта технического решения. В качестве критерия предпочтения предложено оценивать удаление области с параметрами варианта реализации от границ допустимых значений. Рассмотрены алгоритмы вычисления критерия на основе нахождения максимума и минимума, а также вычисления средних значений запасов.*

*A method of formalized description of the problem of choosing the preferred version of the technical solution is proposed. As a preference criterion, it is proposed to evaluate the removal of an area with implementation parameters from the boundaries of acceptable values. Algorithms for calculating the criterion based on finding the maximum and minimum, as well as calculating the average values of reserves, are considered.*

**Введение.** Любое техническое устройство характеризуется совокупностью параметров. Выход за предельно допустимые значения чреват серьезными последствиями. При этом разработчик сложных технических устройств сталкивается с проблемой неоднозначности выбора того или иного решения. Как правило, выбор производится на основании опыта разработчика или его интуиции. Могут быть использованы и более эффективные, но, тем не менее, не достаточно формализованные методы [1]. Такой подход не гарантирует нахождение оптимального варианта.

**Область допустимых значений для конкретного класса технической устройства** должна принадлежать заданной области допустимых значений.

Обозначим числовые значения параметров  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Каждый из параметров в соответствии с техническим регламентом должен удовлетворять определенным условиям

$$\begin{aligned}
q_{1\min} &\leq q_1 \leq q_{1\max} \\
q_{2\min} &\leq q_2 \leq q_{2\max} \\
&\dots\dots\dots \\
q_{n\min} &\leq q_n \leq q_{n\max}
\end{aligned}
\tag{1}$$

Где  $q_{1\min}, q_{2\min}, \dots, q_{n\min}$  и  $q_{1\max}, q_{2\max}, \dots, q_{n\max}$  — соответственно минимальные и максимальные предельные значения параметров, образующие вектор – столбцы текущих значений  $Q$ , минимальных  $D_0$  и максимальных  $U_0$  предельных уровней

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} d_{10} \\ d_{20} \\ \dots \\ d_{n0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1\min} \\ q_{2\min} \\ \dots \\ q_{n\min} \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ \dots \\ u_{n0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1\max} \\ q_{2\max} \\ \dots \\ q_{n\max} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Совокупность параметров каждого конкретного устройства геометрически можно представить точкой  $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$  в  $n$ -мерном пространстве  $0q_1q_2, \dots, q_n$ . Тогда с учетом соглашений (1) для области допустимых значений выходных параметров  $G_U$  получим

$$G_U = \bigcap_{k=1}^n q_k \in [q_{k\min}, q_{k\max}] = (Q \geq D_0) \wedge (Q \leq U_0),$$

что проиллюстрировано рис. 1. Область  $G_U$  на нем выделена утолщенными линиями, точки  $D_0$  и  $U_0$  соответствуют минимальным и максимальным предельным уровням.

Для случая  $m$  различных вариантов реализации устройств имеет место совокупность областей

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ \dots \\ g_{n1} \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ \dots \\ g_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad G_m = \begin{pmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ \dots \\ g_{nm} \end{pmatrix},$$

заданных неравенствами

$$D_1 \leq G_1 \leq U_1, \quad D_2 \leq G_2 \leq U_2, \quad \dots, \quad D_m \leq G_m \leq U_m, \tag{3}$$

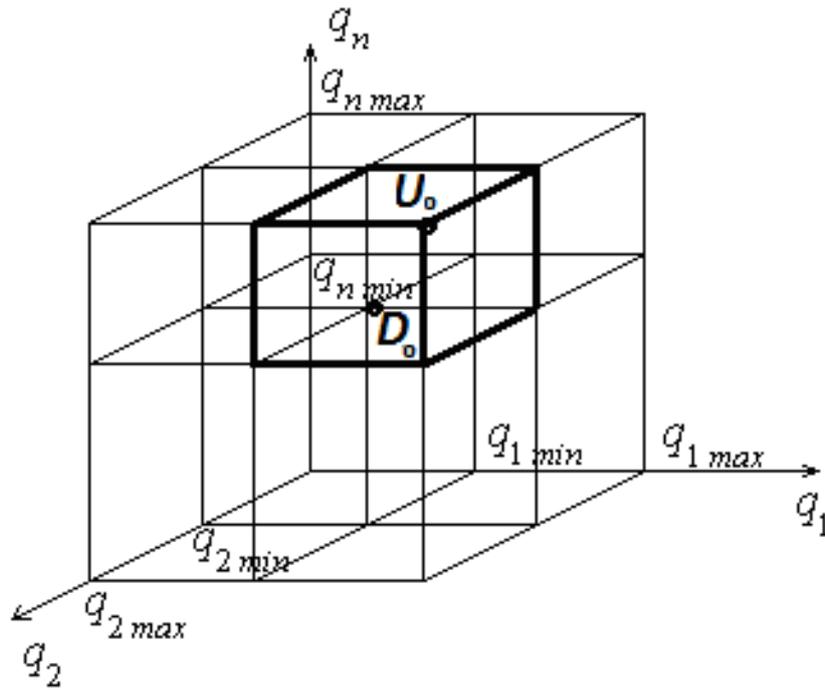


Рис. 1. Графическое изображение области допустимых значений параметров

где

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \dots \\ d_{n1} \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \dots \\ d_{n2} \end{pmatrix}, \dots, D_m = \begin{pmatrix} d_{1m} \\ d_{2m} \\ \dots \\ d_{nm} \end{pmatrix} \text{ и } U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \dots \\ u_{n1} \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \dots \\ u_{n2} \end{pmatrix}, \dots, U_m = \begin{pmatrix} u_{1m} \\ u_{2m} \\ \dots \\ u_{nm} \end{pmatrix}$$

вектор – столбцы минимальных и максимальных граничных значений параметров для соответствующих вариантов, при этом

$$G_1 \subseteq G_U, G_2 \subseteq G_U, \dots, G_m \subseteq G_U.$$

Области  $G_1, G_2, \dots, G_m$  могут иметь различное положение в  $G_U$ , как это показано на рисунке 2 на примере четырех реализаций (при  $m = 4$ ).

Положение области  $G_r$  внутри  $G_U$  характеризует запас «надежности» функционирования устройства. Поэтому оно может служить критерием предпочтения при выборе конкретной реализации. Чем дальше границы области  $G_r$  отстоят от границ области  $G_U$ , тем меньше вероятность того, что изменения факторов внешней среды или какие-либо другие причины приведут к выходу точки  $Q$  за пределы области  $G_U$ .

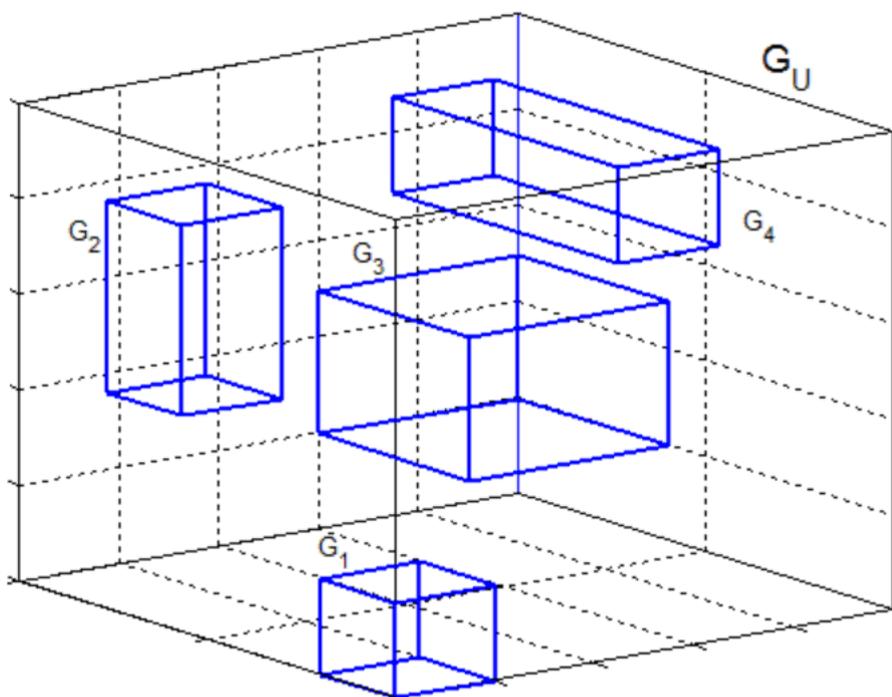


Рис. 2. Пример расположения областей числовых значений параметров для четырех классов технической реализации устройства в области их допустимых значений

**Формализация процесса выбора.** В зависимости от назначения и особенностей технических устройств возможны различные варианты граничных условий, обусловленные сочетанием граничных значений  $q_{\min}$  и  $q_{\max}$ , что отражено в табл. 1.

Таблица 1. Варианты граничных условий

| <i>Тип ограничения</i> | <i>Границы</i> |            |
|------------------------|----------------|------------|
|                        | $q_{\min}$     | $q_{\max}$ |
| Двухстороннее          | $a$            | $b$        |
| Одностороннее снизу    | $b$            | $\infty$   |
| Одностороннее сверху   | $-\infty$      | $a$        |

Рассмотрим числовые оценки, которые могут быть использованы при формировании критериев взаимного расположения областей. Для произвольного  $j$ -го варианта реализации устройства ( $j \in [1, m]$ ) введем  $\Delta q_{ij}$  – запас по  $i$ -му параметру.

В зависимости от варианта ограничения запас может вычисляться по разному:

$\Delta q_{ij} = \Delta q_{ij}^l(d_{ij}, d_{i0}) = d_{ij} - d_{i0}$  – отклонение нижнего граничного значения  $i$ -го параметра от его нижнего предельного значения,

$\Delta q_{ij} = \Delta q_{ij}^h(u_{ij}, u_{i0}) = u_{i0} - u_{ij}$  – отклонение верхнего граничного значения  $i$ -го параметра от его верхнего предельного значения,

$\Delta q_{ij} = \min[\Delta q_{ij}^l(d_{ij}, d_{i0}), \Delta q_{ij}^h(u_{ij}, u_{i0})]$  – запас по  $i$ -му параметру при двухстороннем ограничении.

Каждое значение  $\Delta q_{ij}$  характеризует степень уязвимости  $i$ -го варианта по параметру  $j$ . Совокупность всех значений  $\Delta q_{ij}$  образует матрицу запасов все элементы которой являются неотрицательными числами

$$\Delta Q = \begin{pmatrix} \Delta q_{11} & \Delta q_{12} & \dots & \Delta q_{1m} \\ \Delta q_{21} & \Delta q_{22} & \dots & \Delta q_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta q_{n1} & \Delta q_{n2} & \dots & \Delta q_{nm} \end{pmatrix}.$$

Случаю  $\Delta q_{ij} = 0$  соответствует полное отсутствие запаса по  $i$ -му параметру в  $j$ -м варианте реализации устройства. Чем значительнее элемент  $j$ -го столбца матрицы  $\Delta Q$  отличаются от нуля, тем лучше. Поэтому большее предпочтение должно быть отдано вариантам с возможно большими значениями запасов по параметрам.

Среди всех возможных  $m$  вариантов предпочтение следует отдать варианту с номером  $j_{opt}$ , имеющим максимальные запасы по всем параметрам, т.е.

$$\forall_{j \in [1, m]} q(j_{opt}) \geq q(j).$$

Однако чаще всего такой вариант отсутствует. Поэтому задача выбора становится неоднозначной и зависит от особенностей предполагаемого применения устройства и цели выбора.

Например, при выборе варианта с максимальным запасом следует использовать **максиминный** критерий. В соответствии с ним сначала для каждого  $j$ -го варианта реализации определяют элементы с минимальными запасами.

Выделяя их из матрицы  $\Delta Q$  формируют вектор уязвимых параметров

$$K = \min_j(\Delta_{ij}),$$

в котором выбирают элемент  $\Delta q_{opt}$  с максимальным значением  $Q$  и определяют его порядковый номер  $J_{opt}$ . Этот номер, соответствующий варианту с наибольшим запасом, является предпочтительным.

Таким образом, согласно этому критерию выбор предпочтительного варианта технического решения может быть сведен к задаче определения номера столбца с оптимальный элементом, удовлетворяющим логическому условию

$$\Delta q_{opt} = \bigcup_{i=1}^n \left( \bigcap_{j=1}^m \Delta q_{ij} \right),$$

решение которой соответствует выбору варианта с максимальным уровнем запаса, при котором среди наихудших вариантов (с минимальным запасом) выбирается наилучший (максимальный), что обеспечивает гарантированный запас.

Возможно применение других критериев. Например:

$$\Delta q_{opt} = \bigcup_{i=1}^n \left( \bigcup_{j=1}^m \Delta q_{ij} \right) - \text{соответствует выбору наиболее престижного}$$

варианта, т.е. обладающего наибольшим запасом (наилучший из вариантов с максимальным запасом по какому-либо из параметров,

$$\Delta q_{opt} = \bigcap_{i=1}^n \left( \bigcap_{j=1}^m \Delta q_{ij} \right) - \text{определяет наименее престижный вариант,}$$

$$\Delta q_{opt} = \bigcap_{i=1}^n \left( \bigcup_{j=1}^m \Delta q_{ij} \right) - \text{наихудший из вариантов с максимальным}$$

запасом по какому-либо параметру.

В среде MATLAB эти процедуры реализуется соответственно функциями:

$$[\Delta q_{opt}, J_{opt}] = \max(\min(\Delta Q)) - \text{для максиминного критерия и}$$

$$[\Delta q_{opt}, J_{opt}] = \max(\max(\Delta Q)), \quad [\Delta q_{opt}, J_{opt}] = \min(\min(\Delta Q)),$$

$[\Delta q_{opt}, J_{opt}] = \min(\max(\Delta Q))$  – для выше рассмотренных дополнительных критериев.

Работа этих функций сводится к определению в матрице  $\Delta Q$  оптимального по заданному критерию элемента  $\Delta q_{opt}$  и номера столбца  $j_{opt}$ , соответствующего этому элементу, т.е. определению номера предпочтительного варианта.

Для примера рассмотрим цифровой регулятор переменного напряжения на основе дискретно-регулируемого трансформатора. Для него возможно множество вариантов реализации. Описание возможных структур такого регулятора приведено в [2]. Требования к трем основным параметрам регулятора приведены в табл. 2.

Таблица 2. Требования к основным параметрам регулятора

| Параметр               | Требования         | Ед. изм. |
|------------------------|--------------------|----------|
| Напряжение на нагрузке | $u \in [209, 231]$ | В        |
| Быстродействие         | $b \geq 2$         | В/с      |
| Коэффициент гармоник   | $k \leq 7$         | %        |

Для его параметров и их предельных значений имеем

$$q_1 = U, q_{1\min} = u_{\min} = 209, q_{1\max} = u_{\max} = 231,$$

$$q_2 = b, q_{2\min} = b_{\min} = 2, q_{2\max} = \infty,$$

$$q_3 = k, q_{3\min} = -\infty, q_{3\max} = k_{\max} = 7.$$

Отсюда, на основании (2):

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ b \\ k \end{pmatrix}, D_0 = \begin{pmatrix} 209 \\ 2 \\ -\infty \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} 231 \\ \infty \\ 7 \end{pmatrix}.$$

В результате исследований пяти различных вариантов реализаций регулятора получены предельные значения их параметров, приведенные в табл. 3.

Таблица 3. Результаты исследований различных вариантов реализаций

| Параметры    | Номер варианта $j$ |           |           |           |           |
|--------------|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|              | 1                  | 2         | 3         | 4         | 5         |
| $u_{\min j}$ | 222                | 212       | 218       | 215       | 210       |
| $u_{\max j}$ | 231                | 226       | 224       | 228       | 225       |
| $b_{\min j}$ | 12                 | 8         | 2         | 4         | 16        |
| $b_{\max j}$ | $\infty$           | $\infty$  | $\infty$  | $\infty$  | $\infty$  |
| $k_{\min j}$ | $-\infty$          | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $k_{\max j}$ | 5                  | 6         | 2         | 1         | 3         |

В соответствии с данными этой таблицы и (3) получим

$$D_1 = \begin{pmatrix} 222 \\ 12 \\ -\infty \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 212 \\ 8 \\ -\infty \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 218 \\ 2 \\ -\infty \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 215 \\ 4 \\ -\infty \end{pmatrix}, D_5 = \begin{pmatrix} 210 \\ 16 \\ -\infty \end{pmatrix}$$

и

$$U_1 = \begin{pmatrix} 231 \\ \infty \\ 5 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 226 \\ \infty \\ 6 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 224 \\ \infty \\ 2 \end{pmatrix}, U_4 = \begin{pmatrix} 228 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix}, U_5 = \begin{pmatrix} 215 \\ \infty \\ 3 \end{pmatrix}.$$

На основании (4) определим матрицу запасов

$$\Delta Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 3 & 1 \\ 10 & 6 & 0 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

В таблице 4 приведены результаты применения логических операций дизъюнкции и конъюнкции для матрицы запасов. Цифры, соответствующие минимальным и максимальным элементам, отмечены диакритическими знаками кратки и перевернутой кратки соответственно.

Таблица 4. Результат применения логических операций дизъюнкции и конъюнкции для матрицы запасов

| $\Delta Q$  | $\min(\Delta Q)$  | $\max(\Delta Q)$  |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 3 & 1 \\ 10 & 6 & 0 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \check{0} & 3 & 7 & 3 & \check{1} \\ 10 & 6 & \check{0} & \check{2} & 14 \\ 2 & \check{1} & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 3 & \widehat{7} & 3 & 1 \\ \widehat{10} & \widehat{6} & 0 & 2 & \widehat{14} \\ 2 & 1 & 5 & \widehat{6} & 4 \end{pmatrix}$ |

Результаты применения различных вариантов критериев для матрицы  $\Delta Q$  приведены в табл. 5.

Таблица 5. Результаты применения различных вариантов критериев

| $\max(\min(\Delta Q))$  | $\min(\min(\Delta Q))$  | $\max(\max(\Delta Q))$  | $\min(\max(\Delta Q))$  |
|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} \check{0} & 3 & 7 & 3 & \check{1} \\ 10 & 6 & \check{0} & \check{2} & 14 \\ 2 & \check{1} & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \check{\check{0}} & 3 & 7 & 3 & \check{\check{1}} \\ 10 & 6 & \check{\check{0}} & \check{\check{2}} & 14 \\ 2 & \check{\check{1}} & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 3 & \widehat{7} & 3 & 1 \\ \widehat{10} & \widehat{6} & 0 & 2 & \widehat{\widehat{14}} \\ 2 & 1 & 5 & \widehat{6} & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 3 & \widehat{7} & 3 & 1 \\ \widehat{10} & \check{\check{6}} & 0 & 2 & \widehat{14} \\ 2 & 1 & 5 & \check{\check{6}} & 4 \end{pmatrix}$ |

Элементы, отвечающие этим критериям, отмечены двумя диакритическими знаками и выделены жирным шрифтом.

Кроме рассмотренных возможны и другие варианты критериев предпочтений, например, критериев, связанных с вычислением средних значений запасов для каждого из вариантов. Если задаться целью определения варианта с максимальным средним арифметическим уровнем запаса

$$[dq, j_{opt}] = \max \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta q_{ij} \right), \quad (4)$$

то предпочтительным окажется последний пятый вариант технического решения, что отражено в табл. 6.

Если техническим параметрам устройства с помощью вектора  $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m]$  придать соответствующие их важности весовые коэффициенты, то для определения предпочтительного варианта может использоваться критерий

$$[dq, j_{opt}] = \max \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \Delta q_{ij} \right). \quad (5)$$

Примеры его применения при различных значениях компонентов вектора  $V$  приведены в табл. 7.

Таблица 6. Применение критерия средних значений запасов

| Критерий запаса   | Варианты |        |        |        |               |
|---|----------|--------|--------|--------|---------------|
|   | 1        | 2      | 3      | 4      | 5             |
| $\max\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta q_{ij}\right)$ | 4.0000   | 3.3333 | 4.0000 | 3.6667 | <b>6.3333</b> |

Таблица 7. Применение критерия взвешенных средних значений запасов

| Критерии запаса<br>$\max\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \Delta q_{ij}\right)$ | Варианты |        |               |               |        |
|--|----------|--------|---------------|---------------|--------|
|  | 1        | 2      | 3             | 4             | 5      |
| $V_1 = [0.2 \ 0.1 \ 0.7]$  | 2.4000   | 1.9000 | 4.9000        | <b>5.0000</b> | 4.4000 |
| $V_2 = [0.8 \ 0.1 \ 0.1]$  | 1.4000   | 3.2000 | <b>6.6000</b> | 3.8000        | 3.0000 |

Предлагаемые критерии предпочтительности актуальны при проектировании специальных источников питания, например, для получения однослойных и многослойных нанотрубок высокого качества плазмохимическим способом [4] или установок по выращиванию лейкосапфиров [3]. При этом необходимо учитывать специфические технологические условия: температура синтеза, давление, среда газа и его компоненты и составы катализаторов и т.д. В результате технологическая установка синтеза углеродных наноструктурных материалов характеризуется совокупностью параметров. Выход за предельно допустимые значения чреват либо отсутствием синтеза, либо получением материала другого качества. При этом разработчик сталкивается с проблемой неоднозначности выбора того или иного решения. Как правило, выбор производится на основании опыта предыдущих разработчиков или его интуиции. Могут быть использованы и более эффективные, но, тем не менее, не достаточно формализованные методы [2]. Однако, применение критериев предпочтительности обеспечивает нахождение оптимального варианта технических устройств.

**Вывод.** Рассмотренные примеры применения критериев показывают их универсальность и гибкость. Это их свойство наряду с четко

определенным алгоритмом вычисления запасов позволяет существенно повысить эффективность поиска предпочтительного варианта технического решения.

### Список литературы

1. Сорокин, А. А. Проблемы выбора технических решений: Учебное пособие / А. А. Сорокин; В. В. Юдин, Ю. В. Семенова.— Рыбинск: РГАТА,— 2008.— 138 с.

2. Юдин А. В. Оптимизация структуры цифрового регулятора переменного напряжения на основе дискретно-регулируемого трансформатора: Справочник. Инженерный журнал, Москва, ОАО Издательство "Машиностроение".— 2011.— №3.— С. 44–47.

3. Манин А.В., Юдин А.В., Елисеичев Е.А., Схемотехника источников вторичного электропитания для установок выращивания монокристаллов лейкосапфира // Вестник РГАТУ имени П.А. Соловьева. — 2015.— №3 (34).— С.149–153.

4. Манин А. В., Жаббаров И. М., Елисеичев Е.А., Юдин В.В. Установка синтеза углеродных наноструктур плазмохимическим методом для исследовательских целей // Вестник РГАТУ имени П.А. Соловьева. — 2018.— № 2 (45).— С. 147–153.

**Манин Алексей Васильевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры электротехники и промышленной электроники ФГБОУ ВО «Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьёва». E-mail: manin-rgata@mail.ru Телефон +7-920-118-84-42

**Юдин Виктор Васильевич** – доктор технических наук, профессор кафедры электротехники и промышленной электроники ФГБОУ ВО «Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьёва». E-mail: YudinVV47@mail.ru

**Юдин Алексей Викторович** – доктор технических наук, заведующий кафедрой электротехники и промышленной электроники ФГБОУ ВО «Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьёва». E-mail: judinav@mail.ru

## О СВОЙСТВАХ КАЛИБРОВКИ ЛОРЕНЦА В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Е. Н. Меньшов

*Показано, что преобразования Лоренца основаны на калибровке Лоренца для потенциалов и на уравнении непрерывности тока для силовых характеристик поля. Из калибровки Лоренца следует, что при равномерном движении электрического заряда отсутствует решение волновых уравнений в форме «запаздывающих» потенциалов. При ускоренном движении электрического заряда калибровка Лоренца становится критерием бегущих волн.*

*It is shown that the Lorentz transformations are based on the Lorentz calibration for potentials and on the current continuity equation for the force characteristics of the field. From the Lorentz calibration, it follows that there is no solution of wave equations in the form of "lagging" potentials when the electric charge is moving uniformly. With the accelerated movement of an electric charge, the Lorentz calibration becomes a criterion for traveling waves.*

**Введение.** Теория относительности требует, чтобы уравнения, выражающие законы природы, были инвариантными относительно преобразования Лоренца. Преобразования Лоренца определяются многими путями. Если в теории относительности преобразования Лоренца вводятся на основе двух постулатов (постоянства скорости света и принципа относительности), то впервые Лоренц получил свои преобразования непосредственно из решения уравнений Максвелла и сделал важное математическое открытие, что волновое уравнение для потенциалов инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Калибровка Лоренца в современной теории электромагнитного поля предназначена для удобства представления волновых уравнений электродинамических потенциалов в одинаковой форме [1]. При этом в качестве критериев инвариантности в теории относительности

используется математический аппарат четырехмерного мира, в котором калибровка Лоренца констатируется в форме релятивистки инвариантном четырехмерном уравнении дивергенции, а переход от одной координаты к другой в четырехмерном мире производится при помощи преобразований Лоренца.

В предлагаемой работе акцентируются важные свойства динамики ЭМП, которые могут иметь эвристическое значение для теории электромагнитного поля. Для этого разработан еще один очевидный способ вывода преобразований Лоренца (который не заслонен сложными выражениями четырехмерной математики) – из электромагнитных уравнений на основе подхода, предложенного в [2].

**Основная часть.** Для определения решения системы уравнений Максвелла традиционно её приводят к волновым уравнениям. Например, относительно характеристик поля в вакууме – для напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  соответственно:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0}; \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{J}, \quad (2)$$

где  $\rho$  - объемная плотность заряда,  $\nabla$  – оператор набла,  $\mathbf{J}$  – плотность тока. Причем  $\mathbf{J}$  и  $\rho$  связаны уравнением непрерывности тока

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3)$$

Пусть источником поля является движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  точечный заряд  $q$ , положение которого в пространстве задается радиус вектором  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор неподвижной точки;  $\mathbf{r}_0(t)$  – радиус-вектор заряда, объемная плотность которого  $\rho = q\delta(\mathbf{R})$ ,  $\delta(\mathbf{R})$  – функция Дирака. Плотность тока переноса выражается через плотность заряда следующим образом:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}. \quad (4)$$

Волновые уравнения для электродинамических потенциалов при калибровке Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

принимают подобный вид:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = - \left( \frac{\mathbf{v}}{c^2} \right) \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (7)$$

Если  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = const$ , то непосредственно из подобности уравнений (6) и (7) электродинамические потенциалы связаны формулой:

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\mathbf{v}_0}{c^2} \right) \varphi. \quad (8)$$

Обратим внимание на следующее преобразование: подставив (8) в формулу калибровки Лоренца (5), получим строгое преобразование производной по времени скалярного потенциала для равномерно движущегося заряда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -(\mathbf{v}_0 \nabla \varphi) = -(\mathbf{v}_0 \nabla) \varphi; & \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2} &= -(\mathbf{v}_0 \nabla) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &= (\mathbf{v}_0 \nabla)^2 \varphi. & (9) \end{aligned}$$

Выражение (9) означает, что потенциал  $\varphi$  является функцией от аргумента  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t$ . Физически такая зависимость свидетельствует о том, что изменение потенциала не связано с электромагнитным возмущением, которое перемещается со скоростью света  $c$ . Математически взятие производной по времени от  $\varphi$  проводится как от сложной функции  $\varphi(\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)) = \varphi(X(x, t), Y(y, t), Z(z, t))$ , где  $(X = x - v_{0x}t, Y = y - v_{0y}t, Z = z - v_{0z}t)$  координаты радиус вектора  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ , соединяющего заряд с точкой, в которой определяется электромагнитное поле. Поэтому в соответствии с (9) оператор дифференцирования по времени в координатной форме примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -(\mathbf{v}_0 \nabla) = \frac{dX}{dt} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{dY}{dt} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{dZ}{dt} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad (10)$$

и соответственно оператор Даламбера  $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  принимает вид  $\nabla^2 - \frac{(\mathbf{v}_0 \nabla)^2}{c^2}$ . При этом волновое уравнение (7) преобразуется к следующему виду:

$$\left( \nabla^2 - \frac{(\mathbf{v}_0 \nabla)^2}{c^2} \right) \varphi(\mathbf{R}) = - \frac{\rho(\mathbf{R})}{\varepsilon_0}. \quad (11)$$

Пусть теперь вектор скорости заряда ориентирован в направлении координатной оси  $OX$  неподвижной системы отсчета, то  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{i}$ , а левый оператор уравнения (11) в координатной форме приводится к виду:

$$\begin{aligned} \nabla^2 - \frac{(\mathbf{v}_0 \nabla)^2}{c^2} &\equiv \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( 1 - \left( \frac{v_0}{c} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \\ &\equiv \Delta', \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\Delta'$  – эквивалентный оператор *Лапласа* в новой инерциальной системе отсчета координат.

Операторное уравнение (12) характеризует путь преобразования оператора Даламбера  $\square$  к эквивалентному оператору Лапласа  $\Delta'$  и приводит к следующим преобразованиям координат:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{X}{\sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{c} \right)^2}} = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{c} \right)^2}}; & y' &= Y = y; & z' &= Z \\ &= z, \end{aligned} \quad (13)$$

которые совпадают с преобразованиями Лоренца [1, 2].

Представив объемную плотность  $\rho(\mathbf{R})$  точечного заряда через функцию Дирака  $q\delta(\mathbf{R}) = q\delta(X)\delta(Y)\delta(Z)$ , в которую подставим новые координаты из (13) и применим процедуру преобразования аргумента обобщенной функции, в результате получим формулу преобразования для плотности заряда

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{R}) &= q\delta\left(x' \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{c} \right)^2}\right) \delta(y') \delta(z') = \frac{q\delta(x')\delta(y')\delta(z')}{\sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{c} \right)^2}} \\ &= \frac{\rho'(\mathbf{R}')}{\sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{c} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Формула (14) совпадает с известной формулой, соответствующей преобразованиям Лоренца [1]. Здесь  $\rho'(\mathbf{R}')$  объемная плотность точечного заряда в собственной системе координат (в подвижной инерциальной системе отсчета, которая перемещается со скоростью  $v_0$ ).

Уравнение (11) с учетом (12) и (14) примет вид:

$$\Delta' \varphi(\mathbf{R}') = - \frac{\rho'(\mathbf{R}')}{\varepsilon_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}. \quad (15)$$

Из (15) следует, что скалярный потенциал преобразуется по закону

$$\varphi(\mathbf{R}') = \frac{\varphi'(\mathbf{R}')}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}},$$

который совпадает с законом преобразования Лоренца [1]. При этом уравнение (15) приобретает вид, аналогичный уравнению Пуассона для электростатического поля

$$\Delta' \varphi'(\mathbf{R}') = - \frac{\rho'(\mathbf{R}')}{\varepsilon_0}. \quad (16)$$

В собственной системе отсчета  $J' = 0$ , поэтому векторный потенциал  $\mathbf{A}' = 0$ .

Подставив (13) в инвариант преобразования Лоренца [1]

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2,$$

получим формулу преобразования времени

$$t' = \frac{t - v_0 x / c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}.$$

Таким образом, изложенный метод преобразования волновых уравнений электродинамических потенциалов переводит уравнения (6) - (7), записанные относительно неподвижной системе отсчета, в уравнение Пуассона (16), записанное в собственной системе отсчета. Этот метод работает верно, так как приводит к преобразованиям Лоренца (13).

Соотношение (8) между векторным  $\mathbf{A}$  и скалярным  $\varphi$  потенциалами в случае произвольной скорости движения заряда, получают, например, или алгеброй преобразования четырехмерных потенциалов, или путем непосредственного решения дифференциальных уравнений (6) - (7), и называют потенциалами Лиенара-Вихерта [3].

В рамках излагаемого подхода для общего случая установим дополнительные требования, подставив (8) в (6), получим

$$\begin{aligned} \varphi \square \mathbf{v} + 2 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \mathbf{v} \left( \square \varphi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) \\ \equiv 0, \quad (17) \end{aligned}$$

которое имеет решение при условии  $\square \mathbf{v} = 0$ , при этом второе слагаемой становится тождественно равным нулю, и выражение (17) приводится к следующему виду:

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Согласно принципу Даламбера физически реализуемым решением однородного волнового уравнения является функция от «запаздывающего» момента времени  $\mathbf{v} = \mathbf{v} \left( t - \frac{R(\tau)}{c} \right) = \mathbf{v}(\tau)$ ; решением неоднородного волнового уравнения (17) является функция  $\varphi(\tau)$ . Таким образом, «запаздывающий» момент времени  $\tau$  характерен только при ускоренном движении заряда.

В случае кулоновской калибровки  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  проведем преобразования волновых уравнений (1) – (2). Подставив (4) в (3), получим выражение, аналогичное (9),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{v}_0 \nabla \rho), \quad (18)$$

которое будет характеризовать аргумент зависимости  $\rho(\mathbf{R})$ , структуру оператора  $(\mathbf{v}_0 \nabla)$  в координатной форме (10) и уравнение (1) в виде

$$\left( \nabla^2 - \frac{(\mathbf{v}_0 \nabla)^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \nabla \rho - \frac{\mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \nabla \rho)}{c^2} \right), \quad (19)$$

левый оператор, который преобразуется так же, как (12), а правый при  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{i}$  преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \left( \left( \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{c} \right)^2} \frac{\partial}{\partial X} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{c} \right)^2} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial Y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial Z} \mathbf{k} \right) \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x'} \mathbf{i}' + \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{j}' + \frac{\partial}{\partial z'} \mathbf{k}' \right) \\ = \nabla'. \quad (20) \end{aligned}$$

В (20):  $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$ ;  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ ;  $\mathbf{i}' = \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{c} \right)^2} \mathbf{i}$ . Последняя формула выражает условие, что для вектора  $\mathbf{i}$  собственной системой отсчета является неподвижная система отсчета (без штрихов).

Подставив (14) и (20) в (19) и учтя (12), получим:

$$\Delta' \left( E_x \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} \mathbf{i} + E_y \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} \mathbf{j} + E_z \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} \mathbf{k} \right) = \frac{\rho'(\mathbf{R}')}{\varepsilon_0};$$

$$\Delta'(E'_x \mathbf{i}' + E'_y \mathbf{j}' + E'_z \mathbf{k}') \equiv \Delta' \mathbf{E} = \frac{\rho'(\mathbf{R}')}{\varepsilon_0}. \quad (21)$$

В (21)  $E'_x = E_x$ ;  $E'_y = E_y \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}$ ;  $E'_z = E_z \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}$ , так как магнитное поле неподвижного заряда равно нулю (в подвижной системе отсчета). Уравнение (2) преобразуется к виду  $\Delta' \mathbf{B}' = 0$ .

Таким образом, на основе уравнения непрерывности тока (3) и уравнения переноса тока (4) проведено преобразование волновых уравнений для силовых характеристик поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  из неподвижной системы отсчета в подвижную инерциальную систему отсчета. Преобразования Лоренца (13) выводятся здесь из процедур рассматриваемого метода преобразования.

### Выводы

1. Установлено, что преобразования Лоренца волновых уравнений электромагнитного поля выводятся **при наличии пары связей** между векторно-скалярными характеристиками источников поля и между электромагнитными потенциалами:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}, \quad \text{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{A} = \left(\frac{v_0}{c^2}\right) \varphi,$$

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

где первая пара приводит к инвариантности волновых уравнений силовых характеристик электромагнитного поля относительно преобразования Лоренца, а вторая пара приводит к инвариантности волновых уравнений потенциалов относительно преобразования Лоренца.

2. Калибровка Лоренца по своей сути **является нестационарным уравнением непрерывности векторного потенциала  $\mathbf{A}$** .

3. Решения однородных волновых уравнений потенциалов состоят из бегущих волн, а решения неоднородных уравнений состоят из «запаздывающих» потенциалов. Поэтому **калибровка Лоренца**

допускает решения волновых уравнений потенциалов в виде бегущих волн с «запаздывающим» моментом времени  $\tau = t \pm R(\tau)/c$ .

4. При кулоновской калибровке скалярный потенциал определяется распределением зарядов так, как будто бы они покоились [3] и, как уже отмечалось в классической литературе [4], уравнения для электромагнитных потенциалов не инвариантны относительно преобразований Лоренца. Эта калибровка не изменяет физического смысла решений уравнений Максвелла и порождает поперечные моды векторного потенциала, поэтому **она распространена в квантовой теории поля.**

5. При равномерном движении заряда отсутствуют электромагнитные излучения. А из калибровки Лоренца следует форма зависимости потенциала  $\varphi(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t)$  от времени, поэтому **при равномерном движении заряда отсутствуют «запаздывающие» потенциалы.** Такое поведение объясняется принципом относительности, а именно, равномерно перемещающийся наблюдатель сканирует **только** стационарное распределение **электромагнитного поля** покоящегося электрического заряда.

### Список литературы

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика, вып. 6; Пер. с англ. под ред. Я. А. Смородинского. – Москва: Мир, 1966. – 343 с.

2. Меньшов Е. Н. Метод анализа ЭМП равномерно движущегося заряда на основе модели Максвелла: Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. междунар. конф. «КЛИН-2004» (г. Ульяновск, 18-20 мая 2004 г.)/ Под общей ред. Л. И. Волгина. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – Том 4. – С. 97-102.

3. Левич В. Г. Курс теоретической физики. – Т.1. – М.: Наука, 1969. – 910 с.

4. Джексон Дж. Классическая электродинамика: Пер. с англ. под ред. Э.Л. Бурштейна. – М.: Мир, 1965. – 703 с.

**Меньшов Евгений Николаевич** – доцент энергетического факультета УлГТУ, men@ulstu.ru

# СХЕМНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ГРЕБНЫХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК ЭЛЕКТРОХОДОВ

Л. Н. Канов

*Предложена методика построения схемной модели судовой гребной электрической установки переменного тока с частотным управлением, состоящей из синхронного генератора и двигателя. Схемная модель предназначена для анализа переходных процессов при маневрировании судна. Методика проиллюстрирована расчетом переходного процесса пуска гребного электродвигателя и оценкой параметров пуска: длительностью процесса нарастания скорости и максимальных значений напряжения и вращающего момента. Результаты расчета двух вариантов пуска показали, что при слишком малом установленном времени пуска двигатель выпадает из синхронизма.*

*The method of construction of scheme model of the ship rowing electric setting of alternating current with a frequency management, consisting of synchronous generator and engine is offered. A scheme model is intended for the analysis of transients at maneuvering of ship. A method is illustrated the calculation of transient of starting of rowing electric motor and estimation of starting parameters: by duration of process of growth of speed and maximal values of tension and rotary-type moment. The results of calculation of two variants of starting showed that at the too small set time of starting an engine falls out of synchronism.*

**Введение.** В последнее время повысился интерес к использованию электродвижения на судах торгового и промыслового флота. Это обусловлено возможностью применения быстроходных тепловых двигателей, использованием нереверсивных двигателей упрощенной конструкции, дроблением полной мощности на части и работой одного теплового двигателя на несколько винтов, уменьшением длины валов [1]. Важнейшим преимуществом электродвижения является обеспечение

высоких маневренных свойств судов. Современные электрические гребные установки строятся на основе синхронных частотно-управляемых электродвигателей. В литературе рассматриваются аналитические и компьютерные методы расчета основных маневренных режимов – пуска, остановки и реверса гребных электродвигателей.

Математическое описание процессов, происходящих в гребных электрических установках даже в линейном варианте, отличается сложностью и обычно выполняется на основе векторных диаграмм, что ограничивает анализ динамических режимов [2, 3]. Поэтому актуален анализ динамических маневренных режимов судов с электродвижением на основе схемных моделей. В статье развивается метод схемного моделирования для анализа переходных процессов гребных электрических установок переменного тока на синхронных электрических машинах с частотным управлением.

**Представление математического описания гребной электрической установки.** Гребная электрическая установка состоит из теплового двигателя (дизеля), приводящего во вращение синхронный генератор, к которому подключается синхронный двигатель, вращающий гребной винт судна. Рассмотрим моделирование процесса пуска гребного синхронного двигателя, так как для повышения маневренности электрохода необходимо оценивать возможность пуска в заданное время без перегрузки тепловых двигателей и генераторов.

Для увеличения пускового момента гребной двигатель запускается при форсировке токов возбуждения генератора и двигателя. Увеличение частоты вращения двигателя производится повышением частоты напряжения генератора, которое достигается регулированием и увеличением скорости вращения дизельного двигателя в соответствии с заданными условиями пуска.

Электромагнитные процессы в гребной электрической установке переменного тока описываются уравнениями во вращающихся ортогональных  $dq$ – координатных осях относительно потокосцеплений, токов, напряжений и скоростей вращения электрических машин. Уравнения составляются в предположении ненасыщенности магнитных

цепей машин, отсутствия потерь в стали и при симметрии трехфазной системы напряжений и токов [3].

Определим магнитные потокоцепления статора. Продольная составляющая потокоцепления статора генератора:

$$\Psi_{d1} = x_{d1}i_{d1} + x_{adf1}i_{f1} + x_{ard1}i_{rd1},$$

где  $x_{d1}$  – продольное реактивное сопротивление фазы обмотки статора;  $x_{adf1}$ ,  $x_{ard1}$  – взаимные реактивные сопротивления фаз обмотки статора и обмотки возбуждения и продольного демпфирующего контура;  $i_{d1}$ ,  $i_{rd1}$  – продольная составляющая фазного тока статора и ток продольного демпфирующего контура ротора;  $i_{f1}$  – ток обмотки возбуждения.

Потокоцепление обмотки возбуждения ротора генератора:

$$\Psi_{f1} = x_{adf1}i_{d1} + x_{f1}i_{f1} + x_{frd1}i_{rd1},$$

где  $x_{f1}$  – реактивное сопротивление обмотки возбуждения ротора;  $x_{frd1}$  – взаимное реактивное сопротивление обмотки возбуждения и продольного демпфирующего контура.

Потокоцепление продольного демпфирующего контура ротора:

$$\Psi_{rd1} = x_{ard1}i_{d1} + x_{frd1}i_{f1} + x_{rd1}i_{rd1},$$

где  $x_{rd1}$  – реактивное сопротивление продольного контура.

Поперечная составляющая потокоцепления статора генератора:

$$\Psi_{q1} = x_{q1}i_{q1} + x_{arq1}i_{rq1},$$

где  $x_{q1}$  – реактивное поперечное сопротивление обмотки статора и взаимное реактивное сопротивление обмотки статора и поперечного демпфирующего контура ротора;  $i_{q1}$  – поперечная составляющая тока фазы статора;  $i_{rq1}$  – ток поперечного демпфирующего контура ротора.

Потокоцепление поперечного демпфирующего контура:

$$\Psi_{rq1} = x_{arq1}i_{q1} + x_{rq1}i_{rq1},$$

где  $x_{rq1}$  – реактивное сопротивление поперечного контура.

Общая система уравнений для продольных составляющих потокоцеплений статора имеет вид

$$\frac{d\Psi_{d1}}{dt} = \Psi_{q1}\omega_1 - R_{c1}i_{d1} + u_{d1}; \quad \frac{d\Psi_{f1}}{dt} = -R_{f1}i_{f1} + u_{f1}; \quad \frac{d\Psi_{rd1}}{dt} = -R_{rd1}i_{rd1}. \quad (1)$$

В этих формулах  $R_{c1}, R_{f1}, R_{rd1}$  – активные сопротивления фазы статора, обмотки возбуждения ротора и продольного демпфирующего контура ротора;  $u_{d1}$  – продольная составляющая фазного напряжения статора;  $u_{f1}$  – напряжение на обмотке возбуждения ротора;  $\omega_1$  – частота напряжения статора.

Система уравнений для поперечных составляющих потокосцеплений статора:

$$\frac{d\psi_{q1}}{dt} = -\psi_{d1}\omega_1 - R_{c1}i_{q1} + u_{q1}; \quad \frac{d\psi_{rq1}}{dt} = -R_{rq1}i_{rq1}, \quad (2)$$

где  $u_{q1}$  – поперечная составляющая фазного напряжения статора;  $R_{rq1}$  – активное сопротивление поперечного контура ротора.

Ротор генератора приводится во вращение дизельным двигателем; скорость вращения в относительных единицах совпадает с частотой напряжения генератора  $\omega_1$  и задается дизельным двигателем  $\omega_1(t)$  в зависимости от требуемого режима пуска гребной установки. Далее полагаем, что  $\omega_1(t)$  задана.

Уравнения двигателя имеют вид, аналогичный (1), (2):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{d2}}{dt} &= \psi_{q2}\omega_2 - R_{c2}i_{d2} + u_{d2}; & \frac{d\psi_{f2}}{dt} &= -R_{f2}i_{f2} + u_{f2}; & \frac{d\psi_{rd2}}{dt} &= -R_{rd2}i_{rd2}; \\ \frac{d\psi_{q2}}{dt} &= -\psi_{d2}\omega_2 - R_{c2}i_{q2} + u_{q2}; & \frac{d\psi_{rq2}}{dt} &= -R_{rq2}i_{rq2}. \end{aligned}$$

Уравнение движения ротора двигателя согласно второму закону Ньютона для вращательного движения имеет вид

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = M_{ДВ} - M_B(\omega_2), \quad (3)$$

где  $J_2$  – момент инерции на гребном валу;  $M_B(\omega_2)$  – момент сопротивления гребного винта;  $M_{ДВ}$  – вращающий момент двигателя

$$M_{ДВ} = \psi_{d2}i_{q2} - \psi_{q2}i_{d2}. \quad (4)$$

Угол рассогласования положения роторов системы генератор – двигатель определяется разностью  $\delta = \theta_1 - \theta_2$ . Производная угла рассогласования выражается через угловые скорости

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_1 - \omega_2. \quad (5)$$

Определяем с учетом угла рассогласования  $\delta$  связь между составляющими фазных токов и напряжений статора генератора и двигателя [3]

$$i_{d1} = -i_{d2} \cos\delta - i_{q2} \sin\delta; \quad i_{q1} = i_{d2} \sin\delta - i_{q2} \cos\delta; \quad (6)$$

$$u_{d2} = u_{d1} \cos\delta - u_{q1} \sin\delta; \quad u_{q2} = u_{d1} \sin\delta + u_{q1} \cos\delta. \quad (7)$$

Напряжения на обмотках возбуждения генератора и двигателя  $u_{f1}, u_{f2}$  задаются в соответствии с условиями пуска. Уравнения (1), (2) генератора и двигателя, а также уравнения (3) – (5) вместе с уравнениями (6), (7) для двигателя представляют математическое описание гребной электрической установки. Решение уравнений (1)–(7) выполним косвенно, через схемную модель на основе первого закона Кирхгофа.

### Построение схемной модели гребной электрической установки.

Так как составляющие токов статора генератора и двигателя связаны условием (6), далее везде будем заменять составляющие тока генератора  $i_{d1}, i_{q1}$  соответствующими составляющими тока статора двигателя  $i_{d2}, i_{q2}$ . Аналогично, ввиду связи между составляющими напряжения статора генератора и двигателя (7) в уравнениях двигателя заменим составляющие напряжения статора двигателя  $u_{d2}, u_{q2}$  на оставляющие напряжения статора генератора  $u_{d1}, u_{q1}$ .

Выразим далее из первого уравнения (1)  $u_{d1} = \frac{d\psi_{d1}}{dt} - \psi_{q1}\omega_1 + R_{c1}i_{d1}$ .

Производную получаем дифференцированием выражения для  $\psi_{d1}$ . Аналогично выразим из первого уравнения (2) напряжение  $u_{q1}$ :

$u_{q1} = \frac{d\psi_{q1}}{dt} + \psi_{d1}\omega_1 + R_{c1}i_{q1}$ . Производную получаем дифференцированием

выражения для  $\psi_{q1}$ . С учетом этих преобразований схемная модель системы уравнений (1)–(7) примет вид, изображенный на рис.1. Параметры управляемых источников приведены в Приложении.

Интеграторы на единичных емкостях  $C_1 - C_3$  определяют потокосцепления генератора  $\psi_{f1}, \psi_{rd1}, \psi_{rq1}$ . Сумматоры на единичных проводимостях  $g_1 - g_7$  определяют напряжение  $u_{d1}$ , потокосцепление  $\psi_{d1}$ , напряжение  $u_{q1}$ , потокосцепление  $\psi_{q1}$ , токи  $i_{f1}, i_{rd1}, i_{rq1}$ . Независимый

источник тока  $J = U_{f1}$  представляет управляющее напряжение на обмотке возбуждения генератора. Напряжения на единичных индуктивностях  $L_1, L_2$  дают производные потокосцеплений  $\frac{d\psi_{d1}}{dt}, \frac{d\psi_{q1}}{dt}$ , необходимые для вычисления напряжений  $u_{d1}, u_{q1}$ .

Напряжения на единичных емкостях  $C_4 - C_8$  определяют потокосцепления двигателя  $\psi_{d2}, \psi_{f2}, \psi_{rd2}, \psi_{q2}, \psi_{rq2}$ . Сумматоры на единичных проводимостях  $g_8 - g_{12}$  определяют токи двигателя  $i_{d2}, i_{f2}, i_{rd2}, i_{q2}, i_{rq2}$ . Независимый источник тока  $U_{f2}$  представляет управляющее напряжение на обмотке возбуждения двигателя. Сумматоры на единичных проводимостях  $g_{13} - g_{16}$  определяют токи статора генератора  $i_{d1}, i_{q1}$  через токи двигателя  $i_{d2}, i_{q2}$  и напряжения статора двигателя  $u_{d2}, u_{q2}$  через напряжения генератора  $u_{d1}, u_{q1}$ .

Интеграторы на единичных емкостях  $C_9 - C_{10}$  определяют скорость вращения двигателя  $\omega_2$  и угол рассогласования  $\delta$  между роторами генератора и двигателя. Управляемые источники  $J_{53}, J_{54}$  представляют вращающий момент двигателя; ток в нелинейной проводимости  $g_{17}$  определяет момент сопротивления винта. Независимый источник тока  $\omega_1$  представляет заданную частоту вращения приводного двигателя и генератора, и частоту напряжения генератора. Построенная схемная модель пригодна для анализа основных статических и динамических режимов гребной электрической установки. Модель рассчитывается при заданных  $u_{f1}(t), u_{f2}(t), \omega_1(t)$  программным обеспечением, допускающим построение управляемых источников, например, *EWB*.

**Обсуждение результатов.** Для иллюстрации далее представлены результаты расчета переходного процесса пуска гребного электродвигателя. Расчет выполнен в относительных единицах для синхронного двигателя мощностью 1500 кВт с напряжением 400 В, током 2380 А и номинальной частотой вращения 167 об/мин. Параметры генератора и двигателя представлены в Приложении. Вольтамперная характеристика нелинейной проводимости изображена на рис.2

(швартовая характеристика: зависимость момента сопротивления гребного вала от скорости вращения).

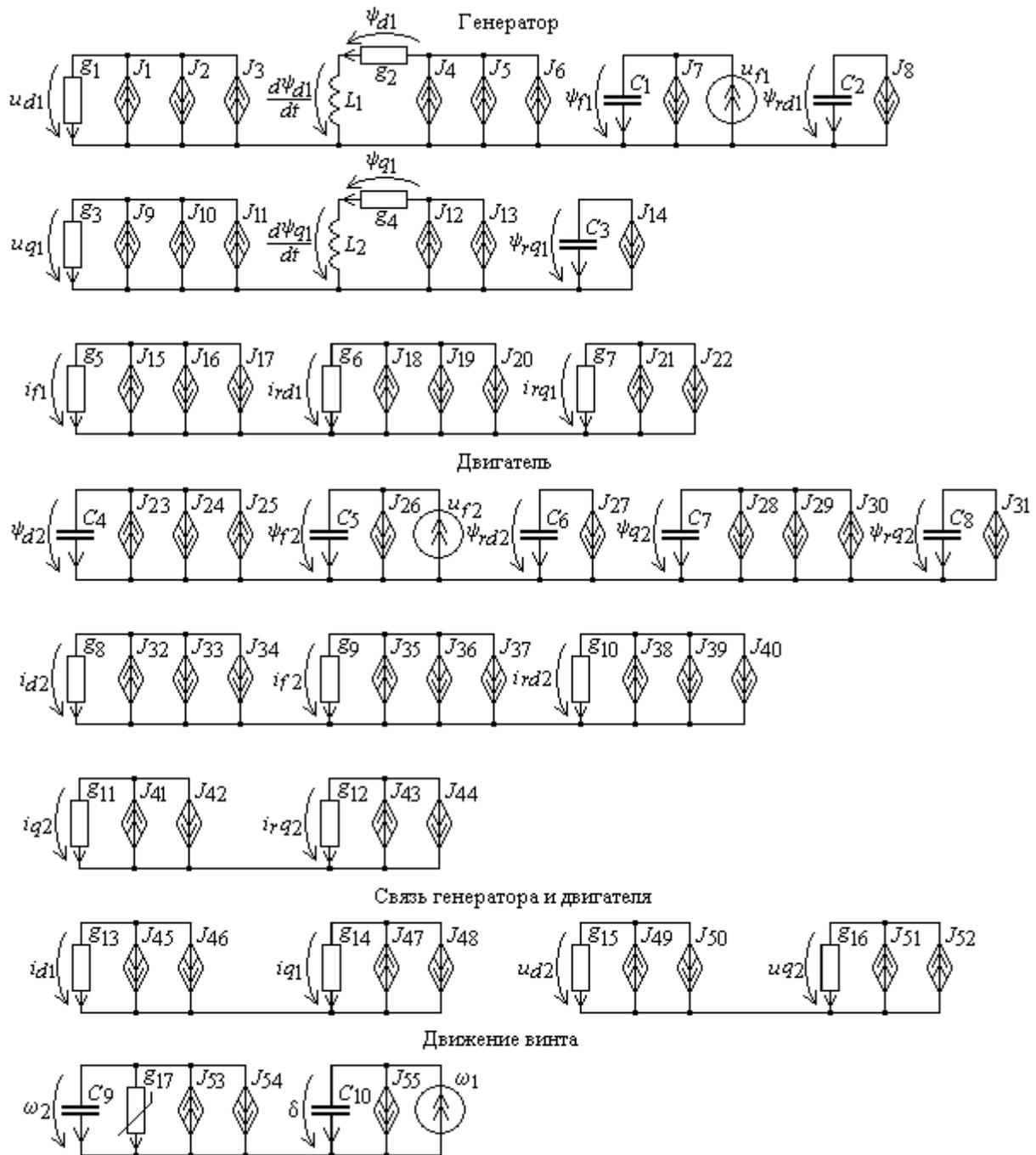


Рис.1. Схемная модель гребной электрической установки

На рис.3 изображены графики процесса пуска с форсировкой напряжений возбуждений  $u_{f1}$ ,  $u_{f2}$  с заданной длительностью  $\Delta t = 10$  с увеличения скорости  $\omega_1$ . Токи возбуждения достигают максимальных значений за 3 с и остаются на максимальном уровне до момента  $t = 12$  с.

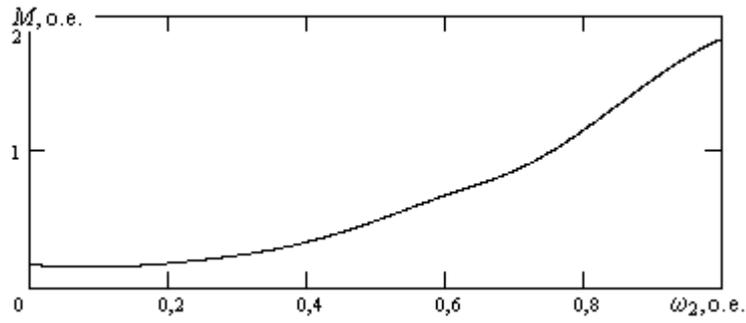


Рис.2. Швартовая характеристика гребного винта

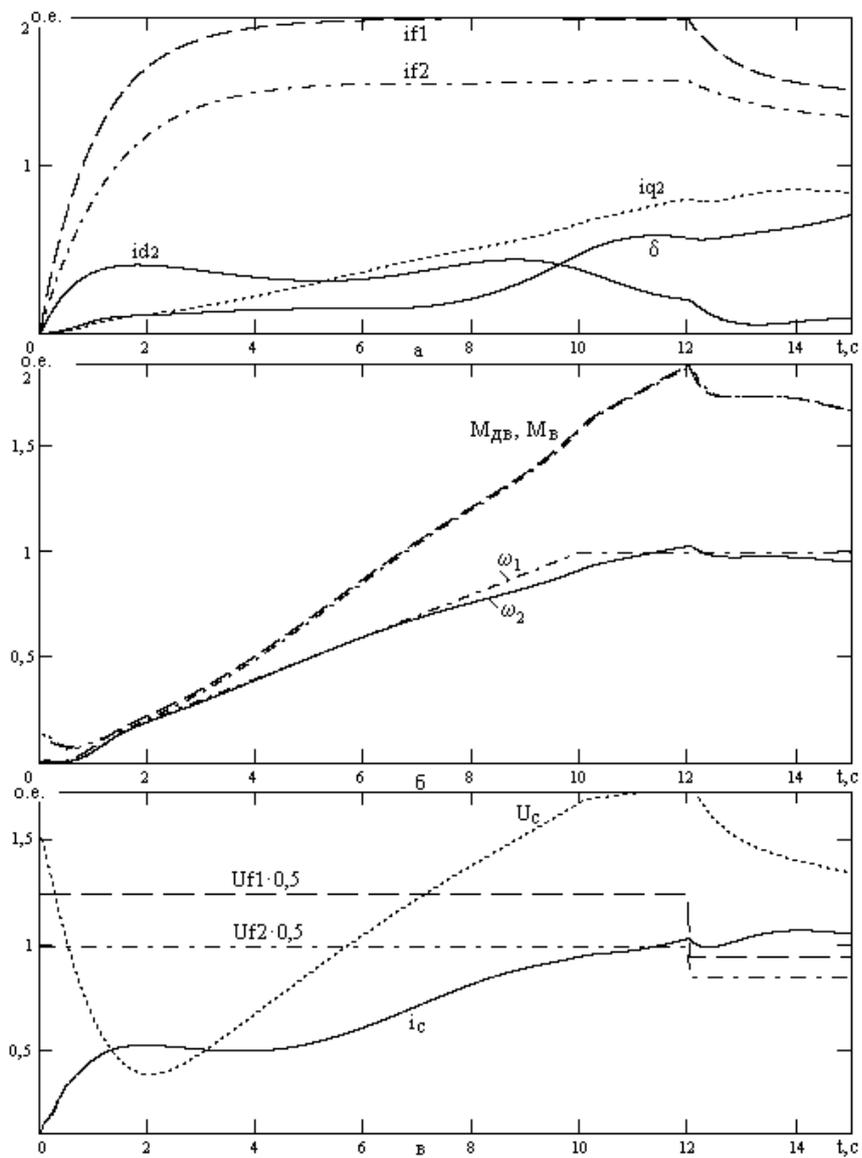


Рис. 3. Успешный процесс пуска гребной электрической установки

Далее форсировка снимается. Из рисунка следует, что скорость двигателя следует за ростом частоты генератора и к моменту  $t=12\text{с}$  достигает заданного уровня. Вращающий момент и напряжение на двигателе превышают номинальные значения в полтора раза. После снятия форсировки момент и напряжение снижаются, двигатель входит в номинальный режим. Угол рассогласования между роторами генератора и двигателя достигает  $36^\circ$ .

На рис.4 изображены графики неудавшегося пуска за слишком малое заданное время увеличения скорости  $t=5\text{с}$ .

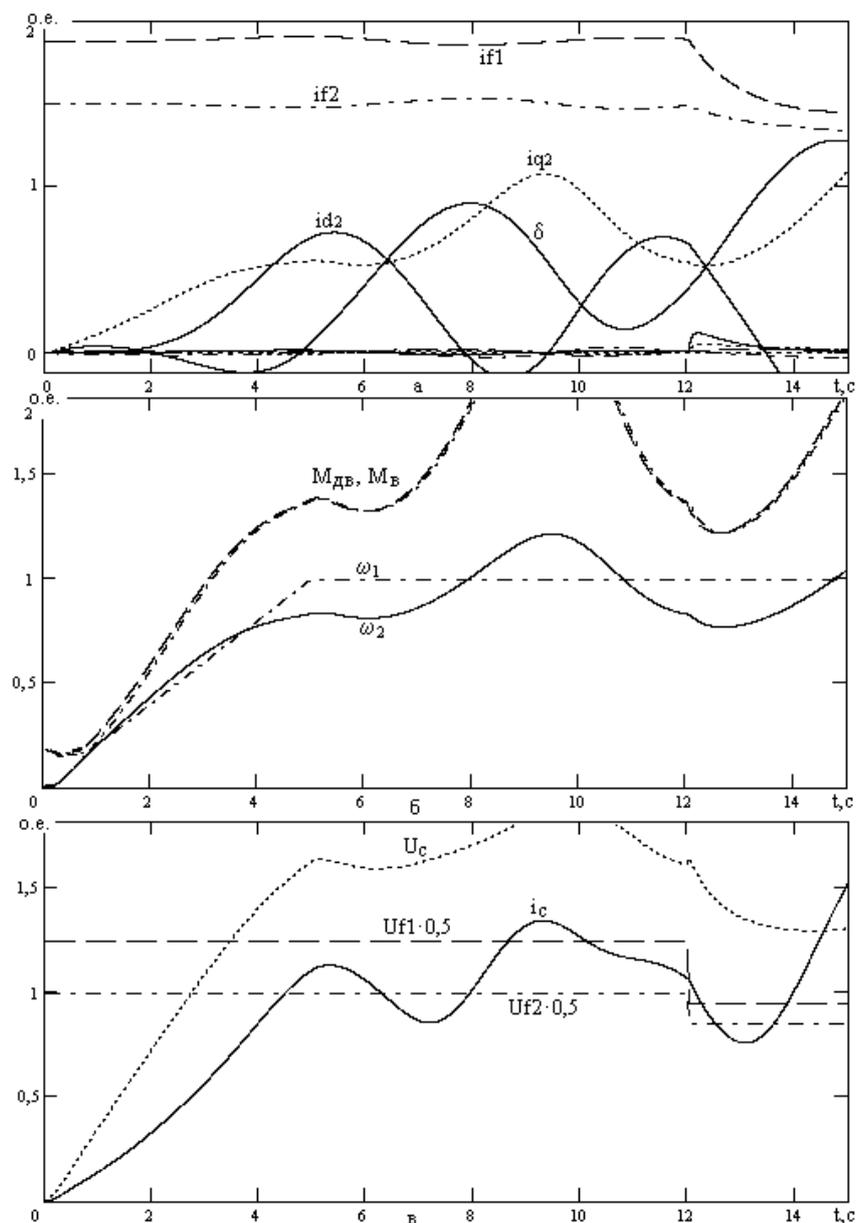


Рис.4. Неудавшийся пуск гребной установки

Пуск не состоялся, так как в гребной установке возник переходный процесс, сопровождающийся интенсивными колебаниями тока статоров, вращающего момента, угла рассогласования и скорости двигателя. Двигатель выпадает из синхронизма при заданной интенсивности пуска и выбранном уровне форсировки генератора и двигателя.

### Выводы

1. Проведенное исследование показало эффективность применения построенной схемной модели для расчета переходных процессов в гребной электрической установке. Предложенная методика позволяет рассчитывать переходные процессы при различных заданных интервалах времени пуска, оценивать его качество и максимальные величины вращающего момента и напряжения.

2. Перспективным направлением исследования в этой области является усовершенствование схемной модели с целью учета в ней процесса перемещения судна под действием гребной установки в различных режимах маневрирования и реверса.

### Приложение.

Управляемые источники тока в модели генератора:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{d\Psi_{d1}}{dt}; & J_2 &= \Psi_{q1}\omega_1; & J_3 &= R_{c1}i_{d1}; & J_4 &= x_{d1}i_{d1}; & J_5 &= x_{adf1}i_{f1}; & J_6 &= x_{ard1}i_{rd1}; \\
 J_7 &= R_{f1}i_{f1}; & J_8 &= R_{rd1}i_{rd1}; & J_9 &= \frac{d\Psi_{q1}}{dt}; & J_{10} &= \Psi_{d1}\omega_1; & J_{11} &= R_{c1}i_{q1}; & J_{12} &= x_{q1}i_{q1}; \\
 J_{13} &= x_{arq1}i_{rq1}; & J_{14} &= R_{rq1}i_{rq1}; & J_{15} &= \frac{\Psi_{f1}}{x_{f1}}; & J_{16} &= \frac{x_{adf1}}{x_{f1}}i_{d1}; & J_{17} &= \frac{x_{frd1}}{x_{f1}}i_{rd1}; \\
 J_{18} &= \frac{\Psi_{rd1}}{x_{rd1}}; & J_{19} &= \frac{x_{ard1}}{x_{rd1}}i_{d1}; & J_{20} &= \frac{x_{frd1}}{x_{rd1}}i_{f1}; & J_{21} &= \frac{\Psi_{rq1}}{x_{rq1}}; & J_{22} &= \frac{x_{arq1}}{x_{rq1}}i_{q1}.
 \end{aligned}$$

Управляемые источники тока в модели двигателя

$$\begin{aligned}
 J_{23} &= \Psi_{q2}\omega_2; & J_{24} &= R_{c2}i_{d2}; & J_{25} &= u_{d2}; & J_{26} &= R_{f2}i_{f2}; & J_{27} &= R_{rd2}i_{rd2}; \\
 J_{28} &= \Psi_{d2}\omega_2; & J_{29} &= R_{c2}i_{q2}; & J_{30} &= u_{q2}; & J_{31} &= R_{rq2}i_{rq2}; & J_{32} &= \frac{\Psi_{d2}}{x_{d2}}; \\
 J_{33} &= \frac{x_{adf2}}{x_{d2}}i_{f2}; & J_{34} &= \frac{x_{ard2}}{x_{d2}}i_{rd2}; & J_{35} &= \frac{\Psi_{f2}}{x_{f2}}; & J_{36} &= \frac{x_{adf2}}{x_{f2}}i_{d2}; & J_{37} &= \frac{x_{frd2}}{x_{f2}}i_{rd2};
 \end{aligned}$$

$$J_{38} = \frac{\Psi_{rd2}}{x_{rd2}}; \quad J_{39} = \frac{x_{ard2}}{x_{rd2}} i_{d2}; \quad J_{40} = \frac{x_{frd2}}{x_{rd2}} i_{f2}; \quad J_{41} = \frac{\Psi_{q2}}{x_{q2}}; \quad J_{42} = \frac{x_{arq2}}{x_{q2}} i_{rq2};$$

$$J_{43} = \frac{\Psi_{rq2}}{x_{rq2}}; \quad J_{44} = \frac{x_{arq2}}{x_{rq2}} i_{q2}. \text{ Уравнения связи токов и напряжений генератора}$$

$$\text{и двигателя } J_{45} = i_{d2} \cos \delta; \quad J_{46} = i_{q2} \sin \delta; \quad J_{47} = i_{d2} \sin \delta; \quad J_{48} = i_{q2} \cos \delta; \\ J_{49} = u_{d1} \cos \delta; \quad J_{50} = u_{q1} \sin \delta; \quad J_{51} = u_{d1} \sin \delta; \quad J_{52} = u_{q1} \cos \delta.$$

$$\text{Уравнения механики двигателя: } J_{53} = \Psi_{d2} i_{q2}; \quad J_{54} = \Psi_{q2} i_{d2}; \quad J_{55} = \omega_2.$$

Параметры генератора и двигателя в относительных единицах [4]:

$$R_{c1} = 0,0079; \quad x_{d1} = 1,282; \quad x_{q1} = 0,722; \quad R_{f1} = 0,04; \quad x_{f1} = 0,51; \quad R_{rd1} = 0,019; \\ x_{rd1} = 0,2; \quad R_{rq1} = 0,123; \quad x_{rq1} = 0,126; \quad x_{adf1} = 0,301; \quad x_{frd1} = 0,103; \quad x_{ard1} = 0,07; \\ x_{arq1} = 0,092; \quad R_{c2} = 0,0106; \quad x_{d2} = 0,89; \quad x_{q2} = 0,58; \quad R_{f2} = 0,0306; \quad x_{f2} = 0,48; \\ x_{rd2} = 0,141; \quad R_{rd2} = 0,191; \quad x_{rq2} = 0,116; \quad R_{rq2} = 0,153; \quad J_2 = 7000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

### Список литературы

1. Яровенко В.А., Черников П.С., Варбанец Р.А., Зарицкая Е.И. Оптимальное управление гребными электродвигателями электроходов при реверсировании // Электротехника и электромеханика. – 2018. № 6. С.38-46. DOI: 10.20998/2074-272X.2018.6.05.

2. Птах Г.К. Сравнительная оценка электродвигателей переменного тока асинхронного и синхронного типов с целью их применения в гребных электроустановках большой мощности // Известия ВУЗов. Электромеханика. 2019. Т.62. № 5. С.24-30. DOI: 10.17213/0136-3360-2019-5-24-30.

3. Хайкин А.Б., Васильев В.Н., Полонский В.И. Автоматизированные гребные электрические установки. М.: Изд-во «Транспорт», 1986. – 424 с.

4. Рукавишников С.Б. Автоматизированные гребные электрические установки. Л.: Изд-во «Судостроение», 1983. – 239 с.

**Канов Лев Николаевич** – к.т.н., доц. кафедры Судового электрооборудования Севастопольского государственного университета. 299053, Севастополь, ул. Университетская, 33, ауд. А302.  
E-mail: Inkanov48@mail.ru

# ОБОСНОВАНИЕ Т-ОБРАЗНОЙ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ТРАНСФОРМАТОРА БЕЗ СТАЛЬНОГО МАГНИТОПРОВОДА

И. А. Шкуропат

*Рассмотрено построение уравнений электрических цепей и получение Т-образной схемы замещения однофазного трансформатора без стального магнитопровода. Показано, что параметры Т-образной схемы замещения имеют физический смысл магнитного рассеяния.*

*The construction of electric circuit equations and obtaining a T-shaped substitution scheme for a single-phase transformer without a steel magnetic core is considered. It is shown that the parameters of the T-shaped substitution scheme have the physical meaning of magnetic scattering.*

Трансформатор это два отдельных электрических контура, связанных между собой через переменное магнитное поле [1]. Магнитное поле создаётся током первичного контура и пронизывает вторичный контур, наводя в нём электродвижущую силу, в простейшем случае даже без наличия стального магнитного сердечника.

Каждый контур обладает собственной индуктивностью  $L$ , а магнитная связь между ними выражается взаимной индуктивностью  $M$ . Магнитное поле, наводимое в одном контуре, не полностью пронизывает другой контур (взаимоиндуктивность между контурами, как правило, меньше по величине собственной индуктивности каждого из контуров).

Это обстоятельство обуславливает использование такого фундаментального понятия, как электромагнитное рассеяние, выражающее собой тот факт, что индуктивности первичной и вторичной обмоток трансформатора и взаимная индуктивность между ними, приведённые к одному числу витков, различаются между собой, поэтому при нагрузке первичное напряжение не полностью трансформируется во вторичное напряжение.

Теоретические вопросы по электромагнитному рассеянию и схемам замещения обстоятельно рассмотрены в [2, 3] именно для

трансформаторов со стальной магнитной системой. Для трансформаторов со сталью обоснована Т-образная схема замещения.

Однако параметры ветвей этой схемы могут определяться аналитически через основные конструктивными данными активной части трансформатора (активное сечение стержня магнитопровода, средние диаметры, радиальные размеры и высота обмоток) только при значительной идеализации. Например, полагании полупространств с бесконечно большой магнитной проницаемостью, примыкающих к торцам обмоток. как диаметр, высота, и числом витков[2, 3] .

В настоящее время благодаря новому подходу М.А. Шакирова [2] стало актуальным исследовать работу трансформаторов именно посредством идеализации их геометрических параметров. Использование как математической модели трансформатора «без стали» позволяет отчётливо выделить в аналитическом виде параметры магнитного рассеяния трансформатора. В этом случае имеется возможность более тщательного полного анализа электромагнитных процессов в трансформаторе.

Рассмотрим математическую модель трансформатора без стального магнитопровода. Трансформатор имеет следующую идеализированную конструкцию (рис. 1). Первичная обмотка (Об1) и вторичная обмотка (Об2) равновысокие, бесконечно тонкие, то есть по сути это круглые соленоиды с геометрическими параметрами как диаметр, высота, и числом витков. Полагаем обмотки достаточно высокими, то есть отношение высоты к диаметру у соленоидов практически бесконечное.

Эта идеализированная конструкция трансформатора позволяет выразить аналитически и выявить физический смысл магнитного рассеяния.

**Основные уравнения трансформатора без стального магнитопровода.** Полагаем, что для установившегося режима работы токи и напряжения изменяющимися гармонически и представлены в комплексной форме записи.

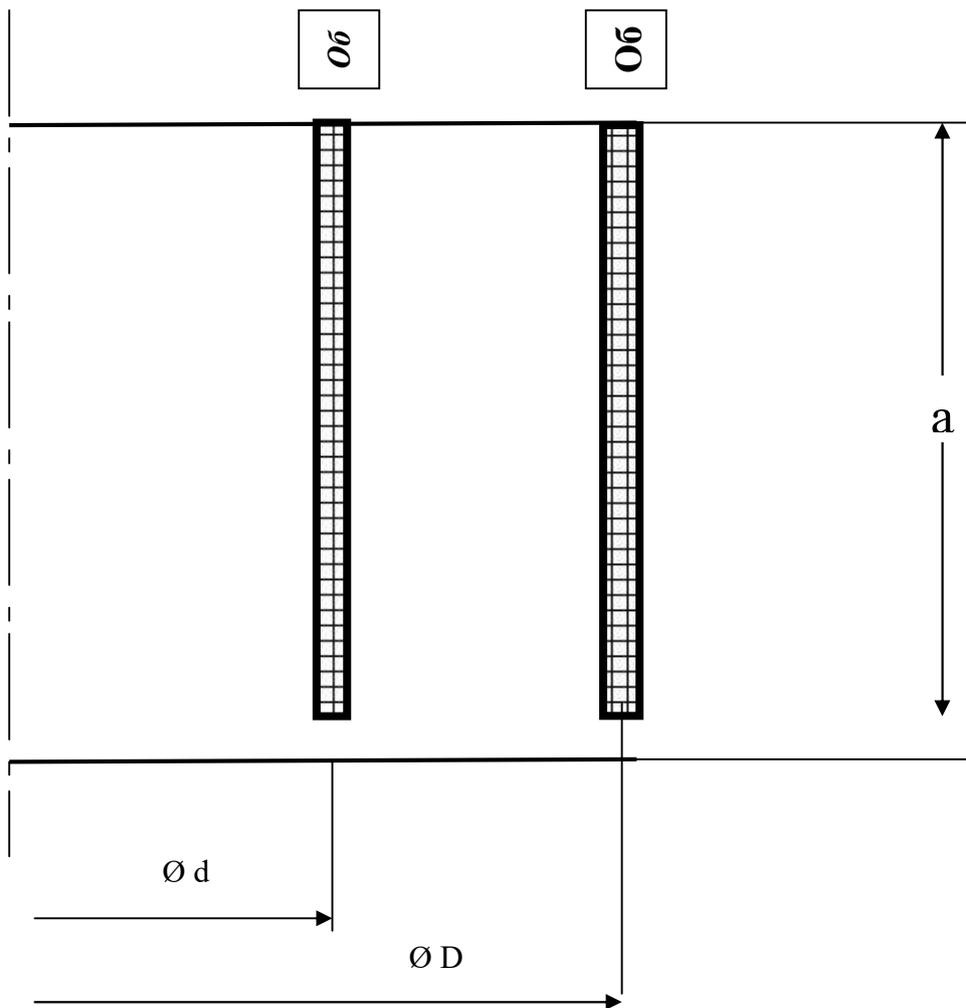


Рис. 1. Конструктивная схема обмоток трансформатора без стального сердечника

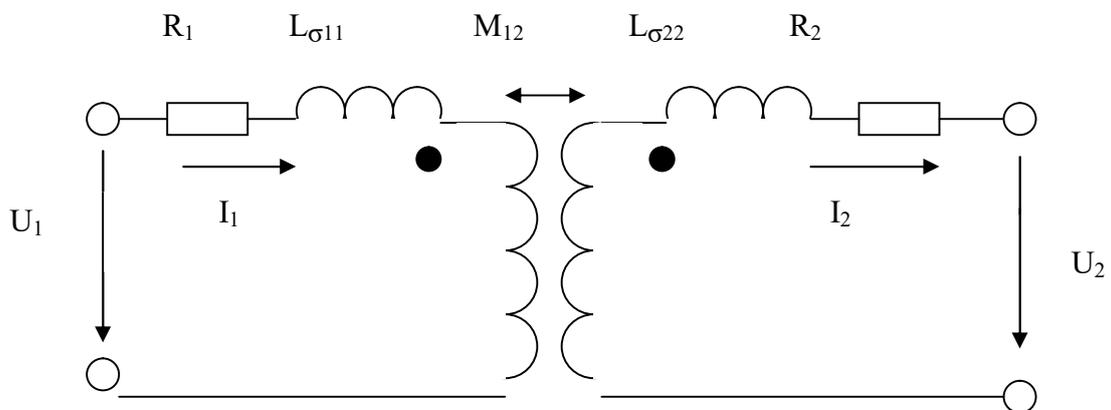


Рис. 2. Расчётная схема электрической цепи трансформатора без стального магнитопровода

Индуктивная связь между Об1 и Об2 трансформатора (рис. 2) выражается следующей системой уравнений напряжения:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = j\omega L_{11}\underline{I}_1 - j\omega M_{12}\underline{I}_2 + R_1\underline{I}_1 ; \\ 0 = -j\omega M_{12}\underline{I}_1 + j\omega L_{22}\underline{I}_2 + R_2\underline{I}_2 + \underline{U}_2 ; \end{cases} \quad (1)$$

где  $\underline{U}_1$  – первичное напряжение, приложенное к Об1;  $\underline{U}_2$  – вторичное напряжение ;  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$  – токи в Об1 и Об2 соответственно;  $\omega$  — угловая частота сети;  $L_{11}$  и  $L_{22}$  - собственные индуктивности Об1 и Об2 соответственно;  $M_{12}$  — взаимоиנדуктивность между Об1 и Об2;  $R_1$  и  $R_2$  - активные сопротивления Об1 и Об2 соответственно.

Собственные и взаимо- индуктивности обмоток без стали, входящие в (1), определяются квадратом чисел витков и фактором геометрии катушек [4].

Собственная индуктивность Об1:

$$L_{11} = w_{11}^2 L_{11}^* , \quad (2)$$

где  $w_{11}$  – число витков Об1,  $L_{11}^*$  – геометрический фактор собственной индуктивности катушки Об1.

Собственная индуктивность Об2:

$$L_{22} = w_{22}^2 L_{22}^* , \quad (3)$$

где  $w_{22}$  – число витков Об2,  $L_{22}^*$  – геометрический фактор собственной индуктивности катушки в Об2.

Взаимная индуктивность катушек Об1 и Об2:

$$M_{12} = w_{11}w_{22}M_{12}^* , \quad (4)$$

где  $M_{12}^*$  – геометрический фактор взаимоиנדуктивности катушек Об1 и Об2.

Преобразуем (1) с учётом (2) - (4). **Электромагнитная связь между первичной** обмоткой (Об1) и вторичной обмоткой (Об2) трансформатора (рис. 2) выражается следующей системой уравнений напряжения:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = j\omega w_{11}^2 L_{11}^* \underline{I}_1 - j\omega w_{11}w_{22} M_{12}^* \underline{I}_2 + R_1\underline{I}_1 ; \\ 0 = -j\omega w_{11}w_{22}M_{12}^* \underline{I}_1 + j\omega w_{22}^2 L_{22}^* \underline{I}_2 + R_2\underline{I}_2 + \underline{U}_2 ; \end{cases} \quad (5)$$

где  $\underline{U}_1$  – первичное напряжение, приложенное к Об1;  $\underline{U}_2$  – вторичное напряжение;  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$  – токи в Об1 и Об2 соответственно;  $R_1$  и  $R_2$  – активные сопротивления в цепях Об1 и Об2 соответственно.

Величины первичных и вторичных напряжений и токов должны быть сопоставимы друг с другом, при этом не должны быть затронуты основные электромагнитные и энергетические параметры (потери, намагничивающие силы) [3]. Поэтому преобразуем систему (5), умножив, в частности, её второе уравнение на величину коэффициента трансформации по виткам (коэффициента приведения параметров вторичной обмотки к первичной):

$$k_{TW} = w_{11} / w_{22} , \quad (6)$$

В результате получим:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = j\omega w_{11}^2 L_{11}^* \underline{I}_1 - j\omega w_{11}^2 M_{12}^* (\underline{I}_2 / k_{TW}) + R_1 \underline{I}_1 ; \\ 0 = -j\omega w_{11}^2 M_{12}^* \underline{I}_1 + j\omega w_{11}^2 L_{22}^* (\underline{I}_2 / k_{TW}) + k_{TW}^2 R_2 (\underline{I}_2 / k_{TW}) + k_{TW} \underline{U}_2 . \end{cases} \quad (7)$$

В системе (7) следующие параметры приведены к числу витков первичной обмотки Об2:

$$\underline{I}_2' = \underline{I}_2 / k_{TW} - \text{приведённый ток вторичной обмотки}, \quad (8)$$

$$\underline{U}_2' = k_{TW} \underline{U}_2 - \text{приведённое вторичное напряжение нагрузки}, \quad (9)$$

$$R_2' = k_{TW}^2 R_2 - \text{активное сопротивление Об2}, \quad (10)$$

$w_{11}^2 L_{22}^*$  – индуктивность Об2,  $w_{11}^2 M_{12}^*$  – взаимная индуктивность между Об1 и Об2.

Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = j\omega w_{11}^2 L_{11}^* \underline{I}_1 - j\omega w_{11}^2 M_{12}^* \underline{I}_2' + R_1 \underline{I}_1 ; \\ 0 = -j\omega w_{11}^2 M_{12}^* \underline{I}_1 + j\omega w_{11}^2 L_{22}^* \underline{I}_2' + R_2' \underline{I}_2' + \underline{U}_2' , \end{cases} \quad (11)$$

В этом случае все параметры (11) приведены к числу витков первичной обмотки  $w_{11}$ . Обмотки первичная и вторичная имеют равное число витков. Магнитная связь между обмотками в этом случае преобразуется в электрическую. Трансформатор можно теперь, исходя из системы уравнений трансформатора (11), рассматривать как пассивный четырёхполюсник с близкими по значению входными и выходными напряжениями и токами. Наиболее удобна как математическая модель Т-образная схема замещения [3].

**Т-образная схема замещения и ее параметры.** Для построения Т-образной схемы замещения к системе контурных уравнений (11) прибавляется условие баланса магнитодвижущих сил (МДС), или

приведённых токов в узлах схемы. Ток в питающей Об1 складывается из токов намагничивающего и нагрузочного:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2' + \underline{I}_0, \quad (12)$$

где  $\underline{I}_0$  – намагничивающая составляющая тока Об1.  $\underline{I}_2'$  – нагрузочная составляющая тока Об1, равная приведённому току Об2.

Подставляя (12) в (11) после некоторых преобразований получим:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + j\omega w_{11}^2(L_{11}^* - M_{12}^*))\underline{I}_1 + j\omega w_{11}^2 M_{12}^* \underline{I}_0; \\ j\omega w_{11}^2 M_{12}^* \underline{I}_0 = (R_2' + j\omega w_{11}^2(L_{22}^* - M_{12}^*))\underline{I}_2' + \underline{U}_2'. \end{cases} \quad (13)$$

Заметим, что системе уравнений (13) соответствует Т-образная схема замещения трансформатора (рис. 2) со следующими параметрами:

$$Z_1 = R_1 + j\omega w_{11}^2(L_{11}^* - M_{12}^*); \quad (14)$$

$$Z_0 = j\omega w_{11}^2 M_{12}^* \quad (15)$$

$$Z_2 = R_2' + j\omega w_{11}^2(L_{22}^* - M_{12}^*) \quad (16)$$

Система уравнения Т-образного четырёхполюсника выглядит следующим образом (рис. 3):

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = Z_1 \underline{I}_1 + Z_0 \underline{I}_0; \\ Z_0 \underline{I}_0 = Z_2 \underline{I}_2' + \underline{U}_2'; \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}_2'. \end{cases} \quad (17)$$

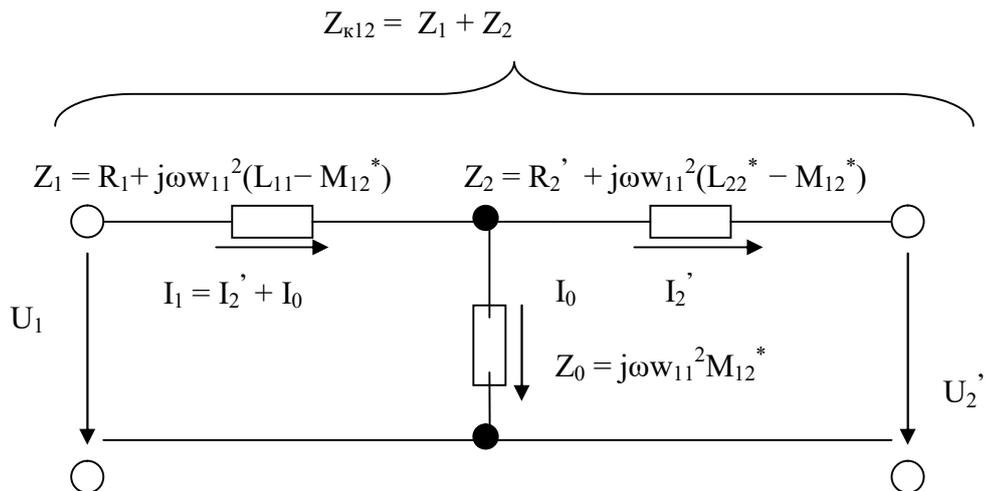


Рис. 3. Т-образная схема замещения трансформатора без стального магнитопровода

**Расчёт индуктивных параметров схемы замещения.** Проводится по следующим аналитическим формулам [4]. Собственная индуктивность соленоида Об1:

$$L_{11} = (\mu_0/(4\pi))w_{11}^2 D\varphi_{11}, \quad (18)$$

где  $\varphi_{11}$  – величина в геометрическом факторе, зависящая от отношения  $\alpha = a/D$ ,  $a$  – длина соленоида Об1,  $D$  – диаметр соленоида наружной Об1. Для достаточно длинного соленоида имеем

$$\varphi_{11} = \pi^2/\alpha = \pi^2 D/a. \quad (19)$$

Отсюда

$$L_{11} = \mu_0 w_{11}^2 \pi D^2 / (4a), \quad L_{11}^* = \mu_0 \pi D^2 / (4a). \quad (20)$$

Соответственно, собственная индуктивность соленоида Об2:

$$L_{22} = (\mu_0/(4\pi))w_{22}^2 D\varphi_{22}, \quad (21)$$

где  $\varphi_{22}$  – величина геометрического фактора, зависящая от отношения  $\alpha = a/d$ ,  $a$  – длина соленоида Об2,  $d$  – диаметр соленоида внутренней Об2.

Для достаточно длинного соленоида имеем

$$\varphi_{22} = \pi^2/\alpha = \pi^2 d/a. \quad (22)$$

Отсюда  $L_{22} = \mu_0 w_{22}^2 \pi d^2 / (4a)$ ,  $L_{22}^* = \mu_0 \pi d^2 / (4a)$ . (23)

Взаимная индуктивность между соленоидами Об1 и Об2:

$$M_{12} = \mu_0 / (a^2) w_{11} w_{22} \varphi_{12}, \quad (24)$$

где  $\varphi_{12}$  – величина геометрического фактора. Для достаточно длинного соленоида имеем  $\varphi_{12} = (\pi/8)d^2 D(2a/d)$ . (25)

Отсюда

$$M_{12} = \mu_0 w_{11} w_{22} \pi d^2 / (4a), \quad M_{12}^* = \mu_0 \pi d^2 / (4a). \quad (26)$$

Подставив соответственно (20) и (26) в (14), (23) и (26) в (15),

(26) в (16), получим параметры схемы замещения:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= R_1 + j\omega w_{11}^2 (L_{11} - M_{12}^*) = R_1 + j\omega w_{11}^2 (\mu_0 \pi D^2 / (4a) - \mu_0 \pi d^2 / (4a)) = \\ &= R_1 + j\omega w_{11}^2 \mu_0 (\pi D^2 - \pi d^2) / (4a). \end{aligned} \quad (27)$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega w_{11}^2 (L_{22}^* - M_{12}^*) = R_2 + j\omega w_{11}^2 (\mu_0 \pi d^2 / (4a) - \mu_0 \pi d^2 / (4a)) = R_2. \quad (28)$$

$$\underline{Z}_0 = j\omega w_{11}^2 M_{12}^* = j\omega w_{11}^2 \mu_0 \pi d^2 / (4a). \quad (29)$$

Заметим, что в (27) для рассматриваемых соленоидов: наружного Об1 и внутреннего Об2 явно выделяется выражение для канала магнитного Рассеяния с поперечным сечением:  $S_{\sigma 1} = (\pi D^2 - \pi d^2) / 4$ . (30)

Индуктивность рассеяния Об1:

$$L_{11} - M_{12}^* = w_{11}^2 \mu_0 S_{\sigma 1} / a. \quad (31)$$

Итак, часть магнитного потока от наружной обмотки Об1 не пронизывает внутренней Об2. Это и есть магнитный поток рассеяния Об1.

В (28) для рассматриваемых соленоидов наружного Об1 и внутреннего Об2:  $M_{12}^* = L_{22}^*$ , то есть часть магнитного потока от наружной обмотки Об1, пронизывающий внутреннюю обмотку Об2, равна магнитному потоку внутренней Об2. Канал рассеяния имеет для рассматриваемого идеализированного случая нулевое значение:

$$S_{\sigma 2} = 0. \quad (32)$$

Индуктивность рассеяния Об2:

$$L_{22}^* - M_{12}^* = 0. \quad (33)$$

Таким образом, параметры  $Z_1$  и  $Z_2$  Т-образной схемы замещения трансформатора без стального сердечника имеют физический смысл сопротивлений магнитного рассеяния Об1 и Об2 соответственно. В (29) общий магнитный поток, сцепляющийся с обеими обмотками, можно назвать потоком «намагничивания». Площадь канала «намагничивания»:  $S_{\sigma 0} = \pi d^2/4$ .

Параметр  $Z_0$  – параметр «намагничивания» в Т-образной схеме.

**Вывод.** В трансформаторе без стального магнитопровода ветви Т-образной схемы замещения  $Z_1$  и  $Z_2$  выражают индуктивные параметры рассеяния магнитного потока. Физически существуют параметры магнитного рассеяния отдельных обмоток, для которых имеются аналитические выражения зависимости от конструктивных данных.

### Список литературы

1. Сили С. Электромеханическое преобразование энергии. М.: Энергия, 1968.
2. Шакиров М.А. Вектор Пойнтинга и новая теория трансформаторов. Ч. 1. Электричество, 2014, №9.– С. 52–59.
3. Вольдек С.В. Электрические машины. Л.: Энергия, 1974.
4. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчёт индуктивностей. М.: Энергоатомиздат, 1986.

**Шкуропат Игорь Анатольевич** – к.т.н., ведущий инженер-конструктор  
ЗАО "Чебоксарский электромеханический завод", г. Чебоксары.  
Тел. (07)-917-110-91-24. E-mail: rea\_sia@mail.ru

# МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ

## МИНИМАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПОЛНЫХ МАТРИЦ НА ОСНОВЕ ИХ ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

М. В. Недорезов, В. В. Филаретов

*Разработан алгоритм компактного разложения определителя полностью заполненной матрицы по теореме Лапласа. Показано, что минимальное число операций достигается, когда порядки минора и дополнительного минора равны или отличаются на единицу. Получены аналитические выражения для числа мультипликативных и аддитивных операций. Предложенное разложение многократно сокращает сложность генерируемых выражений (для матрицы 10 порядка в 100 раз) по сравнению с традиционным разложением по строкам или столбцам.*

*An algorithm for compact expansion of the determinant of a fully filled matrix by Laplace's theorem is developed. It is shown that the minimum number of operations is reached when the orders of minor and additional minor are equal or differ by one. Analytical expressions for the number of multiplicative and additive operations are obtained. The proposed decomposition significantly reduces the complexity of generated expressions (for a matrix of order 10 by 100 times) compared to the traditional row or column decomposition.*

**Разложение определителей матриц.** Для матриц высокой размерности индуктивное построение определителя оказывается предпочтительным или единственно возможным [1]. Разложение определителя матрицы  $A$  по некоторому элементу  $a_{ij}$  (выделение элемента  $a_{ij}$ ) имеет вид

$$\Delta = (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} + \Delta(a_{ij}=0), \quad (1)$$

где  $\Delta_{ij}$  – минор, то есть определитель матрицы, образованной из матрицы  $A$  путем вычеркивания строки  $i$  и столбца  $j$ ;  $\Delta(a_{ij}=0)$  – определитель матрицы, полученной из матрицы  $A$  в результате удаления элемента  $a_{ij}$ . Формула (1) применяется к определителям  $\Delta_{ij}$  и  $\Delta(a_{ij}=0)$  рекурсивно до получения матриц первого порядка или вырожденных матриц.

Теорема Лапласа [2] в ее частных случаях довольно широко используется при аналитическом решении систем линейных алгебраических уравнений [3, 4] и формировании символьных схемных функций электрических цепей [5–9]. Однако символьные алгоритмы оказываются неконкурентоспособными с численным решением при увеличении порядка матриц вследствие комбинаторного увеличения сложности формируемых выражений.

При разработке эффективных алгоритмов разложения определителей важен не столько выбор оптимального порядка выделения элементов матрицы [10, 11], сколько переход от выделения отдельных элементов на выделение миноров матрицы, подобно выделению в схемах подсхем [12]. Для символьного анализа электрических цепей оптимальные по сложности формулы схемных функций и откликов получаются при рекурсивном делении схемы на части, примерно равные по числу узлов и ветвей, что названо правилом половинного деления [11].

Хорошо разработан подход, при котором матрица отображается схемой, где источники тока, управляемые напряжением (ИТУН), соответствуют элементам матрицы [13, 14]. Многократное сокращение размера результатов и времени генерации обеспечивается при делении схемы матрицы на примерно равные части [15–20]. При таком разложении определителя матрица задается списком ИТУН. Генератор (приемник) каждого из них подключен к узлу, соответствующему номеру строки (столбца) матрицы и к дополнительному узлу с номером 0, которого нет в матрице.

Таким образом, схемная модель применительно к матрице является промежуточной моделью. Точно так же матрица является промежуточной моделью для схемы. В обоих случаях это проявляется в избыточности результирующих выражений – большом числе пар взаимно уничтожающихся слагаемых. В случае применения схемного отображения

для разложения матричных определителей это проявляется в ограничении порядка полной матрицы. Предельным тестом для символьного решения является полная матрица 12-го порядка [15–17, 20].

Обратим внимание на то, что разложение определителя матрицы по минорам выбранных строк с помощью теоремы Лапласа [2] является прямым решением задачи и не содержит взаимно уничтожающихся слагаемых, если они не обусловлены численными значениями элементов [21]. Считается, что французский математик Пьера-Симон Лаплас (1749–1827) сформулировал эту теорему в 1772 году, хотя предполагают, что частный случай этой теоремы о разложении определителя по строке (столбцу) был известен ещё Готфриду Вильгельму Лейбницу.

Лейбниц предложил комбинаторное нахождение определителя, от которого один шаг до выделения элементов строки или столбца по формуле (1). Но обобщение Лапласа для разложения определителя по минорам двух и более столбцов, как показано ниже, явилось прорывным решением для разложения символьных определителей матриц высокого порядка.

**Теорема Лапласа.** Два определения, данные Лапласом перед формулировкой теоремы, лаконичны, и не утомят читателя. В матрице порядка  $p$  на  $p$  выбираются произвольные  $k$  строк:  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и  $k$  столбцов:  $j_1, j_2, \dots, j_k$ . Минором  $k$ -го порядка  $M_k$  называется определитель матрицы, полученной из матрицы  $A$  удалением всех строк и столбцов, кроме выбранных  $k$  строк и  $k$  столбцов.

Определитель матрицы, получаемой удалением только выбранных строк и столбцов из матрицы  $A$ , называется дополнительным минором  $\underline{M}_{p-k}$ . Алгебраическое дополнение минора  $k$ -го порядка может отличаться от дополнительного минора только знаком:

$$A_k = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k} \underline{M}_{p-k}$$

Пусть выбраны любые  $k$  столбцов матрицы  $A$ . Тогда определитель матрицы  $A$  равен сумме всевозможных произведений миноров  $k$ -го порядка, расположенных в этих столбцах, на их алгебраические дополнения

$$\Delta = \sum M_k A_k \tag{2}$$

При этом суммирование ведётся по всевозможным номерам строк  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , то есть по всем сочетаниям из  $p$  по  $k$ .

Теорема Лапласа в этом ее общем виде (2) довольно редко используется и реализуется в программах в виду некоторой сложности по сравнению, например, с разложением по элементам строки или столбца. У любого матричного (не схемно-топологического) разложения имеется существенный недостаток. Номера строки  $i$  и столбца  $j$ , характеризующие положение элемента  $a_{ij}$  в исходной или производной матрице, используются для вычисления знаков при разложении определителя.

В эффективном алгоритме нежелательна повторная нумерация, поэтому следует избежать восстановления порядка следования строк и столбцов, оставшихся после удаления. В данной статье рассматривается именно такой алгоритм, реализующий теорему Лапласа в ее общем случае разложения на произведения миноров произвольного порядка. Эффект реализации теоремы Лапласа обеспечивает выбор миноров, когда порядки минора и дополнительного минора равны или отличаются на единицу. Обсуждение ограничено матрицами, полностью заполненными элементами (полными матрицами), как наиболее сложными для символьного анализа и удобными для оценки числа операций.

**О свертке (факторизации) алгебраических выражений.** Требования к качеству (снижению сложности) алгебраических выражений предъявляются при многовариантном анализе, параметрическом синтезе, статистических испытаниях и т.д. Ранее алгебраическая свертка (факторизация) была предложена для совершенствования компиляторов с алгоритмических языков [10].

В первую очередь за скобки целесообразно выносить символ, чаще всего встречающийся в выражении или подвыражении. Именно так и происходит, когда выделяются элементы одной строки или столбца в полной матрице. Однако более компактное выражение получается при образовании сомножителей в скобках, когда эти сомножители не являются отдельными символами. Пользоваться развернутым алгебраическим выражением для его свертки нецелесообразно, что показала реализация этого подхода в современных системах аналитических вычислений.

Предельный порядок полной матрицы для символьного разложения определителя не превышает 10 [20]. Ключом к оптимальной свертке является деление на части графа или схемы [11]. Установлено, что половинное деление графа или схемы приводит к минимальному числу операций [11], подобно тому, как деление отрезка пополам уменьшает число шагов для нахождения корня полинома.

Матрицу можно отобразить электронной схемой с проводимостями (для диагональных элементов) и источниками тока, управляемыми напряжением (для недиагональных элементов) [13, 14]. Поэтому деление матрицы на части соответствует делению ее схемы. Однако нахождение определителя матрицы как схемного определителя приводит к избыточным (взаимно уничтожающимся) слагаемым при числе узлов деления, большем двух.

Прямое (без промежуточной схемной модели) деление матрицы на части (строки или столбцы) также возможно при использовании теоремы Лапласа в общем виде (2), когда выполняется разложение на миноры нескольких строк или столбцов.

Никто не задумывается, как записать определитель матрицы второго порядка (рис. 1):

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \quad (3)$$

|                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| a <sub>11</sub> | a <sub>12</sub> |
| a <sub>21</sub> | a <sub>22</sub> |

Рис. 1. Полная матрица второго порядка

В выражении определителя матрицы третьего порядка (рис. 2) также не образуется подвыражений в виде умножения скобки на скобку, поэтому минимальным выражением является разложение по элементам, например, первой строки:

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) . \quad (4)$$

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| a11 | a12 | a13 |
| a21 | a22 | a23 |
| a31 | a32 | a33 |

Рис. 2. Полная матрица третьего порядка

Очевидно, «факт» оптимальности разложения определителя по элементам строки (столбца), проиллюстрированный на определителе матрицы третьего порядка, успокоил многих исследователей. Поэтому чаще всего используется этот частный случай теоремы Лапласа, предусматривающий не деление матрицы на подматрицы-блоки, а последовательное выделение элементов строки или столбца по формуле (1). Остается только догадываться, чем объяснял классик целесообразность использования формулы (2), но она, как показано далее, приводит к многократному уменьшению сложности определителя по сравнению с разложением по строкам или столбцам. Очевидно, особенности применения формулы (2) мало интересовали Лапласа. Ему, как всякому математику, хотелось сформулировать наиболее общий результат.

По аналогии с оптимальным разложением определителей графов и схем вынесение за скобки символа с максимальным показателем участия следует выполнять только тогда, когда определитель матрицы нельзя разложить по минорам более чем одной строки. Руководствуясь правилом половинного деления [11], следует выбирать порядки минора и дополнительного минора одинаковыми (для матрицы четного порядка) или отличающимися на единицу (для матрицы нечетного порядка). Это объясняет невозможность улучшения формулы (3) – не хватает размерности матрицы. В случае матриц большего порядка такая возможность появляется.

**Определитель матрицы четвертого порядка.** Разложение определителя такой матрицы (рис. 3) по элементам строки или столбца требует известной доли терпения и внимательности, поэтому редко

используется в методических целях. Последовательно выделяя элементы первой строки:  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{14}$ , получаем выражение

$$\Delta = a_{11}*(a_{22}*(a_{33}*a_{44}-a_{34}*a_{43})+a_{23}*(-a_{32}*a_{44}+a_{42}*a_{34})+a_{24}*(a_{32}*a_{43}-a_{42}*a_{33}))+a_{12}*(-a_{21}*(a_{33}*a_{44}-a_{34}*a_{43})-a_{23}*(-a_{31}*a_{44}+a_{41}*a_{34})-a_{24}*(a_{31}*a_{43}-a_{41}*a_{33}))+a_{13}*(a_{24}*(a_{31}*a_{42}-a_{41}*a_{32})-a_{34}*(a_{21}*a_{42}-a_{41}*a_{22}))+a_{44}*(a_{21}*a_{32}-a_{31}*a_{22}))+a_{14}*(a_{23}*(-a_{31}*a_{42}+a_{41}*a_{32})+a_{33}*(a_{21}*a_{42}-a_{41}*a_{22})-a_{43}*(a_{21}*a_{32}-a_{31}*a_{22})). \quad (5)$$

Более предпочтительна другая методика разложения, когда выделением элементов матрица приводится к блочно-треугольному виду.

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ |
| $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ |

Рис. 3. Полная матрица четвертого порядка

Для образования блока 2 на 2 в верхнем левом углу матрицы на рис. 3 сначала выделяются элементы  $a_{13}$  и  $a_{14}$  по формуле (1). В результате получается матрица:

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ |          |          |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ |
| $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ |

в которой для образования нужного блока 2 на 2 требуется выделение элементов  $a_{23}$  и  $a_{24}$  по формуле (1). Это приводит к блочно-треугольной матрице:

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ |          |          |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ |          |          |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ |
| $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ |

определитель которой равен произведению двух диагональных блоков 2 на 2. Таким образом, выполненные преобразования приводят к более короткому выражению:

$\Delta =$

$$\begin{aligned}
 & a_{13} * (a_{24} * (a_{31} * a_{42} - a_{41} * a_{32}) - a_{34} * (a_{21} * a_{42} - a_{41} * a_{22})) + \\
 & a_{44} * (a_{21} * a_{32} - a_{31} * a_{22}) + \\
 & a_{14} * (a_{23} * (-a_{31} * a_{42} + a_{41} * a_{32}) + a_{33} * (a_{21} * a_{42} - a_{41} * a_{22}) - \\
 & a_{43} * (a_{21} * a_{32} - a_{31} * a_{22})) + \\
 & a_{23} * (-a_{34} * (a_{11} * -a_{42} + a_{12} * a_{41}) + a_{44} * (a_{11} * -a_{32} + a_{12} * a_{31})) + \\
 & a_{24} * (a_{33} * (a_{11} * -a_{42} + a_{12} * a_{41}) - a_{43} * (a_{11} * -a_{32} + a_{12} * a_{31})) + \\
 & (a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}) * (a_{33} * a_{44} - a_{34} * a_{43}) .
 \end{aligned} \tag{6}$$

Количества операций умножения и сложения уменьшились на единицу по сравнению с формулой (4) в практикуемом обычно виде, когда, выделяются все элементы выбранной строки. Таким образом, сложность символьного определителя матрицы четвертого порядка уменьшилась с 40 операций умножения и 23 аддитивных операций до 39 и 22 соответственно. При подсчете числа аддитивных операций здесь и далее унарные минусы, которые не характеризуют структуру формулы, не учитываются, поскольку от них можно легко избавиться перестановкой двух слагаемых

Уже сам Лаплас мог выразить сомнение в минимальности формулы (5), но для этого классика пришлось бы разработать правило половинного деления, при котором матрица делится на подматрицы пополам или ее подматрицы отличаются размерностью на единицу. Использование

предлагаемого здесь правила не только резко снижает трудоемкость записи выражения, но и приводит к минимальному выражению с 30 умножениями и 15 сложениями:

$$\Delta = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot (a_{33} \cdot a_{44} - a_{34} \cdot a_{43}) - (a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31}) \cdot (a_{23} \cdot a_{44} - a_{24} \cdot a_{43}) + (a_{11} \cdot a_{42} - a_{12} \cdot a_{41}) \cdot (a_{23} \cdot a_{34} - a_{24} \cdot a_{33}) + (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) \cdot (a_{13} \cdot a_{44} - a_{14} \cdot a_{43}) - (a_{21} \cdot a_{42} - a_{22} \cdot a_{41}) \cdot (a_{13} \cdot a_{34} - a_{14} \cdot a_{33}) + (a_{31} \cdot a_{42} - a_{32} \cdot a_{41}) \cdot (a_{13} \cdot a_{24} - a_{14} \cdot a_{23}). \quad (7)$$

Получить выражение (7) немногим сложнее, чем сформировать определитель третьего порядка. Матрица вертикально делится пополам на две прямоугольные подматрицы. Первая подматрица состоит из столбцов 1 и 2, а вторая 3 и 4. Для образования миноров второго порядка в левой подматрице перебираются все возможные пары строк: 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 2 и 3, 2 и 4, 3 и 4. Соответствующие этим парам миноры, легко записываются по простейшей формуле (3), образуют первые сомножители в 6 слагаемых формулы (7).

Дополнительные миноры второго порядка в правой подматрице, которые формируют вторые сомножители в (4), получаются вычеркиванием выбранной пары строк во всей матрице. Нужный минор останется в правой половине матрицы и также будет раскрыт по формуле (3) – единственной из формул определителей, которая не заставляет задуматься о знаке слагаемых.

Единственным затруднением является нахождение знаков слагаемых выражения (7). В знаке каждого слагаемого есть две составляющие. Первая составляющая не изменяется при переходе от слагаемого к слагаемому. Это сумма номеров первого и второго столбца, то есть 1+2. Вторая составляющая связана с перебираемыми шестью сочетаниями строк, то есть 1+2, 1+3, 1+4, 2+3, 2+4, 3+4. Таким образом, степенями при (-1) у слагаемых формулы (7) будут следующие выражения соответственно: 1+2+1+2, 1+2+1+3, 1+2+1+4, 1+2+2+3, 1+2+2+4, 1+2+3+4.

**Определитель матрицы пятого порядка.** В случае этой матрицы даже не пытаемся что-то сформировать без половинного деления. Строго

пополам матрица не делится из-за нечетного порядка. Придется использовать «половинки» размерности 2 на 5 и 3 на 5.

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| a11 | a12 | a13 | a14 | a15 |
| a21 | a22 | a23 | a24 | a25 |
| a31 | a32 | a33 | a34 | a35 |
| a41 | a42 | a43 | a44 | a45 |
| a51 | a52 | a53 | a54 | a55 |

Рис.4. Полная матрица пятого порядка

Для образования миноров второго порядка в левой подматрице перебираются пары строк: 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 1 и 5, 2 и 3, 2 и 4, 2 и 5, 3 и 4, 3 и 5, 4 и 5. Соответствующие этим парам строк миноры образуют первые сомножители в 10 слагаемых определителя. Дополнительные миноры в правой подматрице, которые формируют вторые сомножители, получаются вычеркиванием выбранной пары строк во всей матрице. Нужный минор третьего порядка останется в правой половине матрицы. В результате получается выражение

$$\Delta =$$

$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot$$

$$(a_{33} \cdot (a_{44} \cdot a_{55} - a_{45} \cdot a_{54}) - a_{34} \cdot (a_{43} \cdot a_{55} - a_{45} \cdot a_{53}) + a_{35} \cdot (a_{43} \cdot a_{54} - a_{44} \cdot a_{53})) -$$

$$(a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31}) \cdot$$

$$(a_{23} \cdot (a_{44} \cdot a_{55} - a_{45} \cdot a_{54}) - a_{24} \cdot (a_{43} \cdot a_{55} - a_{45} \cdot a_{53}) + a_{25} \cdot (a_{43} \cdot a_{54} - a_{44} \cdot a_{53})) +$$

$$(a_{11} \cdot a_{42} - a_{12} \cdot a_{41}) \cdot$$

$$(a_{23} \cdot (a_{34} \cdot a_{55} - a_{35} \cdot a_{54}) - a_{24} \cdot (a_{33} \cdot a_{55} - a_{35} \cdot a_{53}) + a_{25} \cdot (a_{33} \cdot a_{54} - a_{34} \cdot a_{53})) -$$

$$(a_{11} \cdot a_{52} - a_{12} \cdot a_{51}) \cdot$$

$$(a_{23} \cdot (a_{34} \cdot a_{45} - a_{35} \cdot a_{44}) - a_{24} \cdot (a_{33} \cdot a_{45} - a_{35} \cdot a_{43}) + a_{25} \cdot (a_{33} \cdot a_{44} - a_{34} \cdot a_{43})) +$$

$$(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) \cdot$$

$$(a_{13} \cdot (a_{44} \cdot a_{55} - a_{45} \cdot a_{54}) - a_{14} \cdot (a_{43} \cdot a_{55} - a_{45} \cdot a_{53}) + a_{15} \cdot (a_{43} \cdot a_{54} - a_{44} \cdot a_{53})) -$$

$$(a_{21} \cdot a_{42} - a_{22} \cdot a_{41}) \cdot$$

$$(a_{13} \cdot (a_{34} \cdot a_{55} - a_{35} \cdot a_{54}) - a_{14} \cdot (a_{33} \cdot a_{55} - a_{35} \cdot a_{53}) + a_{15} \cdot (a_{33} \cdot a_{54} - a_{34} \cdot a_{53})) +$$

$$(a_{21} \cdot a_{52} - a_{22} \cdot a_{51}) \cdot$$

$$(a_{13} \cdot (a_{34} \cdot a_{45} - a_{35} \cdot a_{44}) - a_{14} \cdot (a_{33} \cdot a_{45} - a_{35} \cdot a_{43}) + a_{15} \cdot (a_{33} \cdot a_{44} - a_{34} \cdot a_{43})) +$$

$$(a_{31} \cdot a_{42} - a_{32} \cdot a_{41}) \cdot$$

$$(a_{13} \cdot (a_{24} \cdot a_{55} - a_{25} \cdot a_{54}) - a_{14} \cdot (a_{23} \cdot a_{55} - a_{25} \cdot a_{53}) + a_{15} \cdot (a_{23} \cdot a_{54} - a_{24} \cdot a_{53})) -$$

$$(a_{31} \cdot a_{52} - a_{32} \cdot a_{51}) \cdot$$

$$\begin{aligned}
 & (a_{13}*(a_{24}*a_{45}-a_{25}*a_{44})-a_{14}*(a_{23}*a_{45}-a_{25}*a_{43})+a_{15}*(a_{23}*a_{44}-a_{24}*a_{43}))+ \\
 & (a_{41}*a_{52}-a_{42}*a_{51}) * \\
 & (a_{13}*(a_{24}*a_{35}-a_{25}*a_{34})-a_{14}*(a_{23}*a_{35}-a_{25}*a_{33})+a_{15}*(a_{23}*a_{34}-a_{24}*a_{33})) . \\
 & (8)
 \end{aligned}$$

«Сердцем» генератора минимальных формул является генератор сочетаний. Это не комбинаторика Лебница или Лапласа, которая проявляет себя катастрофическим увеличением объема формулы и времени ее генерации. При рекурсивном половинном делении матрицы многократно сокращается объем вычислений. Для четного порядка  $p$  генерируются все возможные сочетания  $C$  из  $p$  по  $p/2$ , а для нечетного – из  $p$  по  $(p-1)/2$ . Например, в (7) сгенерированы 6 сочетаний: из 4 по 2 для выбора всех возможных пар подстрок из первой половины матрицы (первый минор) и взаимно дополнительных подстрок второй половины матрицы (второй минор). Первый и второй миноры с учетом знака образуют первый и второй сомножители каждого из 6 слагаемых определителя. Для формулы (8) сгенерированы 10 сочетаний: из 5 по  $(p-1)/2=2$ . Миноры для первого сомножителя имеют порядок два, а второго сомножителя – три.

Сравнение выражений определителя по числу операций представлено в табл. 1. При расчетах использованы программы CirSym [ ] и HalfMat, описание которой приводится ниже. Видно, что традиционное рекурсивное разложение определителя по строкам при увеличении порядка матрицы становится неконкурентоспособным. Выделение миноров порядка 2 целесообразно только для матриц 4-го и 5-го порядков. С увеличением порядка, чтобы предельно снизить объем выкладок, необходимо следовать правилу половинного деления матрицы. Тогда, например, на порядке 10 число операций сокращается примерно в 100 раз (по сравнению с разложением по строкам) и 10 раз (по сравнению с выделением миноров второго порядка). Нарушение правила половинного деления всегда ведет к резкому увеличению сложности формулы, хотя неминимальные выражения кажутся не сложными по сравнению с разложением по строкам.

Другие эксперименты с программой HalfMat показывают, что чем больше выбранное деление матрицы отличается от половинного, тем

больше полученное выражение определителя отличается по сложности от минимального выражения. Это доказывает минимальность предлагаемого разложения матричного определителя.

Таблица 1. Сравнение символьных выражений, сгенерированных программами CirSym и HalfMat для определителей полных матриц 3–10 порядков

| N  | Число операций умножения при разложении по: |                                      |  | Число аддитивных операций при разложении по: |                                      |  |
|----|---|--------------------------------------|--|--|--------------------------------------|--|
|    | строкам<br>(CirSym)                         | минорам<br>порядка<br>2<br>(HalfMat) | минорам<br>порядка<br>n/2<br>(HalfMat) | строкам<br>(CirSym)                          | минорам<br>порядка<br>2<br>(HalfMat) | минорам<br>порядка<br>n/2<br>(HalfMat) |
| 3  | 9   | 9                                    | 9                                      | 5  | 5                                    | 5                                      |
| 4  | 40  | 30                                   | 30                                     | 23   | 18                                   | 18                                     |
| 5  | 205   | 120                                  | 120                                    | 119  | 70                                   | 70                                     |
| 6  | 1236  | 495                                  | 380                                    | 719  | 300                                  | 220                                    |
| 7  | 8659  | 2583                                 | 1400                                   | 5039   | 1512                                 | 840                                    |
| 8  | 69280                                       | 13944                                | 4270                                   | 40319  | 8428                                 | 2590                                   |
| 9  | 623529                                      | 93096                                | 19026                                  | 362879                                       | 54468                                | 11214                                  |
| 10 | 6235300                                     | 627615                               | 60732                                  | 3628799                                      | 379350                               | 35532                                  |

**Рекуррентные формулы для числа операций в выражениях матричных определителей.** Нетрудно подсчитать число операций в такой простой структуре минимального выражения по рекуррентной формуле. Для этого нужно использовать известное число операций в сомножителях слагаемых выражения. Тогда число операций в минимальном выражении определителя  $i$ -го порядка находится по одной из двух формул:

для четного порядка:

$$F_i = F_{i/2} * F_{i/2} * C \quad (6)$$

для нечетного порядка:

$$F_i = F_{(i-1)/2} * F_{(i+1)/2} * C \quad (7)$$

Под  $F$  соответствующего порядка можно понимать как число операций умножения, так и число операций сложения.

Рекуррентные формулы для числа умножений  $L_{mi}$  и аддитивных операций  $L_{ai}$  в выражениях, сформированных выделением отдельных элементов строк матрицы, требуют одного предшествующего шага (с порядком меньшим на единицу):

$$L_{mi} = i(1 + iL_{m(i-1)}), \quad (8)$$

$$L_{ai} = i(1 + iL_{a(i-1)}) - 1. \quad (9)$$

При выводе формул (8) и (9) учитывается, что  $i$  алгебраических дополнений, соответствующих элементам некоторой строки, содержат одинаковое число операций. Каждое алгебраическое дополнение умножается на параметр элемента строки, что добавляет  $i$  операций. Число операций сложения в разложении определителя на единицу меньше.

Среди аддитивных операций для выражений определителей рассматриваются только знаки сложения и вычитания, не являющиеся знаками унарных операций, то есть знаки, характеризующие структуру и сложность формулы. Показатели выражений, рассчитанные по (6)–(9), совпадают с показателями формул, сгенерированных программами CirSym и HalfMat (табл. 1).

### **Алгоритм разложения определителя полной матрицы выделением миноров половинного порядка.**

```
// MATR // структура для хранения элементов матрицы
// {char *reb; // идентификатор элемента};
// b - указатель на строку, в которую выводится результат;
// Алгоритм разложения по минорам половинного порядка
void half(int act_n, MATR *act)
{ // MATR[act_n] – структура идентификаторов act_n элементов матрицы
  int k, k2, p, stg, d, d2, sgn0=0, sgn;
```

```

int i,i1,j,j1,m,m1,v,a,cmb[30],cmbi[30];
MATR *act1;
// p - Порядок текущей матрицы с act_n элементами //
// k - Порядок первого минора
// k2 - число элементов первого минора
// d - Порядок второго минора
// d2 - Число элементов второго минора
// MATR[act_n] – структура идентификаторов k2 (d2) элементов первого
(второго) минора
// cmb[k] - текущее сочетание из p по k
// cmbi[p] - вектор строк для первого (1) или второго (0) минора
// sgn0 - Знак первого минора
// sgn - Знак произведения миноров
if (act_n==1) {вывод определителя первого порядка; return;}
p=sqrt(act_n); // вычисление порядка матрицы
if (p==2) {вывод определителя второго порядка; return;}
else if (p==3) {вывод определителя третьего порядка; return;}
k=p/2; // порядок минора при вертикальном половинном делении матрицы
d=k+p%2; // порядок дополнительного минора
k2=k*k; // число элементов минора
d2=d*d; // число элементов дополнительного минора
for (i=0;i<k;i++) {cmb[i]=i; // сочетание для первого слагаемого
sgn+=j;} // постоянная составляющая знака

act1=(MATR *) malloc (k2*sizeof(MATR));
rep2:
for (i=0;i<p;i++) cmbi[i]=0;
for (i=0;i<k;i++) cmbi[cmb[i]]=1;
m=0; stg=0; // получение первого минора
if (k!=d) act1=(MATR *) realloc (act1,k2*sizeof(MATR));
for (i=0;i< act_n;i+=p)
if (cmbi[stg++]) // формирование минора
for (j=0;j<k;j++) act1[m++].reb=strdup(act[i+j].reb);
for (j=0;j<k;j++) sgn+=cmb[j];
if (sgn%2) strcat(b+,"-"); else strcat(b+,"+");
strcat(b+,"");
half(k2,act1);

```

```

for (i=0;i<k2;i++) free(act1[i].reb);
kontrol();
if (k!=d) act1=(МАТР *) realloc (act1,d2*sizeof(МАТР));
m=0; stg=0; // формирование дополнительного минора
for (i=0;i<act_n;i+=p)
if (!cmbi[stg++]) {m1=i+k;
for (j=0;j<d;j++) act1[m++].reb=strdup(act[m1+j].reb);}
strcat(b,")*("); b+=3;
half(d2,act1);
for (i=0;i<d2;i++) free(act1[i].reb);
strcat(b++,")");
kontrol(); // разрезание строки по 70 символов

if (cmb[k-1]<p-1) {cmb[k-1]++; goto rep2;} // к следующему слагаемому
else if (cmb[k-1]==p-1)
{if (cmb[k-1]-cmb[k-2]==1)
{j1=1; // ГЕНЕРАТОР СОЧЕТАНИЙ ИЗ p ПО k
for (m = k-1; m > 1; m--)
if (cmb[m]-cmb[m-1]==1) j1++; else break;
i1=k-j1-1;
} else i1=k-2;
a=cmb[i1]; v=1;
for (m=i1;m<k;m++)
cmb[m]=a+v++;
if (cmb[k-1]<p) goto rep2; // к следующему слагаемому
free(act1);
}}

```

В табл. 2 сведены размеры выражений, время генерации и вычисленные значения определителей для полных матриц Гильберта, которые являются плохообусловленными матрицами [15, 18, 21]. Расчеты показывают, что разложение по строкам обеспечивает наиболее высокую точность (на два десятичных разряда) для самого сложного теста – матрицы Гильберта 8-го порядка, хотя минимальная формула в 16 раз короче.

Это означает, что порядок вычислений при разложении по минорам оказывается в случае матриц Гильберта более уязвимым к потере точности, чем при разложении по элементам строк. Ранее нами сообщалось [15] о настолько же удивительных преимуществах по точности (на несколько десятичных разрядов, также для матриц Гильберта) выражений определителей, полученных разложением по строкам, по сравнению с иерархическими последовательными выражениями. Последовательные выражения имеют еще меньшую сложность, как и минимальные единые выражения,

При нарушении правила половинного деления длина формулы увеличивается почти в 2 раза. Это увеличивает погрешность вычислений настолько, что корректный расчет определителя матрицы Гильберта 8-го порядка на интерпретаторе CalcSym с 18 разрядами [22] оказывается невозможным – сохраняется порядок, но меняется знак результата.

Таблица 2. Сравнение видов разложений определителей полных нормализованных матриц Гильберта 4–8 порядков по точности вычислений

| N | Разложение по строкам |                        | Разложение на миноры половинной размерности и миноры порядка 2 (в скобках) |  |
|---|-----------------------|------------------------|--|--|
|   | Число символов        | Численный результат    | Число символов   | Численный результат                                |
| 4 | 587                   | 1.6534391534391529e-07 | 463<br>(463)   | 1.6534391534391532e-07<br>(1.6534391534391532e-07) |
| 5 | 1883                  | 3.7492951325144312e-12 | 1180<br>(1180)   | 3.7492951325150451e-12<br>(3.7492951325150451e-12) |
| 6 | 9619                  | 5.3672998792464119e-18 | 3132<br>(3967)   | 5.3672999404169606e-18<br>(5.3672998922092762e-18) |
| 7 | 64897                 | 3.8161427707260000e+14 | 10712<br>(19168)   | 3.8161427706675200e+14<br>(3.8162043627110400e+14) |
| 8 | 514191                | 7.78350798225e+11      | 31492<br>(100961)  | 7.78353410048e+11<br>(-3.8889527705600000e+11)     |

Данные табл. 3 показывают, что генерация минимальных выражений вместо традиционных выражений легко преодолевает барьер в виде матрицы 12-го порядка. Судя по затратам времени, рядовым тестом для расчета является даже матрица 17-го порядка. Оказался неожиданным факт, что время генерации выражений близко ко времени их численной интерпретации программой CalcSym [22]. Это подтверждает эффективность предложенного алгоритма и целесообразность выполнения численной интерпретации в ходе генерации формулы определителя.

Более критичным параметром расчета является не время, а емкость дисковой памяти для хранения результата. Символьный расчет определителей высоких порядков оказывается возможным благодаря умеренному росту размера формулы. При увеличении порядка матрицы на единицу объем результата увеличивается в 3–4 раза, а не на порядок, как при добавлении одного узла к полной схеме [20].

Таблица 3. Размер, время генерации и интерпретации выражений, сгенерированных программой HalfMat для определителей полных матриц 10–17 порядков

| N  | Число символов формулы | Время             |                    |
|----|------------------------|-------------------|--------------------|
|    |                        | генерации         | интерпретации      |
| 10 | 451080                 | 00 min. 00.07 sec | 00 min. 00.14 sec. |
| 11 | 1754172                | 00 min. 00.23 sec | 00 min. 00.25 sec. |
| 12 | 5640936                | 00 min. 00.84 sec | 00 min. 00.65 sec. |
| 13 | 24195876               | 00 min. 03.92 sec | 00 min. 03.01 sec. |
| 14 | 79297152               | 00 min. 11.98 sec | 00 min. 09.33 sec. |
| 15 | 296675280              | 00 min. 47.21 sec | 00 min. 36.23 sec. |
| 16 | 940616820              | 02 min. 33.77 sec | 01 min. 55.30 sec. |
| 17 | 6 338 731 487          | 12 min. 41.04 sec | 11 min. 07.37 sec. |

Для расчета полных матриц с порядками, превышающими «разумные» значения, предложенный алгоритм позволяет весьма просто

реализовать параллельные вычисления, что для матрицы 17-го порядка показано в табл.4.

Таблица 4. Параллельные вычисления для раскрытия определителя матрицы 17-го порядка

| Номер процессора | 24310 сочетаний из 17 по 8 |          | Число символов | Время генерации   |
|------------------|----------------------------|----------|----------------|-------------------|
|                  | Начальное                  | Конечное |                |                   |
| 1                | 1                          | 6077     | 1201052140     | 03 min. 12.05 sec |
| 2                | 6078                       | 12154    | 1187998657     | 03 min. 09.25 sec |
| 3                | 12155                      | 18231    | 1186904695     | 03 min. 18.87 sec |
| 4                | 18232                      | 24310    | 1175219065     | 03 min. 00.49 sec |

Как видно, объем потоков примерно одинаковые, поэтому мало отличаются затраты времени. Если одновременно запустить 4 исполняемых файла для всех потоков, то операционная система с несколькими процессорными ядрами будет распараллеливать вычисления. Это приведет уменьшению окончания времени окончания расчета всеми потоками. Оно будет меньше суммарного времени расчета, которое указано в табл.4.

При недостатке памяти можно уменьшить число одновременно запускаемых потоков и учесть неодновременное окончание расчета при запуске потока с задержкой. При завершении расчета потока результат вычисляется интерпретатором, и память, занятая этим результатом, освобождается. Если это не автоматизировано, то важно отслеживать окончание расчета, вычислять этот поток и удалять результат, освобождая память.

## Выводы

1. Разработан алгоритм минимального разложения полной матрицы на основе выделения миноров половинной размерности. Проведенное сравнение с выражениями, сформированными выделением всех элементов строки или столбца (программа CirSym), показывает многократное преимущество минимальных формул (программа HalfMat).

2. Реализованная компьютерная программа HalfMat, наряду с разложением определителя на одном процессоре, обеспечивает автоматическое распределение вычислений на произвольное число потоков для проведения параллельных вычислений. Алгоритм HalfMat используется в составе программы MatSym для решения систем линейных алгебраических уравнений в аналитическом виде. Современные системы аналитических вычислений не располагают возможностями для столь компактной свертки матричных определителей.

3. Компактность генерируемых выражений делает их удобными для теоретического анализа и эффективными при нахождении численных значений символьных определителей высоких порядков. Выражения формируются настолько быстро, что время их генерации сопоставимо со временем численной интерпретации.

### Список литературы

1. Боревич З.И. Определители и матрицы.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.– 184 с.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – 6-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – С. 25–27.

3. Лета Ю. Г., Первунинский С.М. Разложение определителей матриц по минорам выбранных элементов // Радиоэлектроника и информатика / Харьков: Харьковский национальный университет радиоэлектроники, 1999.– Вып. 4 (9).– С.34–37.

4. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Эффективные алгоритмы разложения матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2015. – Вып. 12. – С. 195–215.

5. Alderson G.E., Lin P.M. Computer generation symbolic network functions – a new theory and implementation // IEEE Trans. on Circuit Theory.– 1973.– Vol. CT–20, no. 1.– P. 48–56.

6. Lin P.M. Symbolic network analysis.- Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo: Elsevier, 1991.– 319 p.

7. Pierzchala M., Rodanski B. Obtaining symbolic network functions of large circuits by block decomposition of the node admittance matrix // Proc. of the European conference on circuit theory and design.– 1995.– P. 71–74.

8. Verhaegen W., Gielen G. An efficient evaluation scheme for linear transfer functions using the determinant decision diagram representation of the system determinant // Proc. of the fifth international workshop on symbolic methods and applications in circuit design.– 1998.– P. 125–129.

9. Lasota S. Multilevel hierarchical always cancellation-free symbolic analysis method for large electric networks // Elektronika: konstrukcje, technologie, zastosowania (Poland). – 2013.– Vol. 54, no. 2.– P. 51–57.

10. Breuer M.A. Generation of optimal code for expressions via factorization // Communications of the Association for computing machinery.– 1969.– Vol. 12, N 6.– P. 333–340.

11. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // Электричество.– 1995.– № 4.– С. 36–43.

12. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество.– 2001.– №8.– С.33–42.

13. Филаретов В.В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф.– Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.– С. 13–15.

14. Филаретов В.В. О взаимосвязи схемного и матричного определителей // Системы искусственного интеллекта: алгоритмы обработки и модели: Тр. международ. конф. КЛИН–2002.– Ульяновск: УлГТУ, 2002. – Т. 4. – С. 85–93.

15. Королев Ф.А., Филаретов В.В. Сравнение единых и последовательных выражений матричных определителей по точности вычислений // Вопросы теории и проектирования электрических машин. Моделирование электромеханических процессов: Сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – С. 123–132.

16. Королев Ф.А., Филаретов В.В. Сравнение способов наращивания и половинного деления при символьном раскрытии матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей:

Международный сборник научных трудов САД–2009. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7.– С. 183–193.

17. Филаретов В. В. Генерация компактных формул для матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С. 121–133.

18. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Разложение определителей матриц с одинаковыми элементами в символьном виде // In memoriam: Султан Галимзянович Валеев: сборник памяти С.Г.Валеева.– Ульяновск: УлГТУ, 2016.– С. 104–114.

19. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С.158–171.

20. Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a nested rational form // International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles.– May 2020.– P. 1–25.

21. Дмитришин Р.В. О точности вычисления определителя матрицы Гильберта // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2011.– Вып. 9.– С. 133–154.

22. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Формирование, интерпретация и компиляция символьных функций электронных схем // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф.–Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.– С. 10–12.

**Недорезов Максим Владимирович** – аспирант факультета аэромеханики и летательных аппаратов Московского Физико-Технического Института.

E-mail: nedmv@rambler.ru

**Филаретов Владимир Валентинович** – доктор технических наук, ответственный редактор международного научного сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: vvfil@mail.ru

## РАЗЛОЖЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПОЛНЫХ МАТРИЦ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Д. С. Курганов, В. Ф. Тимофеев, В. В. Филаретов

*Обсуждается использование современных компиляторов для генерации минимальных выражений определителей полных матриц. Приводятся параметры выражений, сгенерированных программой HalfMat для матриц 18–21 порядков. Показано, что сложность выражений и время их генерации увеличивается в 3–4 раза при увеличении порядка матрицы на единицу. Предложена модификация программы HalfMat с одним (вместо двух) рекурсивным вызовом, что позволило существенно сократить объем кода.*

*The use of modern compilers for generating minimal expressions of determinants of complete matrices is discussed. The parameters of expressions generated by the HalfMat program for matrices of 18–21 orders are given. It is shown that the complexity of expressions and their generation time increases by 3-4 times when the matrix order increases by one. A modification of the HalfMat program with one (instead of two) recursive calls is proposed, which significantly reduces the amount of code.*

**Свертка формул и генерация матричных определителей.** Обычно, когда заходит речь о разложении определителя матриц в символьной форме, спрашивают, приведены ли подобные слагаемые и вынесены ли за скобки общие множители? Определитель выше пятого, шестого порядка редко рассматривают в символьном виде из-за слишком большого количества слагаемых. Сложившуюся практику не в состоянии изменить распространение систем компьютерной алгебры. Даже самые совершенные из них отличаются невысоким качеством свертки формируемых выражений и большими затратами времени генерации [1]. Поэтому полностью заполненная элементами (полная матрица) 10 порядка является непреодолимой планкой для большинства современных систем аналитических вычислений.

Существующее положение на рынке систем искусственного интеллекта для поддержки инженерных и математических разработок может изменить программа HalfMat [2], которая генерирует не подлежащие дальнейшей свертке минимальные матричные выражения. Успех HalfMat обеспечила сверхкомпактная факторизация символьного определителя. При свертке необходимо оперировать не отдельными слагаемыми, а подвыражениями в скобках. Обычно используют разложение по строкам или столбцам, «потолок» для которого – матрица 12-го порядка. При оптимальном выборе порядка миноров для разложения (половинном делении матрицы [1]) нельзя улучшить только формулы для второго и третьего порядка, но, например, для 4-го порядка минимальная формула имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \det_{\min} = & \\
 & +(a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}) * (a_{33} * a_{44} - a_{34} * a_{43}) - \\
 & (a_{11} * a_{32} - a_{12} * a_{31}) * (a_{23} * a_{44} - a_{24} * a_{43}) + \\
 & (a_{11} * a_{42} - a_{12} * a_{41}) * (a_{23} * a_{34} - a_{24} * a_{33}) + \\
 & (a_{21} * a_{32} - a_{22} * a_{31}) * (a_{13} * a_{44} - a_{14} * a_{43}) - \\
 & (a_{21} * a_{42} - a_{22} * a_{41}) * (a_{13} * a_{34} - a_{14} * a_{33}) + \\
 & (a_{31} * a_{42} - a_{32} * a_{41}) * (a_{13} * a_{24} - a_{14} * a_{23}); \quad (1)
 \end{aligned}$$

Получение четвертого слагаемого формулы (1) разобрано на обложке сборника.

**Нахождение размера результата.** При разложении определителей матриц с порядками, большими 17-го [1], возникают сложности с подсчетом числа символов формулы и ее вычислением.

Длина формулы определителя матрицы 16-го порядка является предельной для счетчика символов из 4 байтов. Проблема с невыделением памяти под целое число обычно связана с использованием указателей. Теперь указатели теперь не рекомендуют использовать.  
<https://ru.stackoverflow.com/questions/465742/Указатель-на-тип-char>  
<https://tproger.ru/articles/cpp-pointers/>

Чтобы не было проблем с указателями нужно иметь всё 64-битное: 1) операционную систему; 2) компилятор; 3) исполняемый файл halfmat64.exe. При 32-х или 64 битных компиляциях меняются только

указатели. 4 байта или 8 байт соответственно выделяется именно под указатели, а не под разные виды целых (int, long int, long long int и т.д.). Оценка длины выражения может быть разная, что обусловлено обычно работой разных компиляторов и процессоров при компиляции и последующих запусках.

Следует различать число символов формулы и размер файла, куда она помещена разрезанной для удобства чтения или обработки. Например, для матрицы 16-го порядка получается, что шестая часть файла результата занята бесполезными символами:

Length of expression = 940 616 820 characters

Length of file = 1 216 467 235 characters

Execution time: 00 hour 01 min. 27.06 sec

Численному интерпретатору CalcSym (автор Д.В.Шеин, 1999г.) [3] не требуется редактирование формулы (нарезка примерно по 70 символов в строке). Высокая скорость генерации определителя программой HalfMat подтверждается тем, что интерпретатор выполняет расчет этой формуле дольше, чем генерируется сама формула:

detmin= 2.8624230515098158e+18

Execution time: 00 hour 02 min. 00.32 sec.

В качестве полной матрицы с порядком  $p$  для тестов высокого порядка берется матрица полной  $q$ -узловой схемы ( $q=p+1$ ) с проводимостями, равными 1. В рассматриваемом случае  $q=17$ . Определитель такой матрицы для простой проверки расчета находится по формуле Кэли:  $T=q^{q-2} = 17^{15}$ :  $T=2.8624230515098158e+18$ .

Задачами статьи является расширение границ применения программы HalfMat [2] применительно к полным матрицам высокого порядка (больших 17) и оптимизация исходного кода этой программы.

**Определители матриц 18–22 порядков.** В новейшей версии компилятора Embarcadero Builder C++ 10.3.3 2019 г. была создана программа halfmat64.exe. Эта программа показала двухкратное ускорение по сравнению с расчетами до 17-го порядка, проведенными на версии halfmat.exe для компилятора Borland C++ Builder 6.0 2002 года [2]. Такое большое ускорение можно объяснить только распараллеливанием вычислений при сборке исполняемого файла.

В табл. 1 приведены показатели генерации и интерпретации для матриц 18–21 порядков.

Таблица 1. Показатели формул определителей полных матриц 18–21 порядков

| Порядок матрицы | Число символов | Размер файла результата | Время генерации |
|-----------------|----------------|-------------------------|-----------------|
| 18              | 16 319 194 320 | 20 890 643 350          | 24 мин.         |
| 19              | 62827013964    | 82 020 579 171          | 1 час 33 мин.   |
| 20              | 201070168728   | 256 250 083 569         | 4 час 48 мин.   |
| 21              | 923256362792   | 1154070453490           | 21 час 57 мин.  |
| 22              | 2951830823760  | 3682124649706           | 61 час 22 мин.  |

Для просмотра результатов (по F3) использовался farmanager. Другие программы не могут открыть такие большие файлы.

При вычислениях определителей матриц высокого порядка использовался процессор Intel Xeon CPU E5620 2,4 ГГц, 4-ядерный, в гипертрейдинге 8 ядер. Операционная система Windows 10, 64 разрядная, оперативная память 36 Гбайт DDR3, Жесткий диск 3 Тбайта WDC WD30EZRХ00МММВО.

В табл. 2 показан ход получения формулы определителя для матрицы 22-го порядка и скорость генерации выражения. Видно, что скорость генерации остается примерно постоянной на всем протяжении расчета.

Судить об эффективности генерации формулы определителя можно по времени копирования файла результата. Файл определителя полной матрицы 22 порядка размером 3682124649706 байт копировался на жесткий диск 27 часов. Это всего в два с лишним раза меньше времени, затраченного на генерацию формулы – 61 час 22 мин. (табл. 1). Сравнить затраты времени на генерацию формулы определителя со временем интерпретации не было возможности – это потребовало бы не менее недели непрерывного счета.

**Разработка версии программы HalfMat с единственным рекурсивным вызовом.** В программе HalfMat [2] используется два рекурсивных вызова. Один из них используется для раскрытия минора

(первого сомножителя слагаемого определителя), а вторым раскрывается дополнительный минор, являющийся вторым сомножителем слагаемого определителя. Так получается очередное слагаемое определителя, соответствующее комбинации строк, полученной генератором сочетаний.

Слагаемые определителя находятся в цикле генератора сочетаний. Если организовать второй внутренний цикл, то можно обойтись одним рекурсивным вызовом из тела функции, как в приведенном ниже тексте модифицированной функции `halfm`.

Таблица 2. Процесс формирования определителя полной матрицы 22 порядка

| №  | Размер файла<br>22.out,<br>в байтах | Текущее<br>время суток<br>с 19.06.2020 | Интервал,<br>в минутах | Скорость<br>генерации,<br>байт/мин | Средняя<br>скорость,<br>байт/мин |
|----|-------------------------------------|--|------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| 1  |                                     | 1–27                                   |                        |                                    |                                  |
| 2  | 769 517 189                         | 1–28                                   | 1                      | 769517189                          |                                  |
| 3  | 6 077 081 155                       | 1–33                                   | 5                      | 1061512793                         | 915514991                        |
| 4  | 10 895 600 564                      | 1–38                                   | 5                      | 963703882                          | 931577955                        |
| 5  | 18 170 054 681                      | 1–46                                   | 8                      | 909306765                          | 926010157                        |
| 6  | 22 548 522 283                      | 1–50                                   | 4                      | 1094616901                         | 959731506                        |
| 7  | 162 534 521 260                     | 4–10                                   | 140                    | 999899993                          | 966426254                        |
| 8  | 419 020 521 410                     | 8–25                                   | 255                    | 1005827452                         | 972054996                        |
| 9  | 439 137 307 456                     | 8–45                                   | 20                     | 1005839302                         | 976278034                        |
| 10 | 522 086 876 516                     | 10–08                                  | 83                     | 999392398                          | 978846297                        |
| 11 | 573 202 294 858                     | 10–59                                  | 51                     | 1002263105                         | 981187978                        |
| 12 | 681 681 445 090                     | 12–47                                  | 108                    | 1004436576                         | 983301487                        |
| 13 | 777 421 328 380                     | 14–22                                  | 95                     | 1007788245                         | 985342050                        |
| 14 | 893 745 433 754                     | 16–18                                  | 116                    | 1002794012                         | 986684509                        |
| 15 | 1 173 438 218 582                   | 20–56                                  | 278                    | 1006089154                         | 988070555                        |
| 16 | 1 312 156 282 876                   | 23–15                                  | 139                    | 997971686                          | 988730630                        |
| 17 | 1 580 382 320 088                   | 3–42                                   | 267                    | 1004591900                         | 989721959                        |
| 18 | 1 948 022 826 975                   | 9–48                                   | 366                    | 1004482259                         | 990590212                        |
| 19 | 2 308 414 171 564                   | 15–47                                  | 359                    | 1003875612                         | 991328290                        |
| 20 | 2 518 937 505 153                   | 19–17                                  | 210                    | 1002492065                         | 991915857                        |
| 21 | 2 789 970 829 423                   | 23–48                                  | 271                    | 1000122968                         | 992326213                        |
| 22 | 3 223 626 895 817                   | 7–01                                   | 433                    | 1001515165                         | 992763782                        |
| 23 | 3 364 302 774 960                   | 9–22                                   | 141                    | 997701271                          | 992988213                        |
| 24 | 3 460 495 962 915                   | 10–58                                  | 96                     | 1002012375                         | 993380568                        |
| 25 | 3 639 373 527 065                   | 13–57                                  | 179                    | 999316001                          | 993627878                        |
| 26 | 3 682 124 649 706                   | 14–40<br>21.06.2020                    | 43                     | 994212154                          | 993651249                        |

```

void halfm(int act_n, MATR *act) { // модификация half [2]
int k,k2,p,stg,d,d2,sgn=0,n=0, w;
int i,i1,j,j1,m,m1,v,a,cmb[30],cmbi[30];
MATR *act1;
if (act_n==1) {вывод определителя первого порядка; return;}
p=sqrt(act_n); // вычисление порядка матрицы
if (p==2) {вывод определителя второго порядка; return;}
else if (p==3) {вывод определителя третьего порядка; return;}
k=p/2; // порядок минора при вертикальном половинном делении матрицы
d=k+p%2; // порядок дополнительного минора
k2=k*k; // число элементов минора
d2=d*d; // число элементов дополнительного минора
for (i=0;i<k;i++) {cmb[i]=i; // сочетание для первого слагаемого
sgn+=j;} // постоянная составляющая знака
rep2: for (i=0;i<p;i++) cmbi[i]=0; // вектор для строк минора (1)
for (i=0;i<k;i++) cmbi[cmb[i]]=1; // и дополнительного минора (0)
rep1: n++; // счетчик миноров (1) и дополнительных миноров (2)
if (n%2) { // вывод знака слагаемого
for (j=0;j<k;j++) sgn+=cmb[j]; // переменная составляющая знака
if (sgn%2) strcat(b+,"-"); else strcat(b+,"+");
strcat(b+,"("); w=k2;} else {strcat(b+,"*("); b+=3; w=d2}
// выделение памяти под минор или дополнительный минор
if (k!=d) act1=(MATR *) realloc (act1,w*sizeof(MATR)); m=0; stg=0;
for (i=0;i<act_n;i+=p)
if (n%2)
{if (cmbi[stg++]) // формирование минора
for (j=0;j<k;j++) act1[m++].reb=strdup(act[i+j].reb);}
else {if (!cmbi[stg++]) {m1=i+k; // дополнительного минора
for (j=0;j<d;j++) act1[m++].reb=strdup(act[m1+j].reb);} }
halfm(w,act1); // генерация минора или дополнительного минора
for (i=0;i<w;i++) free(act1[i].reb); // освобождение памяти от миноров
if (n%2) goto rep1; // переход на генерацию дополнительного минора
else {strcat(b+,")"); n=0;} // переход к следующему слагаемому определителя
kontrol(); // разрезание строки по 70 символов
if (cmb[k-1]<p-1) {cmb[k-1]++; goto rep2;} // к следующему слагаемому
else if (cmb[k-1]==p-1)
{if (cmb[k-1]-cmb[k-2]==1)

```

```

{j1=1;      // ГЕНЕРАТОР СОЧЕТАНИЙ ИЗ p ПО k
for (m = k-1; m > 1; m--)
if (cmb[m]-cmb[m-1]==1) j1++; else break;
i1=k-j1-1;
} else i1=k-2;
a=cmb[i1]; v=1;
for (m=i1;m<k;m++)
cmb[m]=a+v++;
if (cmb[k-1]<p) goto rep2; // к следующему слагаемому
free(act1);
}}
```

Счетчик дополнительного цикла  $n$  обнуляется после получения двух значений: 1 и 2. При значении «1» в цикле выводится минор, а при значении «2» – дополнительный минор. Теперь в программе не повторяются дважды аналогичные коды для формирования элементов матриц минора и дополнительного минора. Это значительно уменьшило текст и упростило его восприятие, хотя число операций почти не изменилось, что показало тестирование функции `halfm`. Комментарии в тексте программы делают понятными ее работу, конечно, после изучения теоремы Лапласа [2, 7].

### **Выводы**

**1.** Для матриц высокого порядка время численной интерпретации формулы определителя до двух и более раз превышает время ее генерации. Этот разрыв увеличивается с повышением порядка матрицы, что говорит об эффективности генератора матричных формул `HalfMat`.

**2.** Установлено, что сложность формулы определителя и время ее генерации увеличиваются линейно (примерно в 3–4 раза) с увеличением порядка матрицы на единицу. `HalfMat.exe` в большей степени, чем другие инструменты символьного анализа, может конкурировать с численными программами для решения систем линейных алгебраических уравнений.

**3.** Разработана и реализована версия функции `half` с более коротким текстом (`halfm`) и единственным рекурсивным вызовом, что делает программу более короткой, понятной и отличает от прототипа – `half` с двумя рекурсивными вызовами [2].

## Список литературы

1. Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a nested rational form // International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles.– May 2020.– P. 1–25.
2. Филаретов В.В., Недорезов М.В. Минимальные формулы определителей полных матриц на основе их половинного деления // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16.
3. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С.158–171.
4. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Формирование, интерпретация и компиляция символьных функций электронных схем // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф.– Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.– С. 10–12.
5. C++ Builder (2019–2002гг.)  
[https://ru.wikipedia.org/wiki/C%2B%2B\\_Builder](https://ru.wikipedia.org/wiki/C%2B%2B_Builder)
6. Embarcadero C++Builder Community Edition  
<https://www.embarcadero.com/ru/products/cbuilder/starter/free-download>
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – 6-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – С. 25–27.

**Курганов Дмитрий Сергеевич** – инженер-программист и системный администратор, г. Ульяновск . E-mail: kurganov\_ds@mail.ru

**Тимофеев Владимир Федорович** – инженер-конструктор 2 категории, Ульяновский филиал Конструкторского бюро Публичного Акционерного Общества "ТУПОЛЕВ" (ПАО «Туполев»). Адрес: 432072, г. Ульяновск, Россия, пр-т Антонова. E-mail: v.f.timofeev@mail.ru

**Филаретов Владимир Валентинович** – доктор технических наук, ответственный редактор международного научного сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: vvfil@mail.ru

## ОПТИМИЗАЦИЯ СИМВОЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ

П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Показано, что разложение по строке или столбцу с меньшим числом ненулевых элементов не всегда обеспечивает уменьшение операций в символьном определителе матрицы. Рассмотрено выделение элементов матрицы, образующих квартеты на пересечении двух строк и двух столбцов для уменьшения числа операций. Предложено половинное деление матрицы для разложения на миноры разреженных матриц высокого порядка. При этом разреженная матрица обрабатывается как полностью заполненная, но подвыражения, соответствующие нулевым минорам, не генерируются.

It is shown that expansion on a row or column with fewer non-zero elements does not always reduce operations in the symbolic determinant of the matrix. The selection of matrix elements that form quartets at the intersection of two rows and two columns to reduce the number of operations is considered. A half division of the matrix is proposed for the minor decomposition of sparse high-order matrices. In this case, the sparse matrix is treated as completely filled, but subexpressions corresponding to zero minors are not generated.

При разложении определителя полностью заполненной матрицы по элементам строк минимум операций достигается при последовательном выделении элементов из одной и той же строки, не переходя к строкам с большим числом элементов [1]. В случае разреженной матрицы также предпочтение отдается элементам строк, которые содержат меньшее число элементов [2, 3]. Но там незаполненные строки могут конкурировать по предпочтительности выделения элементов.

Таким «контрпримером» является матрица 5-го порядка (рис. 1). Опираясь на традиционную оценку сложности разложения определителя, следует начать разложение с первой строки, которая содержит минимальное число элементов.

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| a11 | a12 |     |     |     |
|     |     | a23 | a24 | a25 |
| a31 | a32 | a33 | a34 | a35 |
| a41 | a42 | a43 | a44 | a45 |
| a51 | a52 | a53 | a54 | a55 |

Рис.3. Матрица пятого порядка  
с незаполненными двумя строками

Разложение по двум элементам первой строки приводит к выражению:

$$\det 2 = a_{11} * (a_{23} * (-a_{34} * (-a_{45} * (-a_{52}) + a_{55} * (-a_{42})) - a_{35} * (a_{44} * (-a_{52}) - a_{54} * (-a_{42}))) + (a_{32}) * (- (a_{44} * a_{55} - a_{45} * a_{54}))) +$$

$$a_{24} * (a_{33} * (-a_{45} * (-a_{52}) + a_{55} * (-a_{42})) + a_{35} * (a_{43} * (-a_{52}) - a_{53} * (-a_{42}))) + (a_{32}) * (- (-a_{43} * a_{55} + a_{53} * a_{45}))) +$$

$$a_{25} * (a_{33} * (a_{44} * (-a_{52}) - a_{54} * (-a_{42})) + a_{34} * (-a_{43} * (-a_{52}) + a_{53} * (-a_{42}))) + (a_{32}) * (- (a_{43} * a_{54} - a_{53} * a_{44}))) +$$

$$a_{12} * (a_{23} * (-a_{34} * (-a_{45} * (a_{51}) + a_{55} * (a_{41})) - a_{35} * (a_{44} * (+a_{51}) - a_{54} * (+a_{41}))) + (-a_{31}) * (- (a_{44} * a_{55} - a_{45} * a_{54}))) +$$

$$a_{24} * (a_{33} * (-a_{45} * (+a_{51}) + a_{55} * (+a_{41})) + a_{35} * (a_{43} * (+a_{51}) - a_{53} * (+a_{41}))) + (-a_{31}) * (- (-a_{43} * a_{55} + a_{53} * a_{45}))) +$$

$$a_{25} * (a_{33} * (a_{44} * (+a_{51}) - a_{54} * (+a_{41})) + a_{34} * (-a_{43} * (+a_{51}) + a_{53} * (+a_{41}))) + (-a_{31}) * (- (a_{43} * a_{54} - a_{53} * a_{44})));$$

Эквивалентное разложение по трем элементам второй строки оказалось (что неожиданно) менее сложным:

$$\det 3 = a_{23} * (-a_{34} * (-a_{45} * (a_{11} * -a_{52} + a_{12} * a_{51}) + a_{55} * (a_{11} * -a_{42} + a_{12} * a_{41})) - a_{35} * (a_{44} * (a_{11} * -a_{52} + a_{12} * a_{51}) - a_{54} * (a_{11} * -a_{42} + a_{12} * a_{41})) + (a_{11} * a_{32} - a_{12} * a_{31}) * (- (a_{44} * a_{55} - a_{45} * a_{54}))) +$$

$$a_{24} * (a_{33} * (-a_{45} * (a_{11} * -a_{52} + a_{12} * a_{51}) + a_{55} * (a_{11} * -a_{42} + a_{12} * a_{41})) + a_{35} * (a_{43} * (a_{11} * -a_{52} + a_{12} * a_{51}) - a_{53} * (a_{11} * -a_{42} + a_{12} * a_{41})) + (a_{11} * a_{32} - a_{12} * a_{31}) * (- (-a_{43} * a_{55} + a_{53} * a_{45}))) +$$

$$a_{25} * (a_{33} * (a_{44} * (a_{11} * -a_{52} + a_{12} * a_{51}) - a_{54} * (a_{11} * -a_{42} + a_{12} * a_{41})) + a_{34} * (-a_{43} * (a_{11} * -a_{52} + a_{12} * a_{51}) + a_{53} * (a_{11} * -a_{42} + a_{12} * a_{41})) + (a_{11} * a_{32} - a_{12} * a_{31}) * (- (a_{43} * a_{54} - a_{53} * a_{44})));$$

При подстановке параметров:  $a_{11}=1/1$ ;  $a_{12}=1/2$ ;  $a_{23}=1/4$ ;  $a_{24}=1/5$ ;  $a_{25}=1/6$ ;  $a_{31}=1/3$ ;  $a_{32}=1/4$ ;  $a_{33}=1/5$ ;  $a_{34}=1/6$ ;  $a_{35}=1/7$ ;  $a_{41}=1/4$ ;  $a_{42}=1/5$ ;  $a_{43}=1/6$ ;  $a_{44}=1/7$ ;  $a_{45}=1/8$ ;  $a_{51}=1/5$ ;  $a_{52}=1/6$ ;  $a_{53}=1/7$ ;  $a_{54}=1/8$ ;  $a_{55}=1/9$  получаем:  $\det 2 = -9.84189972285210e-09$   
 $\det 3 = -9.84189972285210e-09$ , то есть  $\det 2 = \det 3$ .

Показатели формул соответственно: \* = 62; + = 33; - = 43; a = 76; = = 27; ( = 62; ) = 62; L = 770

и

\* = 60; + = 23; - = 29; a = 52; = = 27; ( = 30; ) = 30; L = 665. Таким образом, в случае разреженной матрицы, выбрав строку с меньшим числом элементов, можно не получить результат с большей сложностью по числу операций.

Руководствуясь правилом выбора элементов из строки с меньшим числом элементов, можно делать неверные заключения об оптимальности получаемого решения, что обсуждается в следующем разделе.

**Определитель матрицы 4-го порядка.** В определителе матрицы 4-го порядка второго примера из статьи [2] можно сделать на два умножения и одно сложение меньше. Эта матрица является еще одним контрпримером, опровергающим положение, что разложение определителя по строке или столбцу с наименьшим числом элементов приводит к формуле меньшей сложности. Разреженная матрица из [2] имеет вид:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | e |   | M |
| b | f | j | n |
|   | g | k | p |
| d |   | l |   |

Оптимальным по мнению автора является выражение определителя:

$$\Delta = bl(pe+gm) + d(j(pe+gm) + k(ne+fm)), \quad (1)$$

которое получено первоочередным выбором выделяемого по Лапласу элемента из строки или столбца с наименьшим числом элементов. Выражение (1) и все последующие выражения не учитывают знаки слагаемых определителя, поскольку интерес представляет только его свертка (факторизация). Поэтому для упрощения решения все слагаемые взяты с положительными знаками.

Выражение (1), которое содержит 11 умножений и 9 сложений, не является минимальным. Таковым является следующее выражение:

$$\Delta = (bl+dj)(pe+gm) + dk(ne+fm). \quad (2)$$

Выражение (2) требует всего 9 умножений и 4 сложения.

Для разработки общего алгоритма разложения разреженных матриц посмотрим, чему соответствуют множители в скобках, состоящие из двух слагаемых.

**Квартеты элементов в матрице.** Элементы в первой скобке  $bl+dj$  образуют такой «квартет»:

|   |  |   |  |
|---|--|---|--|
|   |  |   |  |
| b |  | j |  |
|   |  |   |  |
| d |  | l |  |

Для второй скобки  $pe+gm$  получается:

|  |   |  |   |
|--|---|--|---|
|  | e |  | m |
|  |   |  |   |
|  | g |  | p |
|  |   |  |   |

Для третьего «квартета» элементов  $ne+fm$  можно записать:

|  |   |  |   |
|--|---|--|---|
|  | e |  | m |
|--|---|--|---|

|  |   |  |   |
|--|---|--|---|
|  | f |  | n |
|  |   |  |   |
|  |   |  |   |

Представление определителя в виде диаграммы не предусматривает выделение подвыражений (элементов в скобках). Обратим внимание на первую скобку, которая не содержит элементов, повторяющихся в других двух скобках. Как видно, не случайно следует выделять первый квартет в первую очередь.

**Разложение матрицы по квартету.** Выполняем разложение определителя матрицы по первому квартету:

$$\Delta = (bl + dj)\Delta_1 + \Delta^1. \quad (3)$$

Для выделения первого квартета (нахождения  $\Delta_1$  следует удалить строки и столбцы, стоящие на его пересечении. Первая скобка умножается на определитель матрицы второго порядка, которая соответствует второму квартету (второй скобке):

|   |   |
|---|---|
| e | m |
| g | p |

Отсюда:

$$\Delta_1 = (pe + gm). \quad (4)$$

Для получения второго слагаемого  $\Delta^1$  определителя (3) необходимо найти определитель матрицы, которая получена удалением элементов первого квартета, которые находятся в строках или столбцах с элементами, не входящими в удаляемый квартет. Это положение доказывается на основе схемного отображения матрицы.

Отсюда:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | e |   | m |
|   | f |   | n |
|   | g | k | p |
| d |   |   |   |

Среди элементов первого квартета только элемент d находится на пересечении строки и столбца, в которые входят только элементы, находящиеся в первом квартете (это элементы b и l). В полученной матрице безусловного выделения требуют элементы d и k, что приводит к матрице второго порядка:

|   |   |
|---|---|
| e | m |
| f | n |

Таким образом, второе слагаемое определителя (3) примет вид:

$$\Delta^1 = dk(ne + fm). \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получаем (2).

В формуле (1) (она соответствует диграфу на рис. 2,б [2]) 11 умножений. Именно столько вершин у диграфа на рис.2,б. Поэтому авторы диаграммных методов приводят параметры своих диаграмм, совпадающие с параметрами вложенных формул. Равенство этих показателей объясняется низким качеством свертки, обеспечиваемой диаграммными методами.

Переходя к анализу схем, нужно отметить, что в диаграмме нельзя учитывать кратное соединение элементов, потому что каждому параметру должна соответствовать вершина диаграммы. В первом столбце с худшими показателями свертки для полных схем у нас намного меньше умножений, чем будет вершин в диграфе, так как диаграммный метод запрещает объединять параллельные (или последовательные) ветви.

Выделение квартетов эффективнее, чем выделение отдельных элементов матрицы, но также не решает проблему разложения разреженных матриц высокого порядка в десятки строк и столбцов.

**Разреженные матрицы высокого порядка.** При разложении определителей больших матриц квартеты являются слишком мелкими фрагментами, чтобы привести к резкому сокращению сложности выражения. Выделение квартетов (матриц 2 на 2) обеспечит существенное уменьшение сложности формулы по сравнению с выделением отдельных элементов. Рекурсивное половинное деление при разложении определителя на миноры показало эффективность на полностью заполненных матрицах высокого порядка [4, 5].

Что мешает применить соответствующую модификацию программы HalfMat для разложения определителей разреженных матриц? Например, матрицы Гинзбурга 40-порядка [6] (рис. 1). Для этого необходимо выполнять удаление полвыражений, которые

умножаются на ноль, подобно тому, как это делается при учете вырожденных схем в программе CirSym [7].

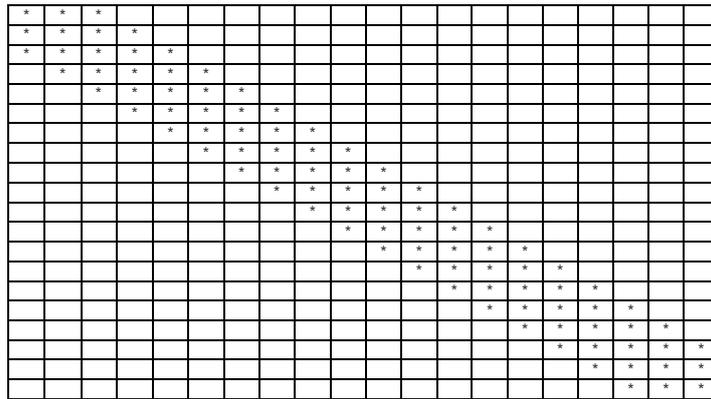


Рис. 1. Левый верхний квадрант (20 на 20)  
5-ти диагональной матрицы Гинзбурга 40-го порядка

Избегать рассмотрения нулевых миноров позволяет простая проверка подматриц на включение нулевой строки или столбца. Предлагаемая модификация функции half для разреженных матриц имеет следующий вид (функция halves):

```
void halves(int act_n, MATRV *act)
{
    int k,k2,p,stg,d,d2,sgn0=0,sgn;
    int i,i1,j,j1,m,m1,mf,v,a,cmb[40],cmbi[40];
    unsigned long long int dl,dl1;
    MATRV *act1;

    if (act_n==1) {вывод определителя первого порядка; return;}
    p=sqrt(act_n); // вычисление порядка матрицы
    if (p==2) {вывод определителя второго порядка; return;}
    k=p/2; // порядок минора при вертикальном половинном делении матрицы
    d=k+p%2; // порядок дополнительного минора
    k2=k*k; // число элементов минора
    d2=d*d; // число элементов дополнительного минора
    for (j=d;j<p;j++) sgn+=j; // постоянная составляющая знака
    stg=0;
    for (i=0;i<act_n;i+=p)
    {m=0;
    for (j=k;j<p;j++) if (act[i+j].val) m++;
    if (m) break;
```

```

    stg++; }
j=stg+k;
for (i=stg;i<j;i++) cmb[i-stg]=i; // сочетание для первого слагаемого
act1=(MATRV *) malloc (k2*sizeof(MATRV));
rep2:
for (i=0;i<p;i++) cmbi[i]=0;
for (i=0;i<k;i++) cmbi[cmb[i]]=1;
m=0; mf=0; stg=0;
if (k!=d) act1=(MATRV *) realloc (act1,k2*sizeof(MATRV));
for (i=0;i<act_n;i+=p)
if (cmbi[stg++]) {m1=i+d;
for (j=0;j<k;j++)
{act1[m].reb=strdup(act[m1+j].reb);
act1[m++].val=act[m1+j].val;
if (act[m1+j].val) mf++; }}
if (!mf) goto con; // слагаемое пропускается – нулевая строка
for (j=d;j<p;j++)
{mf=0;
for (i=0;i<act_n;i+=p) if (act[i+j].val) mf++;
if (!mf) goto con; // слагаемое пропускается – нулевой столбец
}
sgn=sgn0;
for (j=0;j<k;j++) sgn+=cmb[j];
dl=leng+strlen(c);
if (sgn%2) strcat(b+,"-");
else if (*(b-1) != '(') strcat(b+,"+");
if (k>1) strcat(b+,"(");
dl1=leng+strlen(c);
halfs(k2,act1); // ВЫВОД МИНОРА
for (i=0;i<k2;i++) free(act1[i].reb);
if (dl1==leng+strlen(c)) {ster(dl); goto con;} // нет минора
if (k>1) strcat(b+,")");
kontrol();
m=0; mf=0; stg=0;
if (k!=d) act1=(MATRV *) realloc (act1,d2*sizeof(MATRV));
for (i=0;i<act_n;i+=p)
if (!cmbi[stg++])
for (j=0;j<d;j++)
{act1[m].reb=strdup(act[i+j].reb);
act1[m++].val=act[i+j].val;
if (act[i+j].val) mf++; }
if (!mf) {ster(dl); goto con;} // слагаемое пропускается – нулевая строка
for (j=0;j<d;j++)
{mf=0;

```

```

for (i=0;i<act_n;i+=p) if (act[i+j].val) mf++;
if (!mf) {ster(dl); goto con;} // слагаемое пропускается – нулевой столбец
}
strcat(b+,"*");
if (d>1) strcat(b+,"(");
dl1=leng+strlen(c);
halfs(d2,act1); // вывод дополнительного минора
for (i=0;i<d2;i++) free(act1[i].reb);
if (dl1==leng+strlen(c)) {ster(dl); goto con;} // нет дополнительного минора
if (d>1) strcat(b+,")");
kontrol(); // разрезание строки по 70 символов
con:
if (cmb[k-1]<p-1) {cmb[k-1]++; goto rep2;} // к следующему слагаемому
else if (cmb[k-1]==p-1)
{if (cmb[k-1]-cmb[k-2]==1)
{j1=1; // ГЕНЕРАТОР СОЧЕТАНИЙ ИЗ p ПО k
for (m = k-1; m > 1; m--)
if (cmb[m]-cmb[m-1]==1) j1++; else break;
i1=k-j1-1;
} else i1=k-2;
a=cmb[i1]; v=1;
for (m=i1;m<k;m++) cmb[m]=a+v++;
if (cmb[k-1]<p) goto rep2; // к следующему слагаемому
free(act1); }}

```

Элементы в используемом ранее тесте матрицы Гинзбурга располагались по диагоналям, что усложняло проверку матрицы. В новом тесте gin.cir элементы располагаются блоками по строкам. При этом в первой и второй, 40-й и 39-й строках оказывается по три и четыре элемента. В остальных строках по 5 элементов, причем численные значения соответствующих элементов для каждой пятерки одинаковы. Например, для третьей строки:

G31 3 0 1 0 1 G32 3 0 2 0 -4 G33 3 0 3 0 6 G34 3 0 4 0 -4 G35 3 0 5 0 1 .

Разложение определителя матрицы Гинзбурга с помощью функции halfs обеспечило более чем двухкратное сокращение длины выражения:

Length of expression = 334704 characters

Execution time: 00 hour 00 min. 09.93 sec

Обратим внимание на то, что прохождение теста Гинзбурга на протяжении 20 лет (с 1999 г.) не удавалось существенно улучшить:

Length of expression (CirSym) = 661013 characters

Execution time: 00 hour 00 min. 02.39 sec.

Length of expression (MATSYM): 691467 characters.

Execution time (486DX-100): 9 min. 04 sec.

В частности, это объяснялось наличием дубликаций, вносимых бисекцией схемного отображения матрицы [8] при использовании метода двоичных векторов [9]. В данном случае схема выступает промежуточной моделью, что проявляется в двукратном (для теста Гинзбурга) увеличении размера результата.

### **Выводы**

1. Проведенное исследование показывает, что диаграммные методы не обеспечивают оптимальной свертки. Экономную формулу нельзя отобразить диаграммой и построить вычислительный диграф, но можно получить с помощью метода схемных определителей.

2. Показано, что разложение определителей по строкам или столбцам с наименьшим числом элементов не всегда приводит к уменьшению сложности выражений. Для образования подвыражений вида «скобка умножается на скобку», приводящих к сокращению числа операций, предложено одновременное выделение четырех элементов матрицы, расположенных на пересечении двух строк и двух столбцов (квартетов).

3. Установлено, что половинное деление матрицы обеспечивает эффективное разложение на миноры не только полных, но и разреженных матриц высокого порядка. При этом разреженная матрица обрабатывается как полностью заполненная, но подвыражения, соответствующие нулевым минорам, удаляются или не генерируются, что обуславливает эффективность реализованной программы Halfs. Такой учет разреженности позволяет увеличить предельные для символьного расчета определителей порядка матриц до десятков и сотен.

### **Список литературы**

1. Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a nested rational form // International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles.– May 2020.– P. 1–25.

2. Smit J. The efficient calculation of symbolic determinants // Proc. of the ACM symposium on symbolic and algebraic computation.– 1976.– P. 105–113.

3. Shi G. Computational complexity analysis of determinant decision diagram // IEEE Trans. on Circuits and Syst. II: Express briefs.– 2010.– Vol. 57, no. 10.– P. 828–832.

4. Филаретов В.В., Недорезов М.В. Минимальные формулы определителей полных матриц на основе их половинного деления // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16.

5. Курганов Д.С., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Разложение символьных определителей полных матриц высокого порядка // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16.

6. Уилкинсон Д., Райнш К. Справочник по алгоритмам на Алголе: Линейная алгебра.– М.: Машиностроение, 1976.– С. 61. [Wilkinson J.H., Reinsch C. Handbook for automatic computation: Linear algebra.– Heidelberg New York Springer–Verlag Berlin.].

7. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С.158–171.

8. Филаретов В.В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф.– Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.– С. 13–15.

9. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество.– 2001.– №8.– С.33–42.

**Недорезов Петр Владимирович** – студент Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – ЛЭТИ им. В.И.Ленина.

E-mail: pyatakru@rambler.ru

**Филаретов Владимир Валентинович** – доктор технических наук, ответственный редактор международного научного сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: vvfil@mail.ru

# СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ

## ГЕНЕРАЦИЯ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ НА ОСНОВЕ КОМПОЗИЦИЙ ЧИСЛА РЕБЕР

М. В. Недорезов, П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

*Предложено обобщение процедуры полного разбиения для генерации канонических корневых деревьев общего вида. Разработан алгоритм на основе перечисления всех композиций натурального числа, равного числу ребер генерируемых деревьев. Реализована программа преобразования каждой композиции в подмножество соответствующих ей неизоморфных корневых деревьев, эффективная при параллельных вычислениях.*

*A generalization of the full partitioning procedure for generating canonical root trees of a General type is proposed. An algorithm is developed based on the enumeration of all compositions of a natural number equal to the number of edges of generated trees. A program is implemented for converting each composition into a subset of corresponding non-isomorphic root trees, which is effective for parallel calculations.*

Подсчет [1] и перечисление (генерация) [2] корневых деревьев являются классическими задачами теории графов. В корневых деревьях одна из вершин (с номером 0) выделена в качестве корня. Обычно представляет интерес нахождение деревьев без повторений, то есть без изоморфных (отличающихся только номерами вершин) вариантов [3–6].

Важным классом корневых деревьев являются бинарные деревья, у которых из каждой вершины, начиная с корня, выходит по два ребра. Такие деревья перечисляются в работе [7] с помощью алгоритма, использующего композиции числа вершин (не считая корневую вершину). К сожалению, в названии работы [7] не указано, что обсуждаются деревья

частного вида – «бинарные корневые деревья», Возможно, не указывая на ограничения применимости алгоритма, автор хотел подчеркнуть универсальность аппарата композиций в целом для решения перечислительных задач теории графов. В данной статье процедура полного разбиения [7] обобщается для перечисления корневых деревьев общего вида – без ограничений на степени вершин, предлагаются алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев.

Композицией называется представление любого натурального числа в форме упорядоченной суммы целых положительных слагаемых [8]. По сравнению с разбиениями целых чисел, для композиций важен порядок записи слагаемых. Например, для числа  $n=4$  существует 8 композиций: 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+3, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1. Число композиций находится по формуле:  $2^{n-1}$  [8].

Произвольное корневое дерево с  $q$  вершинами можно характеризовать полустепенями исхода  $q-1$  его начальных вершин, а все корневые деревья разбить на подмножества, соответствующие композициям натурального числа  $q-1$ . Тогда число композиций можно найти по формуле:  $2^{q-2}$ . Рассмотрим простейшие случаи.

**Композиции для деревьев с 4 вершинами ( $q-1=3$ ):** 3, 2+1, 1+1+1, 1+2 . Всего 4 дерева, 4 композиции.

**Композиции для деревьев с 5 вершинами ( $q-1=4$ ):** 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+3, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1. Всего 9 деревьев и 8 композиций, поскольку к композиции 2+1+1 относятся 2 дерева.

**Композиции для деревьев с 6 вершинами ( $q-1=5$ ):** 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+3, 2+2+1, 2+1+1+1, 2+1+2, 1+4, 1+3+1, 1+2+2, 1+2+1+1, 1+1+3, 1+1+2+1, 1+1+1+2, 1+1+1+1+1. Всего 20 деревьев и 16 композиций, поскольку к композициям 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1 и 1+2+1+1 относятся по 2 дерева.

**Композиции для деревьев с 7 вершинами ( $q-1=6$ ):** 6, 5+1, 4+2, 4+1+1, 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1, 3+1+2, 2+4, 2+3+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+2, 2+1+3, 2+1+2+1, 2+1+1+1+1, 1+5, 1+4+1, 1+3+2, 1+3+1+1, 1+2+3, 1+2+2+1, 1+2+1+1+1, 1+2+1+2, 1+1+4, 1+1+3+1, 1+1+2+2, 1+1+2+1+1, 1+1+1+3, 1+1+1+2+1, 1+1+1+1+2, 1+1+1+1+1+1. Всего 48 деревьев и 32 композиции (рис. 1).

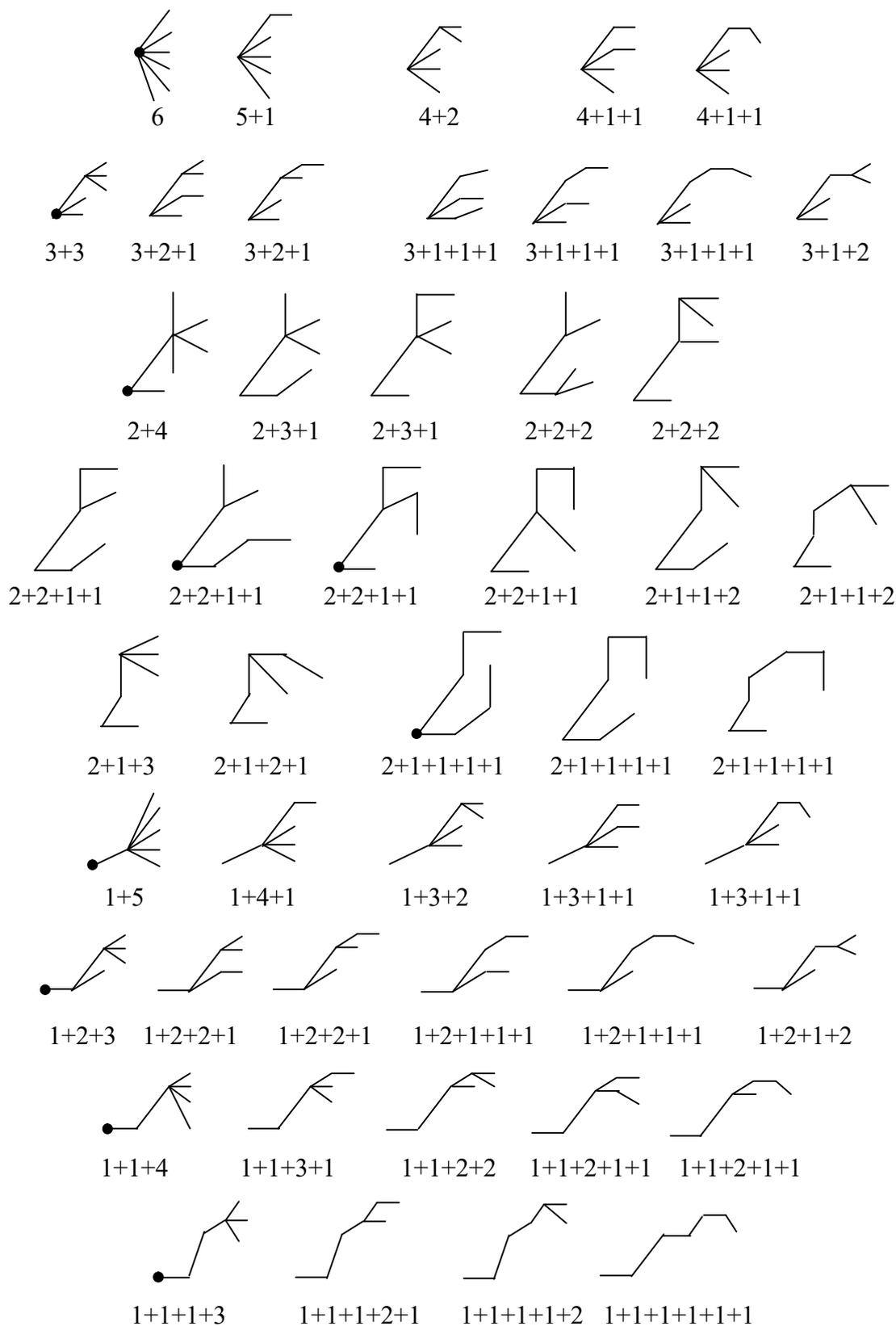


Рис. 1. 48 неизоморфных корневых деревьев с 7 вершинами (под деревьями указаны композиции)

Корневое дерево однозначно задается кодом в виде вектора начальных вершин (ВНВ) с размерностью на единицу меньшей числа вершин, то есть равной числу ребер [8]. Элементами ВНВ, как следует из названия, являются начальные вершины, Конечные вершины, что важно, хранить не нужно – они являются номерами позиций соответствующих начальных вершин. ВНВ представляет собой неубывающую лексикографически упорядоченную последовательность целых чисел, являющихся номерами начальных вершин корневого дерева. В табл. 1 рассмотрено применение композиций для перечисления неизоморфных деревьев с 8 вершинами ( $q-1=7$ ).

Как видно из табл. 1, на 8 вершинах существует 115 неизоморфных деревьев, относящихся к 64 композициям. Композиции проще генерировать, чем деревья. Но каждую композицию нужно проверять на предмет "размножения". Поэтому по композиции нельзя, как по ВНВ, однозначно восстановить дерево. Композиции, оканчивающиеся на одну или несколько единиц, могут порождать два или более деревьев. Только такие композиции необходимо использовать для размножения соответствующих подмножеств деревьев.

Решение примеров для 4–8 вершин приводит к простому алгоритму генерации неизоморфных корневых деревьев на основе композиций.

1. Генерация всех композиций для натурального числа, равного  $q-1$  ( $q$  – число вершин) [9]. Композиции, оканчивающиеся на одну или несколько единиц, порождают несколько деревьев. Другим композициям соответствует единственное дерево.

2. Для каждой из выбранных композиций отбрасываем последние единицы и записываем ВНВ. Нарастиванием этого ВНВ номерами вершин выполняется в лексикографическом порядке (ЛГ-порядке) [10]. При этом порождаются все неизоморфные деревья, соответствующие рассматриваемой композиции, путем проверки генерируемых комбинаций на каноничность с помощью функции `testing` [11–13]. Учитываются степени вершин композиции: при единицах не допускается повторений при переборе, при большей степени  $p$  в ВНВ заносится сразу  $p$  одинаковых номеров.

Таблица. 1. Композиции и корневые деревья с 8 вершинами ( $q-1=7$ )

| №  | Композиции  | Корневые деревья                                |
|----|-------------|---|
| 1  | 7           | 0000000   |
| 2  | 6+1         | 0000001   |
| 3  | 5+2         | 0000011   |
| 4  | 5+1+1       | 0000012 0000016                                 |
| 5  | 4+3         | 0000111   |
| 6  | 4+2+1       | 0000112 0000115                                 |
| 7  | 4+1+2       | 0000155   |
| 8  | 4+1+1+1     | 0000123 0000125 0000156                         |
| 9  | 3+4         | 0001111   |
| 10 | 3+3+1       | 0001112 0001114                                 |
| 11 | 3+2+2       | 0001122 0001144                                 |
| 12 | 3+2+1+1     | 0001123 0001124 0001126 0001145 0001146         |
| 13 | 3+1+3       | 0001444   |
| 14 | 3+1+2+1     | 0001445   |
| 15 | 3+1+1+2     | 0001244 0001455                                 |
| 16 | 3+1+1+1+1   | 0001234 0001245 0001246 0001456                 |
| 17 | 2+5         | 0011111   |
| 18 | 2+4+1       | 0011112 0011113                                 |
| 19 | 2+3+2       | 0011122 0011133                                 |
| 20 | 2+3+1+1     | 0011123 0011134 0011136                         |
| 21 | 2+2+3       | 0011333   |
| 22 | 2+2+2+1     | 0011223 0011334 0011335                         |
| 23 | 2+2+1+2     | 0011233 0011255 0011355                         |
| 24 | 2+2+1+1+1   | 0011234 0011235 0011236 0011256 0011345 0011356 |
| 25 | 2+1+4       | 0013333   |
| 26 | 2+1+3+1     | 0013334   |
| 27 | 2+1+2+2     | 0013344   |
| 28 | 2+1+2+1+1   | 0013345 0013346                                 |
| 29 | 2+1+1+3     | 0012333 0013444                                 |
| 30 | 2+1+1+2+1   | 0012334 0012335 0013445                         |
| 31 | 2+1+1+1+2   | 0012355 0013455                                 |
| 32 | 2+1+1+1+1+1 | 0012345 0012356 0013456                         |

Продолжение табл. 1

| №  | Композиции        | Корневые деревья                |
|----|-------------------|---------------------------------|
| 33 | 1+6               | 0111111                         |
| 34 | 1+5+1             | 0111112                         |
| 35 | 1+4+2             | 0111122                         |
| 36 | 1+4+1+1           | 0111123 0111126                 |
| 37 | 1+3+3             | 0111222                         |
| 38 | 1+3+2+1           | 0111223 0111225                 |
| 39 | 1+3+1+2           | 0111255                         |
| 40 | 1+3+1+1+1         | 0111234 0111235 0111256         |
| 41 | 1+2+4             | 0112222                         |
| 42 | 1+2+3+1           | 0112223 0112224                 |
| 43 | 1+2+2+2           | 0112233 0112244                 |
| 44 | 1+2+2+1+1         | 0112234 0112236 0112245 0112246 |
| 45 | 1+2+1+3           | 0112444                         |
| 46 | 1+2+1+2+1         | 0112445                         |
| 47 | 1+2+1+1+2         | 0112344 0112455                 |
| 48 | 1+2+1+1+1+1       | 0112345 0112346 0112456         |
| 49 | 1+1+5             | 0122222                         |
| 50 | 1+1+4+1           | 0122223                         |
| 51 | 1+1+3+2           | 0122233                         |
| 52 | 1+1+3+1+1         | 0122234 0122236                 |
| 53 | 1+1+2+3           | 0122333                         |
| 54 | 1+1+2+2+1         | 0122334 0122335                 |
| 55 | 1+1+2+1+2         | 0122355                         |
| 56 | 1+1+2+1+1+1       | 0122345 0122356                 |
| 57 | 1+1+1+4           | 0123333                         |
| 58 | 1+1+1+3+1         | 0123334                         |
| 59 | 1+1+1+2+2         | 0123344                         |
| 60 | 1+1+1+2+1+1       | 0123345 0123346                 |
| 61 | 1+1+1+1+3         | 0123444                         |
| 62 | 1+1+1+1+2+1       | 0123445                         |
| 63 | 1+1+1+1+1+2       | 0123455                         |
| 64 | 1+1+1+1+<br>1+1+1 | 0123456                         |

**Программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе композиций.** Программа *Composi* состоит из трех основных компонентов: 1) генератора композиций [9]; 2) лексикографический генератора (ЛГ-генератора) [10], который управляется текущей композицией для восстановления деревьев; 3) функции *testing* [11, 12] для проверки каноничности комбинации, получаемой ЛГ-генератором. Комбинация, представленная ВНВ, может быть или неизоморфным деревом, или его изоморфным вариантом. Каноничность дерева соответствует его уникальности (неизоморфности),

ЛГ-генератор, разработанный и реализованный М.В.Недорезовым [10], использовался в первых версиях программы генерации неизоморфных деревьев в лексикографическом порядке. В рекурсивной программе наращивания по вершине (программе *AddNode* [2, 13]) ЛГ-генератор не используется, поскольку в лексикографическом порядке рекурсивно добавляются вершины, а формировать комбинации вершин не требуется. В случае нерекурсивной программы *Composi* ЛГ-генератор составил основу для восстановления деревьев по композициям, которое выполняется в функции *composi*.

```
void composi(int n_comp)
{ // генерация деревьев для композиции comp
  int i,j,m,k0=0,h0=0,j1,mask[40],numb=0;
  for (j = 0; j < n_comp; j++)
  {for (m = 0; m < comp[j]; m++)
  { ivv[k0]=h0;
    mask[k0++]=h0;}
    h0++;}
  for (i=k0-1; i>0; i--)
    {if (i==k0-1)
      {for (j = ivv[i]; j < k0; j++)
        {ivv[i] = j;
          if (numb) {
            for (j1=i; j1>0;j1--)
              if (mask[j1]==mask[j1-1] && ivv[j1]!=ivv[j1-1]
                || mask[j1]!=mask[j1-1] && ivv[j1]==ivv[j1-1]) goto con;
```

```

if (testing(i)) continue;
}
else { numb++; if (testing(i)) goto con;}
for (j1=4; j1<i; j1++)
if (testing(j1)) goto con;
out: // ВЫВОД КАНОНИЧЕСКОГО ДЕРЕВА
count+= 1; // СЧЕТЧИК ЧИСЛА ДЕРЕВЬЕВ
con: ; }
else
    rep1: if (ivv[i]<i) {(ivv[i])++;
        if (testing(i)) goto rep1;;
    for (;i<=k0; i++)
        {if (mask[i]==mask[i+1]) ivv[i+1]=ivv[i];
            else ivv[i+1]=ivv[i]+1; }}
con1: ;}}

```

Ядро программы AddNode – функция testing – также оказалось востребованным в программе Composi. Функция testing используется в двух вариантах – с вызовом функции subtre или новейшей функции canon, текст которой приводится ниже.

```

// ПОЯРУСНАЯ ПРОВЕРКА КАНОНИЧНОСТИ ДВУХ ПОДДЕРЕВЬЕ В КОНЦЕ ivv[N]
int canon(int N,int pL,int pR)
{ // возвращает 1 (0), если дерево каноническое (неканоническое)
int difp,upp,deg[40],i,b;
rep: difp=pR-pL;
upp=difp+pR-1;
for (i=0;i<=difp;i++) deg[i]=0;
i=upp;
while(ivv[i] <= upp && i < N)
{b=ivv[i++];
if (b >= pL && b < pR) (deg[b-pL])++;
else if (b >= pR && b <= upp) (deg[b-pR])--;}
for (i=0; i<difp; i++)
if (deg[i] < 0) return(0); // дерево каноническое
else if (deg[i] > 0) return(1); // дерево неканоническое

```

```

// поиск крайне левых вершин на ярусах поддеревьев
for (i=upr;i<N;i++) // следующий (верхний) ярус
if (ivv[i] >= pL && ivv[i] < pR)
{pL=i+1;
for (i=pL;i<N;i++)
{if (ivv[i] >= pR && ivv[i] <= upr)
{pR=i+1; goto rep; } } }
return(1); } // pL не найдена, дерево каноническое

```

Функция `canon` выполняет наиболее затратный шаг предлагаемого алгоритма – поярусную проверку на каноничность левого и правого поддерева, вершины которых завершают последовательность ВНВ.  $N$  является размерностью ВНВ, обозначенного  $ivv$ . Переменные  $pL$  and  $pR$  соответствуют крайне левым позициям в  $ivv[N]$  для левого и правого поддерева, соответственно, на текущем ярусе.  $deg[difp]$  – вектор полустепеней исхода вершин текущего яруса. Переменная  $difp$  and  $upr$  соответствует числу вершин каждого поддерева в случае симметрии поддеревьев на текущем ярусе.  $upr$  – верхнее значение для  $ivv$  у вершин на текущем ярусе.

Функция `testing`, вызывающая `canon`, почти не претерпела изменений по сравнению с одноименной функцией [12, 13]:

```

int Q,count,ivv[40],cmp,comp[40];
// проверка каноничности дерева, заданного ivv[N]
int testing(int N)
{ // возвращает 1, если дерево неканоническое
int i,N1=N+1;
for (i=N; i>0; i--) // выбор начальных вершин поддеревьев
    if (ivv[i]==ivv[i-1]) {
        if (canon(N1,i,i+1)) return(1);}
    else i=ivv[i]; // разветвление не найдено, спуск к корню
return(0); }

```

Генератор композиций, заимствованный из [9] немного модифицирован вставкой вызова `composi(p)`:

```

void comp2(int n,int p)
{ // генератор композиций [9]
int m,j;
for (j=0;j<p-1;j++) comp[j]=1;
comp[p-1]=n-p+1;
start: cmp++;
if (fl_lst)
{composi(p);
j=p-1;
test: if (j>0)
    {if (comp[j]==1) { j--; goto test;}
    (comp[j-1])++;
    comp[p-1]=comp[j]-1;
    if (j !=p-1) comp[j]=1;
    goto start;}}

```

Инициализация и запуск программы Composi выполняется операторами:

```

count=0; // обнуление счетчика числа деревьев
cmp=0; // обнуление счетчика числа композиций
for (j=1; j<= Q; j++)
comp2(Q,j); // запуск генератора композиций

```

У программы Composi при увеличении числа вершин на единицу время увеличивается примерно не в три, как в AddNode [13, 14] , а в четыре раза. Например, для 17 и 18 вершин:

```

17 vertices - 634847 (32768) trees (compositions)
Execution time: 00 hour 03 min. 05.40 sec.
18 vertices - 1721159 (65536) trees (compositions)
Execution time: 00 hour 13 min. 23.33 sec.

```

При использовании в составе программы Composi последнего обновления функции testing для проверки каноничности (с приведенной выше функцией canon вместо subtree) время счета сократилось вдвое:

```

17 vertices - 634847 (32768) trees (compositions)
Execution time: 00 hour 01 min. 28.47 sec.
18 vertices - 1721159 (65536) trees (compositions)

```

Execution time: 00 hour 06 min. 23.04 sec.

При этом разрыв между длительностями счета уменьшился.

Также важно, что почти половина композиций (не оканчивающихся на 1) не требует проверки. Для 7 вершин это 25 из 48 композиций. Упрощает генерацию корневых деревьев также обстоятельство, что первое (не всегда единственное) дерево каждой композиции априори является каноническим,

Ключевым преимуществом для выбора алгоритма генерации корневых деревьев является возможность и эффективность реализации параллельных вычислений [14]. Максимальное ускорение достигается при равной нагрузке используемых процессоров. Поделив число композиций на имеющееся число процессоров, можно получить примерно одинаковую нагрузку на один процессор. Именно столько композиций придется декодировать каждому процессору при параллельных вычислениях. Небольшая (в пределах статистической погрешности) неравномерность загрузки процессоров может быть обусловлена различием затрат на переход к деревьям от разных композиций.

Предлагаемый алгоритм нерекурсивный, как и реализованный в первой эффективной программе по генерации неизоморфных корневых деревьев [15], то есть не потребуются генерировать все деревья с числом вершин, меньшим заданного числа, как в рекурсивной программе AddNode [13, 14].

Однако в алгоритме на основе композиций деревья находятся независимыми, причем малочисленными, подмножествами (число композиций сопоставимо с числом деревьев). При этом каждое следующее дерево находится целиком или проверяется на каноничность заново. Эир является недостатком не только предложенного алгоритма, но и всей теории композиций для решения перечислительных задач, которую разработал В.В. Кручинин. Вначале нужно найти промежуточные объекты – композиции, а лишь затем от них перейти к деревьям или другим перечисляемым объектам. С другой стороны, композиции находятся проще, чем, например, деревья. Множество композиций можно разделить на части и выполнять переход к деревьям на разных процессорах или компьютерах.

Без параллельных вычислений (при одном процессоре) разработанная программа Compositi, как показывают приведенные выше результаты тестирования, значительно уступает программе AddNode. Несомненным преимуществом Compositi выступает равномерная загрузка процессоров при отсутствии ограничений на число процессоров. В то же время для программы AddNode приходится выбирать число процессоров из ряда числа неизоморфных корневых деревьев: 2, 4, 9, 20, 48..., что весьма ограничивает маневры при организации параллельных вычислений. Кроме того, объемы потоков (количества деревьев), отведенные разным процессорам, выполняющим программу AddNode, различаются довольно значительно [2], что ограничивает эффект от параллелизации.

В отличие от параллельных вычислений на основе нерекурсивного алгоритма [15] в предложенном алгоритме не нужно находить границы последовательности деревьев (первое и последнее дерево) для каждого процессора по сложным комбинаторным формулам [16]. Достаточно перед параллельной генерацией вычислить число композиций для заданного числа вершин и разделить его на число имеющихся в распоряжении процессоров. В результате для каждого процессора будет известна первая и последняя композиция из последовательности композиций. Затем запустить генератор композиций для каждого вычислительного потока, чтобы начать и окончить генерацию деревьев в соответствии с порядковыми номерами первой и последней композиции в потоке.

### **Выводы**

1. Предложен алгоритм независимой нерекурсивной генерации неизоморфных корневых деревьев по композициям числа их ребер. Установлено, что первое (не всегда единственное) дерево каждой композиции является каноническим, что упрощает генерацию корневых деревьев.

2. При параллельных вычислениях можно разделить композиции на подмножества по числу процессоров, что обеспечит равную их загрузку и максимальный выигрыш по времени. Число используемых процессоров может быть произвольным. Это важное преимущество по сравнению с реализацией параллельных вычислений рекурсивными программами

генерации корневых деревьев [2, 14], когда число процессоров ограничивается выбором из ряда чисел неизоморфных корневых деревьев: 2, 4, 9, 20, 48..., что затруднительно на практике из-за большого шага между членами ряда.

### Список литературы

1. Otter R. The Number of Trees // *The Annals of Mathematics.*— 2nd Ser.— 1948.— Vol. 49, no. 3.— P. 583–599.
2. Филаретов В.В. Единый подход к синтезу неизоморфных корневых деревьев // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.—Ульяновск: УлГТУ, 2017.— Вып.14.—С. 177–194.*
3. Brinkmann G. Computing the maximal canonical form for trees in polynomial time // *Journal of Mathematical Chemistry.*— 2018.— Vol. 56.— 1437–1444.
4. Balcazar J.L., Bifet A., Lozano A., Mining frequent closed rooted trees // *Machine Learning.*— 2010.— Vol. 78, no. 1.— P. 1–33.
5. Gupta S., Roy S. Stable Matching Games: Manipulation via Subgraph Isomorphism // *Algorithmica.*— 2018.— Vol. 80, no. 9.— P. 2551–2573.
6. Chen I-M., Burdick J.W., Enumerating the Non-Isomorphic Assembly Configurations of Modular Robotic Systems // *The International Journal of Robotics Research.*— 1998.— Vol. 17, no. 7.— P. 702–719.
7. Кручинин В.В. Алгоритмы генерации корневых деревьев на основе процедуры полного разбиения // *Прикладная дискретная математика.*— 2009.— С. 99–103.
8. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1977.— С. 241.— 319 с.
9. Агеев М.И., Алик В.П., Марков Ю.И. Генератор композиций // *Библиотека технической кибернетики: Библиотека алгоритмов 51б–100б: Справочное пособие.*— Вып. 2.— М.: «Советское радио», 1976.
10. Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.— Ульяновск: УлГТУ, 2016. — Вып. 13.— С. 149–162.*

11. Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14.– С. 214–225.

12. Филаретов В.В. Структурные закономерности порождения канонических корневых деревьев при лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2018. – Вып. 15. – С. 161–174.

13. Недорезов П.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Оптимизация лексикографического алгоритма рекурсивного синтеза неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск:УлГТУ, 2018. –Вып. 15.–С. 175–180.

14. Недорезов П.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Параллельный синтез неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14. – С. 236–244.

15. Beyer T., Hedetniemi S.M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation.– 1980.– Vol. 9, no. 4.– P. 706–712.

16. Kubicka E.M., McKeon K.A. An application of level sequences to parallel generation of rooted trees // Combinatorial mathematics and combinatorial computing.– 2011.– Vol. 76.– P. 33–58.

**Недорезов Максим Владимирович** – аспирант факультета аэромеханики и летательных аппаратов Московского Физико-Технического Института.

E-mail: nedmv@rambler.ru

**Недорезов Петр Владимирович** – студент Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – ЛЭТИ им. В.И.Ленина.

E-mail: pyatakpu@rambler.ru

**Филаретов Владимир Валентинович** – доктор технических наук, ответственный редактор международного научного сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: vvfil@mail.ru

# НЕЙРОСЕТИ И РОБОТОТЕХНИКА

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗНЫХ КЛЕТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Е. Б. Соловьева, Г. Ю. Зверев

*Рассматривается моделирование реакционно-диффузных систем в дискретном пространстве с применением клеточных нейронных сетей. Клеточные сети представляются как рекуррентные структуры и описываются нелинейными дифференциальными уравнениями с учетом обратных связей. Показана возможность реализации клеточных сетей, следовательно, и реакционно-диффузных клеточных нейронных сетей в виде электрических и электронных цепей.*

*The modeling of reaction-diffusion systems in discrete space on the basis of cellular neural networks is considered. These networks are represented as recurrent structures and are described by nonlinear differential equations in view of feedbacks. The possibility of realizing cellular networks and, consequently, reaction-diffusion cellular neural networks as electrical and electronic circuits is shown.*

**Введение.** Математические модели многих физических явлений в природе и технике описываются системами линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. К таким явлениям относятся: волновые процессы в акустике, оптике, гидро, аэро и электродинамике; распространение электромагнитных, сейсмических и океанических волн; распространение волн в жидкостях, газе, биологических средах (нервных тканях, сердечной системе) и т.д. [1–6].

Аналитические методы решения дифференциальных уравнений с частными производными весьма сложны. Точные решения удается получить лишь для ограниченного числа задач. На практике часто

применяют численные методы решения указанных систем уравнений. В этом случае переходят от дифференциальных уравнений к разностным.

Системы, где возникают волны, описываемые в пространстве и во времени, представляются как реакционно-диффузные (реакционные системы с диффузией) [7], [8]. Один из современных подходов к численному моделированию реакционно-диффузных систем основан на применении клеточных нейронных сетей [9]–[11]. В результате такого подхода формируются реакционно-диффузные клеточные нейронные сети (reaction-diffusion cellular neural network, RD-CNN) [12]. Рассмотрим математическое описание реакционно-диффузных систем и их аппроксимацию на основе клеточных сетей.

### **Математическая модель типа «реакция–диффузия».**

Двухкомпонентная реакционно-диффузная система описывается парой дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа (второго порядка) [8]:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = D_{11} \frac{\partial^2 x_1}{\partial r^2} + D_{12} \frac{\partial^2 x_2}{\partial r^2} + F_1(x_1, x_2), \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = D_{21} \frac{\partial^2 x_1}{\partial r^2} + D_{22} \frac{\partial^2 x_2}{\partial r^2} + F_2(x_1, x_2), \quad (1)$$

где  $r$ ,  $0 < r < L$  – пространственная координата;  $t$ ,  $t > 0$  – время;  $x_1, x_2$  –

переменные состояния системы;  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$  – матрица коэффициентов

диффузии ( $D_{11}, D_{22}$  – главные или диагональные коэффициенты диффузии;

$D_{12}, D_{21}$  – коэффициенты кросс-диффузии или недиагональные элементы);  $F_1(\cdot), F_2(\cdot)$  – нелинейные функции (реакционные члены), характеризующие свойства (реакцию) системы.

Для появления диссипативных структур (волн, структур Тьюринга), возникающих за счет диссипации (рассеивания) энергии в окружающую среду, необходимо выполнение условия:  $D_{12} = D_{21} = 0$  [8]. При указанном

условии, упрощении записей:  $D_{11} = D_1$ ,  $D_{22} = D_1$ ,  $\frac{\partial x_1}{\partial t} = \dot{x}_1$ ,  $\frac{\partial x_2}{\partial t} = \dot{x}_2$ , а также

введении векторного оператора Лапласа (векторного лапласиана, векторного дифференциального оператора второго порядка) как

$$\nabla^2 x_1 = \frac{\partial^2 x_1}{\partial r^2}, \quad \nabla^2 x_2 = \frac{\partial^2 x_2}{\partial r^2}$$

(одномерный случай с пространственной координатой  $r$ ), выражение (1) преобразуется к виду

$$\dot{x}_1 = D_1 \nabla^2 x_1 + F_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = D_2 \nabla^2 x_2 + F_2(x_1, x_2). \quad (2)$$

Выражение (2) – модель двухкомпонентной реакционно-диффузной системы с векторным лапласианом.

**Клеточная нейронная сеть.** Клеточная нейронная сеть (cellular neural network, CNN) является нелинейной динамической системой с локально-рекуррентной топологией. Известны разные структуры сети: прямоугольная, гексагональная, тороидальная, сферическая и т. д. [9]–[11]. Каждая клетка (нейрон) соединена с соседними. Очевидно, что ближние клетки влияют друг на друга, влияние дальних клеток появляется вследствие обработки сигнала при перемещении от клетки к клетке.

Структура двумерной CNN показана на рис. 1. Квадраты – это клетки (нейроны), линии – соединения между ними. Клетка  $C_{ij}$  располагается в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце. Окрестность  $N_{ij}^d$  клетки  $C_{ij}$  формируется как

$$N_{ij}^d = \left\{ C_{kl} \text{ при } \max(|k-i|, |l-j|) \leq d, 1 \leq k \leq M; 1 \leq l \leq N \right\}.$$

где  $d$  – радиус окрестности (положительное целое число);  $N, M$  – число строк и столбцов соответственно.

Нелинейный динамический процесс в клетке  $C_{ij}$  описывается двумя уравнениями (дифференциальным уравнением 1-го порядка и нелинейным уравнением на выходе клетки) [9]–[11]:

$$\frac{dx_{ij}(t)}{dt} = -\gamma x_{ij}(t) + \sum_{kl \in N_{ij}^c} \mathbf{A}_{ij,kl} y_{kl}(t) + \sum_{kl \in N_{ij}^r} \mathbf{B}_{ij,kl} u_{kl}(t) + I_{ij}, \quad y_{ij}(t) = f(x_{ij}(t)), \quad (3)$$

где  $x_{ij}(t), u_{ij}(t), y_{ij}(t)$  – переменная состояния, входной и выходной сигналы клетки соответственно;  $\gamma$  – константа;  $I_{ij}$  – постоянная смещения клетки;  $\mathbf{A}_{ij,kl}$  – матрица параметров обратной связи;  $\mathbf{B}_{ij,kl}$  – матрица параметров прямой связи;  $f$  – нелинейная функция.

Покажем, что математическая модель (3) может быть представлена в виде электрической цепи, изображенной на рис. 2 [9]. Сигналы  $V_{u,ij}(t), V_{y,ij}(t), V_{x,ij}(t)$  – узловые напряжения цепи. Электрическая цепь содержит параллельно соединенные элементы: конденсатор  $C$ ; резисторы  $R_x, R_y$ ;

независимый источник тока  $I$ ; нелинейный источник тока, управляемый напряжением (ИТУН)

$$I_{yx,ij}(t) = (1/R_y)f(V_{x,ij}(t)), \quad (4)$$

где  $f$  – нелинейная функция; линейные ИТУН  $I_{xy(ij;kl)}(t), \dots, I_{xu(ij;kl)}(t)$ , устанавливающие связь с другими цепями (клетками) сети.

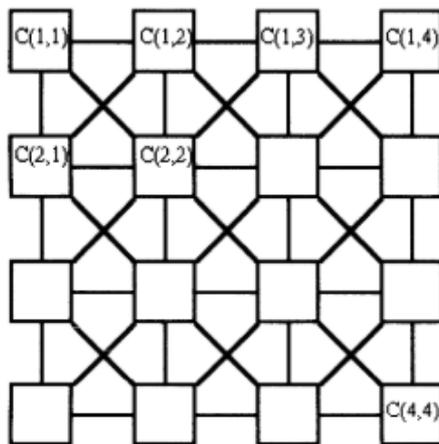


Рис. 1

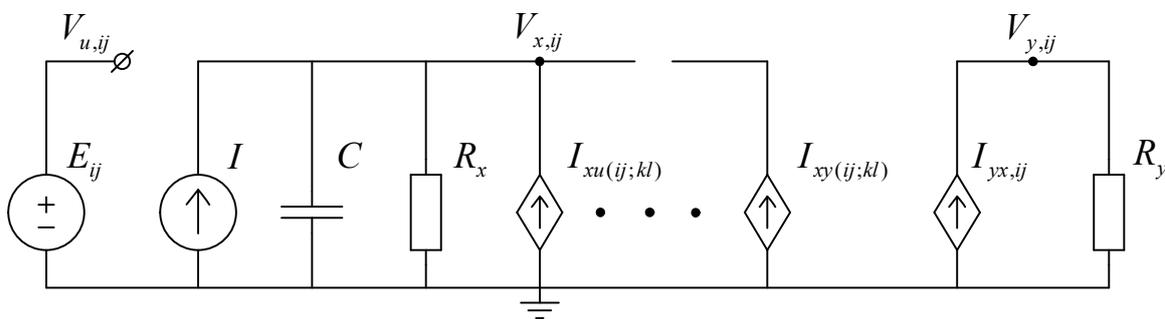


Рис. 2

По первому закону Кирхгофа запишем уравнение состояния цепи:

$$C \frac{dV_{x,ij}(t)}{dt} = -\frac{V_{x,ij}(t)}{R_x} + \sum_{kl \in N_{ij}^r} I_{xy(ij;kl)}(t) + \sum_{kl \in N_{ij}^r} I_{xu(ij;kl)}(t) + I,$$

далее преобразуем равенство к виду

$$\frac{dV_{x,ij}(t)}{dt} = -\frac{V_{x,ij}(t)}{CR_x} + \frac{1}{C} \sum_{kl \in N_{ij}^r} I_{xy(ij;kl)}(t) + \frac{1}{C} \sum_{kl \in N_{ij}^r} I_{xu(ij;kl)}(t) + \frac{1}{C} I. \quad (5)$$

Из сравнения выражений (4), (5) и (3) следует, что в модели (3)

$$x_{ij}(t) = V_{x,ij}(t), \quad \gamma = \frac{1}{R_x C}, \quad I_{ij} = \frac{1}{C} I, \quad y_{ij}(t) = I_{yx,ij}(t).$$

Таким образом, математическая модель (3) клетки CNN реализована в виде электрической цепи, показанной на рис. 2.

### **Реакционно-диффузная клеточная нейронная сеть.**

Математическая модель RD-CNN формируется в результате следующих преобразований: 1) опишем двумерную клетку  $C_{ij}$  CNN (при отсутствии входного сигнала) как двухкомпонентную реакционно-диффузную систему с помощью формулы (2). В итоге получим

$$\dot{x}_{1,ij} = D_1 \nabla^2 y_{1,ij} + F_1(x_{1,ij}, x_{2,ij}), \quad \dot{x}_{2,ij} = D_2 \nabla^2 y_{2,ij} + F_2(x_{1,ij}, x_{2,ij}), \quad (6)$$

2) аппроксимируем двумерный лапласиан из выражения (6) в дискретном пространстве [12]:

$$\nabla^2 y_{1,ij} = y_{1,i-1,j} + y_{1,i+1,j} - 4y_{1,i,j} + y_{1,i,j-1} + y_{1,i,j+1}, \quad (7)$$

$$\nabla^2 y_{2,ij} = y_{2,i-1,j} + y_{2,i+1,j} - 4y_{2,i,j} + y_{2,i,j-1} + y_{2,i,j+1}$$

3) после подстановки (7) в (6) получим двухкомпонентную двумерную дискретную модель реакционно-диффузной клеточной нейронной сети:

$$\dot{x}_{1,ij} = D_1(y_{1,i-1,j} + y_{1,i+1,j} - 4y_{1,i,j} + y_{1,i,j-1} + y_{1,i,j+1}) + F_1(x_{1,ij}, x_{2,ij}), \quad (8)$$

$$\dot{x}_{2,ij} = D_2(y_{2,i-1,j} + y_{2,i+1,j} - 4y_{2,i,j} + y_{2,i,j-1} + y_{2,i,j+1}) + F_2(x_{1,ij}, x_{2,ij}).$$

Отметим, что при определенном задании нелинейных функций  $F_1(\cdot)$  и  $F_2(\cdot)$  модель (8) можно преобразовать в равенства (3) (при  $\mathbf{V}_{ij,kl} = 0$ ), записанные для компонент  $\dot{x}_{1,ij}$  и  $\dot{x}_{2,ij}$ .

**Выводы.** Клеточные нейронные сети, применяемые для численного моделирования реакционно-диффузных систем реализуются в виде нелинейных электрических и электронных цепей, что возможно на современной элементной базе, например, мемристивных систем [9]. Реакционно-диффузные клеточные сети обладают преимуществами нейронных сетей (параллельная обработка, адаптивные способности, отказоустойчивость, единообразие анализа и проектирования сетей [11]), что перспективно для моделирования процессов в природе и технике.

### **Список литературы**

1. Виноградова М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. Линейные и нелинейные волны. – М.: ЛЕНАНД, 2019.
2. Безручко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Путь в синергетику: Эскурсы в десяти лекциях. – М.: Едиториал УРСС, 2020.

3. Трубецков Д.И. Введение в синергетику. Колебания и волны. – М.: Едиториал УРСС, 2019.
4. Головинский П.А. Математические модели: Теоретическая физика и анализ сложных систем. От нелинейных колебаний до искусственных нейронов и сложных систем. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2017.
5. Каганов В.И. Колебания и волны в природе и технике. Компьютеризированный курс: Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия–Телеком, 2015.
6. Кащенко С.А., Майоров В.В. Модели волновой памяти. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.
7. Бекман И.Н. Математика диффузии: учебное пособие. – М.: Издательство «ОнтоПринт», 2016.
8. Куркина Е.С. Моделирование нелинейных явлений в физико-химических системах: Автоколебания. Структуры. Волны. С подробными примерами в MATLAB. Учебное пособие. – М.: ЛЕНАНД, 2019.
9. Chaos, CNN, Memristors and Beyond. A Festschrift for L.Chua / Edited by A.Adamatzky, G.Chen.–World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2013.
10. Solovyeva E. Behavioral models of nonlinear filters based on discrete time cellular neural networks // Vibroengineering Procedia. Proceedings of the 26th International Conference on Vibroengineering. – Russia, St. Petersburg, June 29–30, 2017. Vol. 12, June. P. 130–134.
11. Бычков Ю.А., Соловьева Е.Б., Щербаков С.В. Непрерывные и дискретные нелинейные модели динамических систем. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
12. Slavova A. Reaction-Diffusion Cellular Neural Network Models // Proceedings of 9th WSEAS International Conference on Neural networks (NN'08). – Sofia, Bulgaria, 2–4 May, 2008, P. 63–66.

**Соловьева Елена Борисовна** – д.т.н., профессор, зав. кафедрой ТОЭ,  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
Тел.: (812) 346–17–96, selenab@hotmail.ru

**Зверев Геннадий Юрьевич** – студент,  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
Тел.: (812) 346–17–96, zverevgena@gmail.com

## **ИЗ ИСТОРИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

### **ПЕРВАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ В ПЕРВОМ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ РОССИИ**

В. В. Панкин, Е. Б. Соловьева

*Описана история создания электротехнической учебной и научной лаборатории (1895 г.) в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ». Рассмотрен вклад изобретателя П.Н. Яблочкова в развитие отечественной электротехники.*

*The history of the creation of the first electrical engineering educational and research laboratory (1895 year) in the first electrotechnical institute in Russia – St. Petersburg Electrotechnical University “LETI” is considered. The role of the inventor P. Yablochkov, closely related to the development of electrical engineering in Russia, is emphasized.*

В Электротехнический институт (ЭТИ) (первый в России и Европе) переименовали основанное в 1886 году Техническое училище почтово-телеграфного ведомства империи. В наследство от училища ЭТИ в 1891 году получил кафедры физики, химии, математики и богословия. Кафедры физики и химии уже имели свои учебные лаборатории. Основатель физической школы будущего Санкт-Петербургского электротехнического университета, первый профессор ЭТИ, О.Д. Хвольсон (1852–1934 гг.) из пяти томов своего классического труда, переведенного на основные европейские языки, два тома посвятил электротехнике. Профессор ЭТИ по кафедре химии А.А. Кракау (1855–1909 гг.) с 1886 года впервые в России читал курс электрохимии, а позднее издал первый в стране учебник по теоретической электрохимии [1].

На Заседании Государственного Совета Российской империи (где присутствовали именитые профессора) в связи с переходом на

четырёхлетний курс обучения и новыми учебными планами принято решение о введении курса электротехники, и, соответственно, кафедры Электротехники. Для создания новой кафедры были выделены ассигнования. Остальное: учебные планы, преподавательские кадры [2] и учебные лаборатории можно было сделать силами ЭТИ.

В статье рассмотрено, как решался вопрос с учебными лабораториями. В России к этому времени сформировалась развитая система научных, исследовательских и учебных электротехнических лабораторий, но только в Военном министерстве и в электротехнической промышленности. Кроме этого, было открыто несколько физических и электротехнических кабинетов.

Преподаватель кафедры Физики ЭТИ Генрих Мерчинг (1860-1916 гг.) в рамках своего курса физики уже преподавал электротехнику с 1888 года, но только в приложении к телеграфии.



Однако целью нового учебного плана (1891 г.) было сообщить будущим техникам и инженерам более обстоятельные сведения из теории цепей и теории электромагнитного поля. Особое место в этом учебном плане отводилось области применения сильных токов. Вскоре Г.К. Мерчинг организовал небольшой электротехнический кабинет, где демонстрировались в ознакомительных целях некоторые предметы, используемые в электротехнике [2].

Научных целей и развития у студентов практических навыков по работе с электротехническими устройствами этот кабинет Г.К. Мерчинга в ЭТИ не имел. Но именно развитие профессиональных навыков было решающим при организации всех других электротехнических лабораторий в России. Двумя основными источниками опыта и кадров для ЭТИ явились Минный офицерский класс и Главное (позднее Николаевское) инженерное училище.

**Первые в России электротехнические школы: Минный офицерский класс и Минная школа для рядовых.** Потребности обороны страны привели к концентрации в Петербурге и его окрестностях всего (в первую очередь военно-морского) электротехнического образования. Еще не умолкла слава минеров-гальванеров Балтийского флота, остановивших соединенный англо-французский флот в 1854–1855 гг. во время Крымской или, как ее называли в Европе, Восточной войны. Важнейшим поражающим средством, впервые практически примененным в боевых условиях, явились мины.

Постановки минных заграждений начались на Балтике в 1854 году. Мины были поставлены у Кронштадта, Ревеля, Свеаборга, Динамюнде и в других районах. Только у Свеаборга было поставлено 1000 гальванических (конструкции академика Б. С. Якоби и инженер-генерала К.А. Шильдера) и пиротехнических мин (конструкции и производства Э. Нобеля), что свидетельствовало о широких масштабах боевого применения этого нового оружия флота.

Еще до войны по Высочайшему указу императора Николая I создается «Комиссия для производства опытов относительно приспособления электромагнитной силы к движению машин по способу профессора Якоби». На проведение работ выделяется баснословная по тем

временам сумма в 50 тысяч рублей. Комиссию поручено возглавить адмиралу И. Ф. Крузенштерну (тот самый!), в состав входят академик Э.Х. Ленц (1804–1855 гг.), П.Л. Шиллинг, будущий академик Б.С. Якоби [3] и другие известные ученые. Накануне войны, в 1840 году, сформирована специальная «гальваническая» команда моряков, положившая начало не только созданию кадров минеров-гальваников, но и, в целом, электротехническому образованию в России.

Выдающиеся русские изобретатели и ученые в содружестве с балтийскими моряками, непрерывно работая над техническим усовершенствованием различных образцов мин, создавали систему морской обороны столицы империи. Эта система включала: электромагнитные телеграфы П.Л. Шиллинга, телеграфы синхронного индукционного типа братьев Вернера и Вильгельма Сименсов, подводные кабели от Петербурга до Кронштадта и к фортам «Павел I», «Александр I» и «В. Кн. Константин». Для подрыва гальванических мин применялись проволочные изолированные кабели Санкт-Петербургской фабрики «Гумми и гуттаперча» Кирштейна.

Барон П.Л. Шиллинг фон Канштадт (1786–1837 гг.) в чине штабс-ротмистра участвовал в боях Отечественной войны. Награжден орденом и саблей «За храбрость». Член-корреспондент Петербургской академии наук по специальности восточной литературы и искусства. Историк. Дипломат. Коллега по работе в Министерстве иностранных дел и близкий друг А.С. Пушкина [4].

П.Л. Шиллинг провел немало опытов по применению электричества для бытовых нужд, в том числе для электрического освещения. Больше всего известен как изобретатель первого в мире введенного в эксплуатацию электромагнитного телеграфа (1832 г.) и рационального кода для него (прообраза азбуки Морзе). В 1837 году барон получил предписание о прокладке подводной телеграфной линии до Кронштадта.

Барон «взрывал мины на Неве» в сентябре-октябре 1812 года, это были первые опыты по воспламенению порохового заряда под водой с помощью электрического тока, опередившие американцев на 17 лет, а англичан – на 25. По результатам работ П.Л. Шиллинга с «дальнезажиганием» и при содействии академика Б.С. Якоби (1801–1874

гг.) сформирован лейб-гвардии Саперный батальон, в котором продолжили дальнейшие работы по электрическим запалам и подрывам.

В 1834 году на Обводном канале у Александро-Невской лавры барон Шиллинг демонстрировал царю электрический подрыв подводных мин. После этого в России начались активные работы по созданию подводных минных заграждений. Академик Б.С. Якоби в специальной инструкции по применению мин заложил теоретические основы создания минно-артиллерийских позиций. Согласно, и его инициативам в том числе, для обеспечения этих позиций в течение зимы 1854–1855 гг. были в срочном порядке построены 38 паровых канонерских лодок и 14 винтовых корветов. Всего в Восточной войне российские минеры выставили на Балтике и Черном море 2558 ударных и гальванических мин.

Изучение и обобщение опыта войны на море ознаменовалось открытием Минного офицерского класса в Кронштадте в 1874 году. Первые две лекции, по электричеству, были «прочитаны профессором Ф.Ф. Петрушевским 1 октября с 12 до 3 часов дня». Вследствие неготовности помещения Минного класса лекция была прочитана в помещении физического кабинета Технического училища морского ведомства, в будущем Инженерного училища императора Николая I (Михайловский замок императора Павла I, впоследствии Инженерный замок).

Федор Фомич Петрушевский (1828–1904 гг.) – заслуженный профессор Императорского Санкт-Петербургского университета, ученик и преемник академика Э.Х. Ленца («правило Ленца», закон Джоуля-Ленца) по экспериментальным работам в электромагнетизме и по чтению лекций на кафедре физики в университете. Ф.Ф. Петрушевский редактировал 39 из 43 томов Энциклопедического словаря Брокгауза и Ефрона, наиболее фундаментальной энциклопедии дореволюционной России [3]. В офицерском классе в Кронштадте при содействии ректора университета Д.И. Менделеева Петрушевский устроил специальный физический кабинет.

Многое сделал Ф. Ф. Петрушевский для организации физической лаборатории и физического института при университете. Он является автором одного из первых систематических курсов электромагнетизма –

«Экспериментальный и практический курс электричества» (1876 г.) Ф.Ф. Петрушевский – учитель многих российских физиков. На посту заведующего кафедрой физики университета Ф.Ф. Петрушевский – предшественник и учитель И.И. Боргмана (1849–1914 гг.), который потом стал также и первым заведующим кафедрой электротехники ЭТИ.

В эти же годы с подачи Вильгельма Сименса появляется и сам термин «электротехника». Минный офицерский класс и Минная школа для рядовых в Кронштадте располагались в, так называемом, «Абраимовом доме», где во время строительства дока-канала жил Арап Петра Великого военный инженер генерал-аншеф Абрам Петрович Ганнибал [5].

Минная школа и Минный офицерский класс являлись одной из первых в России электротехнических школ вообще, поскольку впоследствии, при внедрении электрификации на кораблях, минные офицеры стали также заведовать их электрической оснасткой. Минный офицерский класс «считался одним из лучших в Европе военным электротехническим учебным заведением, и зарубежные флоты уже с 1877 года посылали своих морских офицеров для прохождения в нем курса электротехники». Многие из окончивших Минный офицерский класс стали видными работниками в электротехнической промышленности.

**Главное (Николаевское) инженерное училище.** Начало второго пути к созданию электротехнической лаборатории в ЭТИ находится в Главном (позднее Николаевском) инженерном училище. В 1810 году инженер-генерал К.И. Опперман, выдающийся фортификатор, боевой офицер – участник прошлых и будущих наполеоновских войн, создал Инженерное училище, которое в 1819 году по инициативе Вел. Кн. Николая Павловича, будущего императора, преобразовано в Главное инженерное училище – первое в России высшее инженерное учебное заведение, с 5-летним обучением. Размещалось в одной из царских резиденций – Михайловском замке, тогда же переименованным в Инженерный. Под руководством К.И. Оппермана (1766–1831 гг.) будущий император Николай I получил хорошее инженерное образование, а в дальнейшем Опперман становится его постоянным деятельным помощником по инженерной части.

Здесь же работал с гальваническими минами и преподавал барон П.Л. Шиллинг. Его квартира – в прямой видимости от Инженерного замка – в «доме Адамини» на Марсовом Поле. В разное время в числе преподавателей училища были другие интересующие нас электротехники. Академик Б.С. Якоби (1801–1874 гг.) изобрел первый в мире электродвигатель с непосредственным вращением рабочего вала, то есть имевший практическое применение (см. выше о Высочайшем Указе о создании комиссии И.Ф. Крузенштерна).

Работая в Инженерном замке, преподаватель Б.С. Якоби изобрел ряд приборов для измерения электрического сопротивления, названных им вольтагометрами. Автор теоремы Якоби о максимальной мощности. Построил лодку с электромагнитным двигателем на 14 персон (ходила по Неве против течения). В 1838 году Якоби открыл гальванопластику, положив начало прикладной электрохимии [3].

У российской образованной публики в течение всего XIX века электротехника была модной и перспективной наукой. Электротехники XIX века, как летчики и космонавты века XX, были всегда на виду. Получить электротехническое образование становилось многообещающим, как мы видели в среде военных моряков, саперов и инженеров.

Император Николай Павлович стал энтузиастом внедрения инженерных, физических и электротехнических достижений. Мы уже видели в этой статье, какие выдающиеся электротехники стали выдающимися педагогами. Это было отмечено на самом высоком государственном уровне. Звание академика или профессора – это чаще всего генеральский чин, статского или действительного статского советника, как Ленц, Мерчинг, Петрушевский или Боргман – последние двое – члены Государственного Совета Российской империи.

В числе учеников были императоры Всероссийские Александр III (преподаватель Б. С. Якоби) и Николай II (преподаватель И.И. Боргман), а также наследники престола и просто дети императоров, великие князья и князья императорской крови, герцоги Мекленбург-Стрелицкие и даже будущий король Сиам со своим адъютантом. Среди выпускников 1842

года Главного инженерного училища был инженер-подпоручик Ф.М. Достоевский.

**Инженер-подпоручик П.Н. Яблочков** – выпускник 1866 года Главного инженерного училища. Если основателем кафедры электротехники ЭТИ является профессор Боргман, то основателем научной и учебной лаборатории электротехники ЭТИ следует считать Павла Николаевича Яблочкова (1847–1894 гг.).



Первые его шаги на научной и электротехнической стезе состоялись в частном Подготовительном пансионе, который содержал военный инженер Ц.А. Кюи (1835–1918 гг.), профессор инженерного училища. Цезарь Антонович Кюи сам окончил Николаевскую инженерную академию в 1857 году. Оставлен преподавателем фортификации при академии. В связи с началом Русско-турецкой войны полковник Кюи, по просьбе его бывшего ученика знаменитого генерала М.Д. Скобелева, был командирован на театр военных действий. Занимал кафедру по своей специальности одновременно в трех военных академиях: Генерального штаба, Николаевской инженерной и Михайловской артиллерийской. Профессор. Инженер-генерал.

**Ц.А. Кюи** – учитель **П.Н. Яблочкова**. Гораздо более широкой публике, и далеко не только русской, Ц.А. Кюи известен, как композитор и музыкальный критик, член известного музыкального объединения

«Могучая кучка». Автор 14 опер и 250 романсов, отличающихся лирической выразительностью, изяществом и тонкостью вокальной декламации. До сих пор популярны его романсы на слова А.С. Пушкина «Сожженное письмо» и «Царскосельская статуя».



Цезарь Антонович оказал большое влияние на Яблочкова, возбудил у будущего изобретателя интерес к науке, и к самой современной ее части – электричеству. После 4 лет обучения в Николаевском училище Павел Николаевич окончил его по первому разряду, получив чин инженера-подпоручика. В 1869 году его командируют в Техническое гальваническое заведение в Кронштадте в то время, как мы уже знаем, единственная в России школа, которая готовила военных специалистов в области электротехники. Там П.Н. Яблочков познакомился с новейшими достижениями в области изучения и технического применения электрического тока, особенно в минном деле, основательно повысил свою теоретическую и практическую электротехническую подготовку.

**Совершенствование телеграфа.** После увольнения в запас работал начальником службы телеграфа на одной из железных дорог. Там у него была лаборатория, и занимался он тем, чему отдали дань все электротехники XIX века – совершенствовал телеграф. По разным

параметрам, но один параметр прослеживается совершенно четко – сокращение числа проводов от передающего к приемному аппарату. От 6 или 8 проводов у первого телеграфного аппарата Шиллинга, 4 проводов – у Сименса, 1 провода – в дуплексном аппарате Жана Бодо (1845–1903 гг.) до совершенно беспроводного телеграфа Попова. Ведь А.С. Попов, работая в Минном офицерском классе, изобретал не радио, а именно беспроводный телеграф и с таким названием изобретение существовало примерно до 1910 года. Впрочем, об этом изобретении П.Н. Яблочкова достоверных сведений не сохранилось.



**Электрическое освещение.** Другой «*idée fixe*» электротехников XIX века было создание надежной системы электрического освещения. То есть ненадежных систем было много, и все они были одна сложнее другой. Сложность происходила от необходимости регулировки недолговечных электродов, поскольку источником света служила дуга, и никакой альтернативы ей пока не знали. Скоро, очень скоро, в 1880 году, Эдисон, используя патент Лодыгина, и Сван налаживают производство надежных и экономичных ламп накаливания. Осталось совсем немного времени, и все-таки Яблочков успел. «Русский свет», «Северный сияние», «Свеча Яблочкова» – последняя, яркая вспышка системы освещения на основе электрической дуги.

П.Н. Яблочков в своем изобретении отказывается от регулятора, отказывается от постоянного тока в пользу однофазного переменного, разрабатывает способ «дробления света посредством индукции катушек»,

впервые применяет параллельное подключение нескольких «свечей» от одного генератора с трансформаторами и конденсаторами.



Он сконструировал и впервые организовал массовое производство генераторов переменного тока для новой системы освещения. Замена ламп впервые стала автоматической. «Русский свет» почти одновременно вспыхнул в Лондоне, Париже, Берлине, Стокгольме и в Лос-Анжелесе, а Яблочков стал самым известным российским изобретателем. Сразу была создана компания по эксплуатации его патентов. Фирма академика Луи Бреге, с которой с 1875 года сотрудничал Павел Николаевич, производила до 8 тысяч «свечей» в день, по 20 копеек за штуку.

Электрические лампы подешевели в разы. Компании по коммерческой эксплуатации «свечей Яблочкова» основываются во многих странах мира. В основном для уличного освещения, но были и в Лувре, и в театрах. Ни одно изобретение в области электричества никогда еще не распространялось столь стремительно. Через полтора года «свеча Яблочкова» добралась до родины – попала в Россию. Сначала в столицу – «электрическую столицу» России – в Кронштадт (площади и казармы). Потом – в «культурную столицу» России, собственно, в Санкт-Петербург – бывшая Екатерининская площадь перед Александринским театром на Невском проспекте (пиар-акция за счет изобретателя) и мосты – Дворцовый и Литейный. Мосты – это характерно для Петербурга. Первые электрические трамваи первые годы работали только на льду Невы из-за противодействия извозопромышленников. А электрическому освещению противодействовали газовые компании.

**Возвращение на «белом коне».** В Петербург приезжает уже не отставной поручик саперного батальона, а всемирная знаменитость, награжденный высшим орденом французской республики – орденом

Почетного Легиона, успешный предприниматель, миллионер. И новый всплеск интереса к электротехнике, везде продаются портреты Яблочкова, интерес к его работам – в разных кругах общества, среди знакомых – высочества, светлости, сиятельства и превосходительства. Однако массовое производство ламп накаливания Эдисона и Свана делает «свечу Яблочкова» неконкурентноспособной.

Павел Николаевич продолжает изобретательскую и предпринимательскую деятельность в своей лаборатории и в совместной с фирмой Бреге мастерской в Париже (карманные часы с боем марки 'Breguet' – «Пока недремлющий брегет / Не прозвонит ему обед» в I главе «Евгения Онегина»). На Первой всемирной электротехнической выставке в Париже в 1881 году завоевывает высшую награду. Получает и удачно продает новые патенты на электрические машины: магнито-электрическую, магнито-динамо-электрическую, на электродвигатель и другие.

П.Н. Яблочков продолжает работы по конструированию новых аккумуляторов и трансформаторов. Во время этих работ получает химическое отравление. От последствий отравления уже не оправился. В очередной приезд в Россию в 1892 году серьезно заболел и через полтора года в возрасте 46 лет скончался в гостинице, в родном Саратове.

Свое состояние, имения в Саратовской губернии, впрочем, в расстроенном состоянии (он даже не мог там жить и последний год жил в гостинице) П.Н. Яблочков оставил жене и сыновьям от первого и второго брака (оба инженеры-изобретатели).

**Завещание в надежные руки.** Оборудование богатой, по тому времени, лаборатории П.Н. Яблочков завещал первому Электротехническому вузу России. Это оборудование стало основой учебных лабораторий кафедры электрических измерений и кафедры электротехники ЭТИ. В учебных лабораториях кафедры Теоретических основ электротехники ЛЭТИ еще в начале 1970 годов можно было встретить действующие приборы из наследства П.Н. Яблочкова. Несколько демонстрационных экземпляров сохраняются до сих пор.

Почему же изобретатель подарил свою лабораторию Электротехническому институту? Никакие связи с П.Н. Яблочковым не

прослеживаются. Для логичного объяснения попробуем применить аналогию и экстраполяцию. Аналогию с А.Н. Лодыгиным [6], изобретателем системы освещения, основанной не на дуге, а на нити накаливания. Судьбы этих двух талантливых людей очень похожи. Оба родились осенью 1847 года, в Саратовской и Тамбовской губернии, в провинции, но не глухой. В семьях знатных, но небогатых. Оба служили в армии в небольших, обер-офицерских, чинах. Почти одновременно ушли в отставку, просто, потому что душа не лежала.

С начала 1870-х активно изобретали: один свечу, другой лампочку. Жили и работали в Париже, и в 1874 году каждый получил привилегию (патент) на свое изобретение. Они часто встречались, и даже немного работали вместе. Успешные, хотя и не очень умелые, предприниматели во Франции и в САСШ. Почему не в России? И по политическим причинам в том числе. Дело в том, что Лодыгин был немножко народовольцем, а Яблочков совсем не рядовым масоном.

П.Н. Яблочков умер в 1894 году. А.Н. Лодыгин продолжал работу в Америке, строил и запускал в эксплуатацию, среди прочего, электрохимический завод «Westinghouse Electric» по производству вольфрама для ламп накаливания. В 1907 году вернулся в Россию всемирно известным изобретателем и электротехником. Выразил желание преподавать электротехнику в ЭТИ, однако свободным оказалось только место профессора А.А. Кракау (умер в 1909 году), и А.Н. Лодыгин преподавал электрохимию. Возможно, также поступил бы и П.Н. Яблочков. Во всяком случае, он всегда мог помнить об Электротехническом институте у себя на родине.

**Льеж (Бельгия) и отечественная электротехника: от Ц.А. Кюи и П.Н. Яблочкова до наших дней.** С 1863 г. до самой смерти в 1894 г. П.Н. Яблочков – ученик, друг и сотрудник Ц.А. Кюи.

*1880-е годы.* Профессор фортификации генерал Ц.А. Кюи первый среди русских инженеров предложил применение бронебашенных установок в сухопутных крепостях. Самые мощные броневые башни установлены в Льеже (Бельгия) в это время.

1886г. Опера композитора Ц.А. Кюи «Кавказский пленник» по повести А.С. Пушкина прошла с успехом в Льеже на французском языке после двух неудач в Мариинке.

1893 г. Будущий профессор кафедры электротехники ЭТИ П.Д. Войнаровский с отличием окончил Электротехнический институт в Льеже (только для дипломированных инженеров).

1894 г. Профессор кафедры электротехники ЭТИ М.А. Шателен переводит на русский язык «Курс электричества» Э. Жерара [7], основателя Электротехнического института Монтефиори при университете в Льеже. Используется в качестве учебника в ЭТИ.



1895г. Первая кафедра электротехники в первом электротехническом вузе России – ЭТИ получает по наследству от П.Н. Яблочкова богатое по тому времени лабораторное оборудование.

1896г. Первые профессора кафедры электротехники М.А. Шателен и П.Д. Войнаровский завершают формирование крупнейшей электротехнической учебной лаборатории с отделениями электротехнических измерений и электромагнитного поля. Лаборатория создается по образцу и подобию учебной лаборатории в Электротехническом институте Монтефиори в Льеже.

1898г. П.Д. Войнаровский переводит на русский язык другой учебник Э. Жерара «Электрические измерения».

2006г. По личным впечатлениям авторов. Июльский репертуар музыкального театра Льежа включал 17 постановок. Из них 12 – русских

композиторов, из них 6 – П.И. Чайковского (самого исполняемого в мире композитора), 2 – Цезаря Кюи, редко исполняемого в России.

### Список литературы

1. Магический электротехнический. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина), 2011.– 250 с.

2. Панкин В.В., Соловьева Е.Б. Первая в России кафедра электротехники: от технического училища до электротехнического университета // In memoriam: Василий Андреевич Андреев: сборник памяти В.А.Андреева. – Ульяновск: УлГТУ, 2018. С.138–153.

3. Брокгауз – Ефрон. Энциклопедический словарь. С.-ПЕТЕРБУРГ. Типо-Литография И.А.Ефрона, Прачешный пер. № 6. Тт.1–43. 1891–1904.

4. Алексеев М.П. Пушкин. Сравнительно исторические исследования.– Ленинград: «Наука», Ленингр. Отд-ие, 1984.– 478 с.

5. Гусаров А. Ю. Кронштадт. Военно-морская столица России. Путеводитель. – СПб.: «Паритет», 2018.– 352 с.

6. Выдающиеся выпускники и деятели Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» имени В.И.Ульянова (Ленина). 1886–2006: биографический справочник / под ред. Д.П.Пузанкова.– СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина), 2006.– 350 с.

7. Жерар Э. Курс электричества / Пер. М.А.Шателена. Под ред. А.И.Садовского, 2 тома.– СПб.: Изд. Ф.В.Щепанского, 1893–1894.

**Панкин Валерий Васильевич** – доцент кафедры ТОЭ,  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет.  
Тел.: (812) 346–17–96, [rankin.valeriy@mail.ru](mailto:rankin.valeriy@mail.ru)

**Соловьева Елена Борисовна** – д.т.н., профессор, зав. кафедрой ТОЭ,  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет.  
Тел.: (812) 346–17–96, [selenab@hotmail.ru](mailto:selenab@hotmail.ru)  
Адрес: 197376, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5, СПбГЭТУ,  
кафедра ТОЭ.

# ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПО ВИЛЬГЕЛЬМУ ФОЙСНЕРУ

И. В. Ерохов

В статье 1847 года Кирхгоф (G.Kirchhoff) поставил задачу расчета значений токов ветвей сложной электрической цепи, которую он определил как систему проводников, соединенных произвольным образом [1]. Система проводников была описана с помощью уравнений, которые вошли в теорию электрических цепей как законы Кирхгофа [2]. Сознвая сложность поставленной задачи, ученый предложил ввести упрощение структуры цепи до одного контура, как необходимое условие первого этапа расчета. Отметим, что идеи упрощения структуры высказывал и Максвелл (J.C.Maxwell), как это описал один из его студентов [3]. Однако эту проблему удалось формализовать только ученику Кирхгофа, статьи которого долгое время оставались в архиве авторитетного научного журнала без какого-либо движения [4], [5].

Как следует из заголовков статей, Фойснер уточнил название сложной системы проводников, подлежащей расчету. Он закрепил за объектом расчета термин *netzförmigen Leitern*, т.е. проводники в форме сети (надо полагать, что имелась в виду рыболовная сеть). Кроме того, отметим, что в статье было введено понятие подсхемы (*Teilnetze*), а самой простой частью схемы была признана отдельная ветвь, с устранения которой ученый и предлагал начинать процесс упрощения математического описания электрической цепи.

Пусть ветвь  $a$  с сопротивлением  $w_a$  полностью удаляется из графа и одновременно из математического описания цепи, каким, например, является определитель матрицы системы уравнений [1]. Величина тока этой ветви определялась автором по формуле:

$$i_a = \frac{E_a}{w_a + W_a}, \quad (1)$$

где  $E_a$  – источник напряжения ветви  $a$ ;  $W_a$  – сопротивление схемы относительно узлов удаленной ветви  $a$ .

Выражение (1) может быть представлено по-другому:

$$(w_a + W_a) = \frac{E_a}{i_a} \quad \text{или} \quad (w_a + W_a) = \frac{N}{N_a}, \quad (2)$$

где  $N$  – определитель матрицы системы уравнений;  $N_a$  – определитель матрицы, из которой удалена ветвь  $a$ .

Приведем уравнение (2) к более удобному виду, записав его в строчку:

$$(w_a + W_a)N_a = N. \quad (3)$$

Введем еще одно понятие, выразив сопротивление  $W_a$  через соотношение определителей:

$$W_a = \frac{N_{a'}}{N_a}. \quad (4)$$

С учетом выражения (4) уравнение (3) будет записано в следующем виде:

$$N = w_a N_a + N_{a'}, \quad (5)$$

где  $N_{a'}$  – определитель, в котором узлы ветви  $a$  замкнуты ( $w_a=0$ ).

Уравнение (5) является фундаментальным в методе Фойснера.

Формула преобразования определителя в виде алгебраической записи получена с помощью понятий и приемов, используемых в теории электрических цепей. Однако автор статей [4], [5] считал, что графический образ лучше объясняет смысл преобразований, поэтому приводим рис.1, на котором представлены последовательные изображения преобразования фрагмента графа. Удаляется ветвь **a**: просто и с замыканием узлов [5].

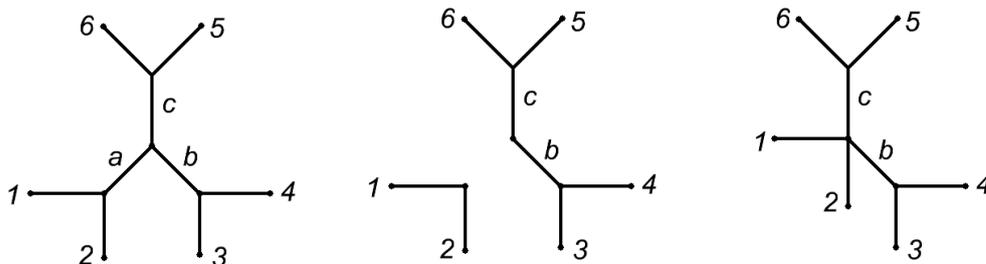


Рис. 1. Простое удаление ветви и с замыканием ее узлов.

Алгебраически эти удаления можно достичь, придавая параметрам ветви **a** следующие значения: простое удаление –  $R_a = \infty$ , с замыканием узлов –  $R_a = 0$ . Кроме этого замечания надо помнить, что определитель матрицы рассматривается в статье как гомогенная функция всех сопротивлений схемы  $\mu$ -ого порядка, что делает язык алгебры не менее важным, чем язык геометрии. Итак, слагаемые определителя  $N$  состоят из сомножителей, количество которых равно  $\mu$  – числу независимых контуров. В процессе преобразования порядок определителя  $N_a$  уменьшается на единицу. В этом и состоит смысл процесса упрощения математической записи определителя.

Кроме перечисленных языков реферируемых статей, Фойснер использовал язык немецкий, а поэтому упорно формулировал **словесные правила**. Воспроизведем действия, выполнение которых требуется по правилу для построения формулы (5):

1. Исходной является полная запись определителя, которая подлежит преобразованию. Придаем сопротивлению ветви **a** значение, равное бесконечности, т.к. это вносит неопределенность, удаляем сопротивление ветви  $w_a$  за пределы записи определителя. Оставшееся выражение разделено на две части, одна из которых является гомогенной функцией порядка  $\mu$ , а другая –  $\mu-1$ . Так как определитель  $N_a$  соответствует функции с пониженным порядком, то эту часть записи сохраняем, а другую часть игнорируем.

2. Исходной является полная запись определителя, которая подлежит преобразованию. Придаем сопротивлению ветви **a** значение, равное нулю, т.к. слагаемые, содержащие сопротивление ветви  $w_a$  исчезают как нулевые, то оставшаяся часть записи определителя получает обозначение –  $N_{a'}$ .

Формула (5) может использоваться неоднократно, а, следовательно, порядок первого слагаемого будет уменьшаться до финального значения, равного единице.

Об этом Фойснер говорит совершенно прямо в своей статье:

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes wird die Bildung des Nenners der  $i$  für ein gegebenes Netz auf die Betrachtung immer einfacherer Netze zurückgeführt und so in regelmässigem Fortschreiten der gesuchte Ausdruck gebildet.

По-русски цитата читается так:

**Многократное применение этого уравнения позволяет из цепи, данной для вычисления тока  $i$ , образовывать определители, следующие из рассмотрения все более простых цепей и таким образом регулярными успешными действиями получить искомое выражение.**

Итак, формула (5) должна применяться многократно, то есть процесс упрощения выражения определителя должен быть **рекуррентным**.

Представим себе, что из выражения (5) исключены обозначения сопротивлений  $w$ , оставлены только индексы ветвей графа. В этом случае уравнение (5) превращается в выражение, которое отображает структуру определителя схемы:

$$S^N = aS^{Na} + S^{Na'}, \quad (6)$$

где буквой  $S$  с верхним индексом обозначены структуры различных определителей. Покажем на простом примере процесс упрощения структуры определителя.

**Пример.** Проведем упрощение структуры определителя для матрицы системы уравнений электрической цепи рис.2, составленной по методу контурных токов. Этой системе уравнений соответствует совокупность независимых схемных контурных множеств той же цепи [6], которая представлена ниже (7).

Итак, исходим из того, что совокупность множеств (7) определяет структуру определителя матрицы электрической цепи, рис.2 [6]. Выражение для структуры определителя получается с помощью декартового умножения схемных множеств [6], [7]. В процессе выполнения операций структурной алгебры действуют следующие правила:

$$a \oplus a = \emptyset, \quad a \otimes a = \emptyset. \quad (8)$$

Под элементом  $a$  указанных операций следует понимать как единичный символ ветви, так и одинаковые комбинации нескольких символов [6, 7].

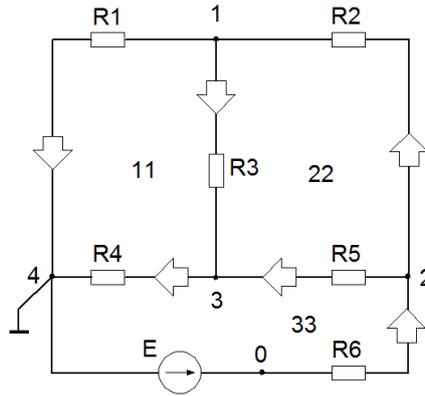


Рис. 2. Схема моста Уитстона.

$$C_{11} = (1,3,4), \quad C_{22} = (2,3,5), \quad C_{33} = (4,5,6). \quad (7)$$

Проведем умножение схемных множеств (7), первый этап которого представлен ниже:

$$(1,3,4) \otimes (2,3,5) = 12,13,15,23,33^*,35,24,34,45.$$

Отметим, что один из элементов первого этапа отмечен звездочкой. В соответствие с правилами (8) элемент 33 из результата умножения удаляется, т.к.  $33 \otimes 33 = \emptyset$ .

Из примера выполнения первого этапа декартового произведения можно понять правило, по которому производится операция: к любому символу ветви первого контурного множества приписывается один из символов второго множества, и так действуют далее. Завершаем процесс декартового умножения схемных контурных множеств:

$$\begin{aligned} 12,13,15,23,35,24,34,45 \otimes (4,5,6) = \\ = 124,134,145,234,345,* \\ 125,135,235,245,345,* \\ 126,136,156,236,356,246,346,456. \end{aligned}$$

Отмеченные комбинации символов удаляются в соответствие с правилами (8), т.к.  $345 \oplus 345 = \emptyset$ . Заметим, что удаляемые комбинации состоят из символов ветвей, каждый из которых дважды встречается в схемных множествах (7).

Запишем результат умножения в виде структурного числа, в котором каждый столбец является комбинацией символов ветвей соответствующего слагаемого определителя [7]:

$$S^{Nc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1' & 1' & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2' & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4' \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В матричной рамке структурного числа отмечены столбцы, соответствующие контурам электрической цепи, рис.2. Для определителя (9), в котором присутствуют контура, множеством параметров, будут все сопротивления схемы:

$$(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6). \quad (10)$$

Если отобразить структуру (9) на множестве параметров (10), то получим выражение для определителя матрицы МКТ электрической цепи рис.1.

Применим формулу (6) к выражению (9), используя словесное правило:

$$S^{Nc} = 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Отметим, что выражение в рамке первого слагаемого (11) в теории структурных чисел называется результатом операции алгебраического дифференцирования по аргументу 1:

$$\frac{dS^{Nc}}{d1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Тогда выражение (11) можно записать более компактно, т.к. второе слагаемое формулы получается автоматически как часть структурного числа, которое не участвует в алгебраическом дифференцировании. Символ первой ветви вносим как сомножитель с целью сохранения максимального порядка слагаемого и выполнения обозначенного равенства:

$$S^{Nc} = 1 \frac{dS^{Nc}}{d1} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Запишем совокупность независимых схемных узловых множеств электрической цепи, рис.2:

$$K_1 = (1, 2, 3), \quad K_2 = (2, 5, 6), \quad K_3 = (3, 4, 5). \quad (12)$$

Результат декартового умножения схемных множеств (12) приведен ниже в виде структурного числа [8]:

$$S^{Nk} = \begin{bmatrix} 1' & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1' & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2' & 3' & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Заметим, что в матричной рамке структурного числа (13) помечены столбцы, соответствующие узлам электрической цепи рис.2. Естественно, что для определителя (13) множеством параметров, будут все проводимости схемы:

$$(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6). \quad (14)$$

Если отобразить структуру (13) на множестве параметров (14), то получим выражение для определителя матрицы МУП электрической цепи, рис.2. Применим формулу (6) к выражению (13) и получим:

$$S^{Nk} = 1 \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Интересно отметить, что структурные числа (9), (13) отличаются только теми столбцами, которые помечены в каждом из них.

В статье [5] приводится формула, в которой преобразование начинается с выноса проводимости из математической записи определителя.

$$P = P_a + g_a P_{a'}, \quad (16)$$

где  $P$  – определитель матрицы системы уравнений, составленной по методу узловых потенциалов (МУП).

Алгебраически удаление проводимости можно достичь, если придавать параметрам ветви **a** следующие значения: простое удаление –  $G_a = 0$ , с замыканием узлов –  $G_a = \infty$ .

**Пример.** Проведем построение формулы (16) по словесному правилу.

Структурное число (13) получено декартовым умножением схемных узловых множеств. Приравняем значение проводимости первой ветви нулю. Слагаемые, содержащие первую ветвь, обнуляются, остается часть математической записи определителя. Записываем его как  $P_a$  – первое слагаемое формулы (16):

$$S^{Nk} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \oplus 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Приравниваем значение проводимости первой ветви бесконечности, т.к. это вносит в математическую запись неопределенность, то выносим символ первой ветви за пределы части определителя. Записываем  $P_{a'}$  – второе слагаемое формулы (16). Выражения (17), (15) идентичны.

В статье [4] приведена формула для случая, когда из выражения определителя вынесены две ветви:

$$N = w_a w_b N_{ab} + w_a N_{ab'} + w_b N_{a'b} + N_{a'b'}, \quad (18)$$

где используется система обозначений слагаемых такая же, как и в формулах (2), (3), (4), (5) оригинала. Выражение (18) получено как результат применения формулы (5) к самой себе. Повторим формулу (5) оригинала (5\*) и применим ее к каждому слагаемому:

$$N = w_a N_a + N_{a'} \quad (5^*)$$

$$w_a N_a = w_a w_b N_{ab} + w_a N_{ab'}, \quad N_{a'} = w_b N_{a'b} + N_{a'b'}.$$

Очевидно, что полученные результаты входят в формулу (18).

**Пример.** Проведем разложение матричного числа (9) по двум ветвям связи 1 и 2. По формуле (5) запишем символьное выражение для нашего случая:

$$S^{Nc} = 12S_{12}^{Nc} \oplus 1S_{12'}^{Nc} \oplus 2S_{1'2}^{Nc} \oplus S_{1'2'}^{Nc}. \quad (5')$$

Результат действий, заложенных в формуле (5'), приводится ниже:

$$S^{Nc} = 1 \otimes 2 [4 \ 5 \ 6] \oplus 1 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} \oplus 2 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Часть первого слагаемого (5'), (19) является результатом последовательного алгебраического дифференцирования структурного числа (9) по символам ветвей 1 и 2. Структура второго слагаемого формулы (19) получена из первого слагаемого (15) после придания символу 2 нулевого значения. Операции для получения третьего и четвертого слагаемых формулы (5') аналогичны предыдущим.

Преобразуем выражение (19) следующим образом:

$$S^{Nc} = 12 [4 \ 5 \ 6] \oplus 13 [4 \ 5 \ 6] \oplus 1 \begin{bmatrix} 45 \\ 56 \end{bmatrix} \oplus 23 [4 \ 5 \ 6] \oplus 2 \begin{bmatrix} 44 \\ 56 \end{bmatrix} \oplus 6 \begin{bmatrix} 334 \\ 455 \end{bmatrix}.$$

В завершении преобразований мы получаем выражение для определителя в таком виде, который был принят у Фойснера [4]:

$$N = (12 + 13 + 23)(4 + 5 + 6) + 1(45 + 56) + 2(45 + 46) + 6(34 + 35 + 45). \quad (20)$$

Конечно, матрица уравнений Кирхгофа (21) и матрица МКТ (22) дадут один и тот же результат при расчете значений определителя:

$$\Delta \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -20 & -25 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 20 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 35 & 0 & 25 & 30 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 165625, \quad (21)$$

$$\Delta \begin{bmatrix} 55 & -20 & -25 \\ -20 & 65 & -30 \\ -25 & -30 & 90 \end{bmatrix} = 165625. \quad (22)$$

Однако такие же результаты мы получаем после подстановки значений параметров электрической цепи рис.2 в структуры определителя (9), (20). Значения сопротивлений элементов электрической цепи рис.2 представлены ниже:

1 – 10 Ом; 2 – 15 Ом; 3 – 20 Ом; 4 – 25 Ом; 5 – 30 Ом; 6 – 35 Ом.

Начиная с пункта 12 статьи [4], Фойснер вычисляет структуры определителей простых графов, которые могут быть фрагментами более сложных схем. Приведем некоторые из них. Обратимся к тексту статьи, пункт 13 которого начинается со слов:

«Сначала мы рассмотрим схему с двумя узлами. На рис.2 представлена простейшая схема, состоящая из трех проводников, Применим к ней уравнение (5)».

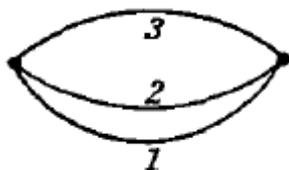


Рис. 3. Простейший фрагмент схемы из работы [4].

$$N = w_1 N_1 + N_{1'} \quad (23)$$

Получим слагаемые уравнения (23) из определителя схемы, представленной на рис.3:

$$N = \begin{vmatrix} w_1 + w_2 & -w_2 \\ -w_2 & w_2 + w_3 \end{vmatrix} = w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Слагаемые определителя могут быть записаны в виде структурного числа, с помощью которого получаем обе части формулы (5):

$$N_1 = \frac{dN}{d1} = [2 \quad 3] \Rightarrow (w_2 + w_3); \quad N_{1'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow w_2 w_3, \quad (25)$$

$$N_1 = 1 \times [2 + 3] + 23.$$

Отметим, что для получения второго слагаемого формулы (23) надо не только удалить ветвь 1, но и замкнуть ее узлы в графе схемы. Автор статьи наглядно представляет разные этапы преобразования, рис.4.

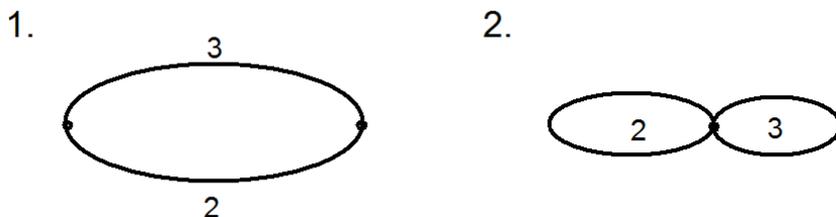


Рис. 4. Графическое изображение операции по удалению ветви 1.

На рис.4, (п. 1) показано преобразование графа с помощью простого удаления ветви 1, а на рис.4, (п.2) – результат удаления той же ветви с замыканием ее узлов в графе.

Рассмотрим более сложный граф рис.5, в котором две ветви состоят из двух частей каждая. Здесь, прежде всего, предлагается упростить граф в два этапа, рис.6, которые не требуют специальных комментариев.

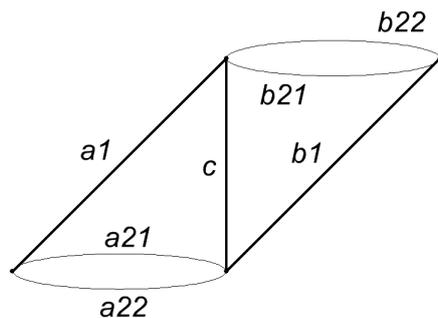


Рис. 5. Пример графа с составными ветвями.

На втором этапе преобразования получаем граф, который изображен на рис.3.

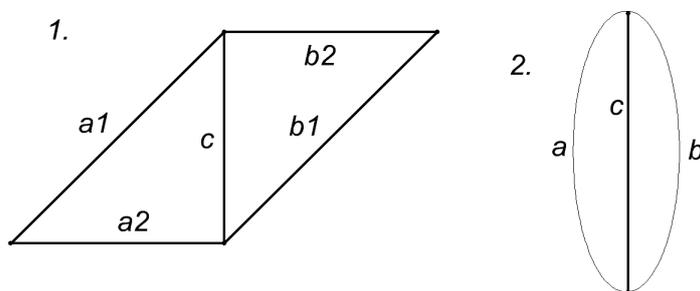


Рис. 6. Упрощение графа рис.5.

По аналогии с рис.3 запишем уравнение, структурно повторяющее выражение (25):

$$N = (a + b)c + ab .$$

Раскроем символы ветвей, которые состоят из двух частей, после чего выражение изменится следующим образом:

$$N = c(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) . \quad (26)$$

На этом автор останавливает преобразование и выбирает другой способ определения структуры определителя.

Совершенно непонятно, зачем производился вывод уравнения (26), если автор решил получать символическое выражение определителя рис.5 по правилу, которое приводится ниже на языке оригинала.

*Wenn in einem Netz die Strecken  $a, b, c \dots$  durch  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  Drähte gebildet werden, so wird das  $N$  dieses Netzes aus dem des entsprechenden Netzes mit nur einfachen Strecken dadurch erhalten, dass die  $a, b, c \dots$  durch die Producte  $a_1 \dots a_\alpha, b_1 \dots b_\beta, c_1 \dots c_\gamma \dots$  ersetzt und die von  $a$  freien Glieder mit der Summe der Combinationen  $\alpha - 1^{ter}$  Klasse der  $a$ , die von  $b$  freien mit der Summe der Combinationen  $\beta - 1^{ter}$  Klasse der  $b$  etc. multiplicirt werden.*

В переводе на русский язык этот текст читается следующим образом:

**Если в некоторой цепи ветви  $a, b, c, \dots$  образованы несколькими проводниками  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , то определитель  $N$  этой цепи может быть получен из аналогичной цепи, в которой ветви представлены простыми отрезками, при условии, что ветви  $a, b, c, \dots$  будут заменены произведениями  $a_1, \dots, a_\alpha, b_1, \dots, b_\beta, c_1, \dots, c_\gamma$  и свободные элементы ветви  $a$  вместе с суммой сочетаний  $(\alpha - 1)$ - ранга  $a$ , которые с свободными элементами ветви  $b$  и с суммами сочетаний  $(\beta - 1)$ -ранга  $b$  и т.д. будут перемножены.**

В конечном итоге, структура определителя, полученного в статье Фойснера по этому правилу, имеет следующий вид:

$$N = c \left( (a_1 + b_1)(a_{21} + a_{22})(b_{21} + b_{22}) + a_{21} a_{22} (b_{21} + b_{22}) + b_{21} b_{22} (a_{21} + a_{22}) \right) + (a_1 (a_{21} + a_{22}) + a_{21} a_{22}) (b_1 (b_{21} + b_{22}) + b_{21} b_{22}). \quad (27)$$

Следует отметить, что приведенное правило объясняет только часть выражения детерминанта  $N$ . Алгоритм построения последней строчки выражения (27) отсутствует в тексте правила, а это значит, что ее структура может быть записана только в том случае, если будете в состоянии раскрыть финальное сокращение в тексте правила – и т.д.

В методе Фойснера получение символических выражений определителей тесно связано с графом схемы. Однако, начиная с пункта 15, связь между

графическими образами и алгебраическими выражениями ясна далеко не всегда, а правила построения структур выглядят сложными и не облегчают понимания сути преобразований. Одним словом, получение структур определителей сложных графов в статье описано достаточно фрагментарно, что иллюстрирует пример из [4].

Только в пункте 20 автор статьи решился на рассмотрение реальной схемы, двойного моста, которая имеет 9 ветвей, 5 независимых узлов и 4 независимых контура.

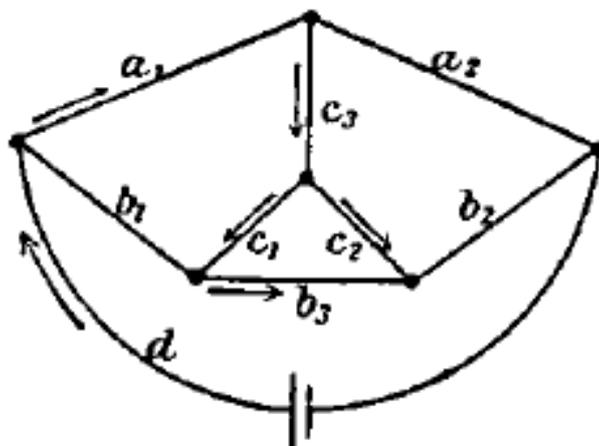


Рис. 7. Схема измерительного моста Томсона.

Со ссылкой на правило из пункта 15 записано выражение (28):

$$\begin{aligned}
 N = & (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3) ((a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + b_3) d \\
 & + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3)) \\
 & + (c_1 + c_2 + b_3)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) d + (c_1 + c_2) (a_1 a_2 (b_1 + b_2 + b_3) \\
 & + b_1 b_2 (a_1 + a_2)) \\
 & + c_1 b_3 ((a_2 + b_2) d + (a_1 + a_2) b_2) + c_2 b_3 ((a_1 + b_1) d + (a_1 + a_2) b_1) \\
 & + c_3 b_3 ((a_1 + a_2 + b_1 + b_2) d + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Автор совершенно справедливо напоминает, что гальванометр включен в ветвь с обозначением  $c_3$ , а сравниваемые небольшие по величине сопротивления включены в ветви с обозначениями  $b_1$  и  $b_2$ . Однако, даже перечисление рассматриваемых контуров

$$da_1 c_3 c_1 b_3 b_2, \quad da_1 c_3 c_2 b_2, \quad db_1 c_1 c_3 a_2, \quad db_1 b_3 c_2 c_3 a_2,$$

которые содержат как ветвь гальванометра, так и ветвь источника, не позволяют понять, как будут возвращены в выражение определителя ветви с индексами  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ .

Изъятие перечисленных ветвей позволяет представить граф рис.7 состоящим из трех параллельных ветвей:

$$(a_1 + a_2), (b_1 + b_2 + b_3), d.$$

Такое преобразование позволяет применить правило для получения структуры определителя, приведенное в пункте 15. Кстати, оно является развитием правила из пункта 14, цитированного выше по тексту. Правило в пункте 15 состоит из 10 строк, написанных на немецком языке 19-го века. Хочется увидеть «рядового» читателя, который сразу по тексту правила напишет довольно громоздкое выражение (28) для структуры определителя электрической цепи рис.7.

Конечно, выражение (28) проверено, содержит 75 слагаемых, которые могут быть получены с помощью декартового умножения схемных контурных множеств. Правда, для облегчения вычислений независимые контуры следует выбрать другие.

Во-первых, следует задаться деревом схемы и его связями, например,

$$a_1, a_2, c_1, c_2, c_3 \text{ и } b_1, b_2, b_3, d.$$

При таком выборе гальванометр будет принадлежать дереву, а источник и сравниваемые малые сопротивления – связям. Такое распределение, вероятно, более справедливо.

Во-вторых, построение структуры детерминанта хорошо бы начинать с физически оправданного этапа. Мало того, хотелось бы, чтобы был установлен **рекуррентный** процесс восхождения от простой структуры к структуре сложной.

Однако первая статья Фоснера посвящена главным образом процессу упрощения известной структуры определителя. Мало того, когда заходит речь о построении структур, то главная роль отводится правилам, которые основаны на результате, достигнутом на простом примере. Вероятно, Фойснер понимал, что статья [4] написана не совсем удачно. Думается, что и по этой причине через два года была опубликована вторая статья [5] с аналогичным названием.

Но во второй статье метод Фойснера получил развитие. Была предложена дуальная формула для выделения параметра проводимости и формула разложения числителя отклика по контурам, включающим входную и выходную ветвь. Повторно (в 1953г.) опубликованную первую формулу для разложения определителя схемы по проводимостям стали приписывать Персивалю. Вторую формулу, после ее повторного опубликования спустя полвека (в 1957г.), стали называть формулой Мейсона. Так что Фойснер стал человеком, опередившим время.

### Список литературы

1. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Избранные труды. Г. Кирхгоф. – М.: Наука, 1988.– С. 170–178.
2. Кирхгоф Г. О прохождении электрического тока через плоскую пластину, например, круглой формы // Избранные труды. Г. Кирхгоф. – М.: Наука, 1988.– С. 155–166.
3. Fleming M.A. Problems on the Distribution of Electric Currents in Networks of Conductors treated by the Method of Maxwell // Phil. Mag. (5s.).– 1885.–Vol.20.–P.221–258.  
[//https://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/serial?id=philomag](https://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/serial?id=philomag)
4. Feussner W. Ueber Stromverzeigung in netzförmigen Leitern // Annalen der Physik und Chemie.– Leipzig, 1902.– Bd 9.– S.1304–1329.
5. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstärke in netzförmigen Leitern. // Annalen der Physik und Chemie, Band 15, Leipzig 1904, s.385 – 394.
6. Максимович Н.Г. Методы топологического анализа электрических цепей. – Львов: Изд. Львов. Универ., 1970. – 258с.
7. Трохименко Я.К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. – М.: «Советское радио», 1972.– 310 с.
8. Bellert S., Woźniacki H. Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. – Warszawa : Wydaw. Naukowo-techniczne, 1968.– 306 s.

**Ерохов Игорь Васильевич** – профессор, канд. техн. наук, Запорожье (Украина). E-mail: [yerokhov@bigmir.net](mailto:yerokhov@bigmir.net).

## НАШИ ЮБИЛЯРЫ



Игорю Васильевичу Ерохову – постоянному автору сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» – исполнилось 80 лет. О его вкладе в теоретическую электротехнику можно судить по приложенному списку основных работ.

Игорь Васильевич родился 12 августа 1939 года в г. Кривой Рог (УССР). После восьми классов средней школы родного города завершил получение среднего образования в г. Днепропетровске. В 1961 году окончил Днепропетровский Metallургический институт по профессии «Автоматизация металлургического оборудования». Первое место работы – Запорожский филиал института автоматизации Госплана УССР, младший научный сотрудник. Затем была работа в Запорожском филиале КБ Электроприборостроения. Год провел в командировке в Харьковской ведущей организации в теоретическом комплексе – осваивал автоматические системы ракет и спутников.

С 1970 года И. В. Ерохов занимался машинным проектированием, а затем разрабатывал охранную сигнализацию, у которой сейсмический сигнал был основным. Защитил проект первой стадии управления ракетными войсками. Оформил карточку ВПК и проект совместного решения на заказ разгонного блока, который выводит спутник на стационарную орбиту. В 1980 году перешел на кафедру электротехники

Запорожского Индустриального института, затем работал в Приватном Классическом Университете на кафедре Информатики и электроники.

Игорь Васильевич пять лет на пенсии, но продолжает работать над статьями для нашего сборника, активно их дорабатывает и заочно участвует в обсуждениях по различным вопросам. За многие десятилетия своей научной работы он приобрел уникальную квалификацию по основаниям теоретической электротехники и истории открытий.

### Список литературы

1. Ерохов И.В., Тесленко В.П. Анализ электрических схем при помощи структурных матриц // Теоретическая электротехника. – Львов, 1972.– Вып.14.

2. Ерохов И.В., Тесленко В.П. Структурный анализ алгебраической модели электрической цепи // Электроника и моделирование.– Киев, 1975.– Вып.7.

3. Ерохов И.В. Возможность применения аппарата цепных ветвящихся дробей для электротехнических расчетов // Теоретическая электротехника.– Львов, 1977.– Вып. 24.

4. Ерохов И.В. Уравнение, аналогичное первому правилу Г.Кирхгофа для цепи произвольного размера//Прикладная электротехника.–Киев,1981.

5. Ерохов И.В. Представление внешней проводимости произвольной схемы, аналогичное форме Кауэра // ТУИС «Обработка информации в системах связи».– Л.: ЛЭИС, 1981.

6. Ерохов И.В. Алгоритм решения линейной системы уравнений, размерность которой последовательно увеличивается // Автоматизация проектирования в электронике.– Киев, 1981.– Вып. 24.

7. Ерохов И.В. Машинное моделирование и анализ радиоэлектронных цепей на основе ветвящихся цепных дробей // Автореф. дис. канд. техн. наук.– Одесса: ОЭИС, 1982.– 23 с.

8. Ерохов И.В. Кирхгоф Г. Избранные труды // Электричество, 1990, №7.– С. 91–92.

9. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета, созданного Г.Кирхгофом // Тр. международ. конф.

«Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике».—Ульяновск: УлГТУ, 2006.—Т. 3. — С. 76–83.

10. Ерохов И.В. Уточнение понятия структуры графа электрической цепи // Тр. международ. конф. по логике, информатике, науковедению — КЛИН–2007». — Ульяновск: УлГТУ, 2007. — Т. 3. — С. 85–90.

11. Ерохов И.В. Новый подход к созданию топологического метода анализа электрических цепей // Тр. международной конф. по логике, информатике, науковедению».— Ульяновск: УлГТУ, 2007. — Т. 3.— С.76–84.

12. Ерохов И.В., Филаретов В.В. Теорема Зеляха-Теллегена // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск: УлГТУ, 2008.— Вып. 6.— С. 6–14.

13. Ерохов И.В. Исследования начал теории электрических цепей.— Запорожье: КПУ, 2008.— 100 с.

14. Ерохов И.В. О приближенном моделировании сложных электрических схем // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ.сб. науч. тр.— Ульяновск: УлГТУ, 2008.— Вып. 6.— С.88–97.

15. Ерохов И.В., Арбузников В.А. Элизар Вольфович Зелях (21.04.1904–03.02.1991) // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ.сб.науч.тр.—Ульяновск:УлГТУ,2008.—Вып.6.—С.88–97.

16. Ерохов И.В. Уравнение разомкнутого пути электрической цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар. сб. науч. тр.—Ульяновск: УлГТУ, 2009.— Вып.7.— С. 87–93.

17. Исследование начал теории электрических цепей: монография / Ерохов И.В. // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар.сб.науч. тр.— Ульяновск: УлГТУ, 2009.— Вып. 7.— С. 329.

18. Ерохов И.В. Величко Юрий Теофанович // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.— Ульяновск: УлГТУ, 2010.— Вып.8.— С. 212.

19. Ерохов И.В., Филаретов В.В. Бернард Теллеген: Гиратор, нулор, теорема виртуального баланса // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.— Ульяновск:УлГТУ, 2010.— Вып. 8.— С. 212.

20. Ерохов И.В. Теоретико-множественное обоснование топологического метода, созданного Г.Кирхгофом // Синтез, анализ и

диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2011.– Вып. 9.– С. 236.

21. Ерохов И.В. Экономия слов – традиция научных статей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2011.– Вып. 9.– С. 236.

22. Ерохов И.В. Главная теорема общей теории цепей.– Запорожье: КПУ, 2011.– 89 с.

23. Ерохов И.В. Схема соединений есть граф электрической цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2012. – Вып. 10.– С. 280.

24. Ерохов И.В. Граф множества разомкнутых путей одна из форм схемы соединений // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С. 280.

25. Ерохов И.В. О теореме Зеляха // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2012. – Вып. 10.– С. 280.

26. Ерохов И.В. О системе уравнений Кирхгофа для электрической цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2013.– Вып. 11.– С. 69–79.

27. Ерохов И.В. Подробный анализ первой работы по теории электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2013.–Вып.11.–С. 273–290.

28. Ерохов И.В. Вычисление знака алгебраического дополнения элемента матрицы // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2015.–Вып.12.– С.189–193.

29. Ерохов И.В. Двойственность и дуальность электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2015.– Вып. 12.– С. 262–272.

30. Ерохов И.В. Простой способ получения фундаментальной контурной матрицы инциденций // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2015. – Вып. 12.– С. 284–294.

31. Ерохов И.В. Школа-семинар по теоретической электротехники и электронике // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2015.– Вып. 12.– С.316–320.
32. Ерохов И.В. Метод Гаусса и решение систем уравнений с помощью цепных дробей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016.– Вып. 13.– С. 224–232.
33. Ерохов И.В. К преобразованию n-звезды проводимостей в эквивалентный полный n-угольник // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016.– Вып.13.– С. 216–223.
34. Ерохов И.В. Критические замечания к работам Габриэля Крона // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016.– Вып. 13.– С. 202–210.
35. Ерохов И.В. Об операторах Кирхгофа, введенных Пенфилдом // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып. 14.– С. 6–13.
36. Ерохов И.В. Теорема взаимности в творчестве Г. Кирхгофа // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып.14.– С. 233–239.
37. Ерохов И.В. Первые законы теории электрических цепей: 190-я годовщина монографии Георга Ома // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2018.– Вып. 15.– С. 211–221.
38. Ерохов И.В. Уравнения, отражающие структуру электрической цепи: 170-я годовщина первого топологического метода // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2018.– Вып. 15.– С. 222–234.
39. Ерохов И.В. Создание схемы электрического баланса // In memoriam: Василий Андреевич Андреев / Сборник памяти Андреева В.А. – Ульяновск: УлГТУ, 2018.– С. 153–165.

В. В. Филаретов

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |  |    |
|---|--|----|
| <b><i>Анализ и преобразования электронных цепей</i></b>                             |  |    |
| Майко Г. В.,<br>Филаретов В. В.   | Патологические модели многовыходных активных элементов   | 4  |
| Горшков К. С.,<br>Курганов С. А.,<br>Филаретов В. В.                                | Формулы для диагностики электрических цепей на основе многократных суммарных алгебраических дополнений       | 16 |
| Шушпанов Д. В.,<br>Шомин А. Ю.  | Аналитическое решение линейной задачи дополнителности на примере нелинейной резистивной цепи                 | 25 |
| Курганов С. А.,<br>Прокофьев И.А.   | Расчет установившихся режимов электрических сетей на основе символьных формул                                | 47 |
| <b><i>Теория радиотехнических цепей</i></b>   |  |    |
| Соловьева Е. Б.,<br>Шеллер А. Д.  | Полином с памятью, как простая модель предкомпенсаторов для нелинейных каналов связи                         | 54 |
| Юрова Т. С.<br>Шубник А. А.,<br>Рябов Д. Р.,<br>Новокрещенов Д.                     | Передача электрического сигнала со скоростью выше скорости света   | 61 |
| Седов Д. Д.,<br>Сахно Д. И.,<br>Федорович Г. А.,<br>Гладков Р. А.,<br>Горшков К. С. | Моделирование мемрезистивной системы на платформе ARDUINO  | 70 |
| <b><i>Моделирование электромагнитных устройств</i></b>                              |  |    |
| Дубов А. Л.<br>Ульман А. А.   | Проблемы проведения технического обслуживания воздушных линий 6-10 кВ согласно действующему законодательству | 78 |
| Манин А. В.,<br>Юдин В. В.,<br>Юдин А. В.   | Критерии выбора предпочтительного варианта технического решения  | 86 |

|   |   |     |
|---|---|-----|
| Меньшов Е. Н.   | О свойствах калибровки Лоренца в теории электромагнитного поля                                  | 97  |
| Канов Л. Н.   | Схемное моделирование переходных процессов гребных электроэнергетических установок электроходов | 105 |
| Шкуропат И. А.  | Обоснование Т-образной схемы замещения трансформатора без стального магнитопровода              | 116 |
| <b><i>Матричный анализ</i></b>                          |   |     |
| Недорезов М. В.,<br>Филаретов В. В.                     | Минимальные формулы определителей полных матриц на основе их половинного деления                | 124 |
| Курганов Д. С.,<br>Тимофеев В. Ф.,<br>Филаретов В. В.   | Разложение символьных определителей полных матриц высокого порядка                              | 145 |
| Недорезов П. В.,<br>Филаретов В. В.                     | Оптимизация символьных определителей разреженных матриц   | 153 |
| <b><i>Структурный синтез</i></b>                        |   |     |
| Недорезов М. В.,<br>Недорезов П. В.,<br>Филаретов В. В. | Генерация неизоморфных корневых деревьев на основе композиций числа вершин                      | 164 |
| <b><i>Нейросети и робототехника</i></b>                 |   |     |
| Соловьева Е. Б.,<br>Зверев Г. Ю.                        | Математическая модель реакционно-диффузных клеточных нейронных сетей                            | 178 |
| <b><i>Из истории электротехники</i></b>                 |   |     |
| Панкин В. В.,<br>Соловьева Е. Б.                        | Первая электротехническая лаборатория в первом электротехническом вузе России                   | 184 |
| Ерохов И. В.  | Преобразования схемных определителей по Вильгельму Фойснеру                                     | 199 |
| <b><i>Наши юбиляры</i></b>                              |   |     |
| Филаретов В. В.   | Ерохов Игорь Васильевич   | 214 |

## TABLE OF CONTENTS

|  |   |    |
|--|---|----|
| <b><i>Analysis and transformations of electronic networks</i></b>                      |   |    |
| Mayko G. V.,<br>Filaretov V. V.  | Pathological models<br>of multi-output active elements  | 4  |
| Gorshkov K. S.,<br>Kurganov S. A.,<br>Filaretov V. V.                                  | Formulas for diagnostics of electrical circuits<br>based on multiple total algebraic additions                | 16 |
| Shushpanov D. V.,<br>Shomin A. Y.  | Analytical solution of the linear<br>complementarity problem<br>on the example of nonlinear resistive circuit | 25 |
| Kurganov S. A.,<br>Prokof'ev I. A.   | Calculation of steady-state modes of electric<br>networks based on symbolic formulas                          | 47 |
| <b><i>Theory of radio engineering circuits</i></b>                                     |   |    |
| Solovyeva E. B.,<br>Sheller A. D.  | Memory polynomial as a simple model<br>of precompensators for nonlinear<br>communication channels             | 54 |
| Yurova T. S.,<br>Subnick A. A.,<br>Ryabov D. R.,<br>Novokreshchenov D.                 | Transmitting an electrical signal<br>faster than the speed of light   | 61 |
| Sedov D. D.,<br>Sakhno D. I.,<br>Fedorovich G. A.,<br>Gladkov R. A.,<br>Gorshkov K. S. | Simulation of a memresistive system<br>on the ARDUINO platform  | 70 |
| <b><i>Modeling of electromagnetic devices</i></b>                                      |   |    |
| Dubov A. L.,<br>Ullman A. A.   | Problems of maintenance of overhead lines<br>of 6-10 kV by the current legislation                            | 78 |
| Manin A.V.,<br>Yudin V. V.,<br>Yudin A.V.  | Criteria for choosing<br>the preferred technical solution   | 86 |

|  |   |     |
|--|---|-----|
| Menshov E. N.  | On the properties of Lorentz calibration in electromagnetic field theory                              | 97  |
| Kanov L. N.  | Circuit modeling of transient processes of rowing electric power plants electric ships                | 105 |
| Shkuropat I. A.  | T-shape electrical equivalent circuits of the transformer without the magnet core                     | 116 |
| <b><i>Matrix analysis</i></b>                            |   |     |
| Nedorezov M. V.,<br>Filaretov V. V.                      | Minimum formulas of the determinants of the full matrixces on the basis of their half of the division | 124 |
| Kurganov D. C.,<br>Timofeev V. F.,<br>Filaretov V. V.    | The expansion of symbolic determinants of full matrices of high order                                 | 145 |
| Nedorezov P. V.,<br>Filaretov V. V.                      | Optimization of symbolic determinants of sparse matrices  | 153 |
| <b><i>Structural synthesis</i></b>                       |   |     |
| Nedorezov M. V.,<br>Nedorezov P. V.,<br>Filaretov V. V.  | Generation non-isomorphic root trees based on edge number compositions                                | 164 |
| <b><i>Neural networks and robotics</i></b>               |   |     |
| Solovyeva E. B.,<br>Zverev G. Yu.                        | Mathematical model of reaction-diffusion cellular neural networks                                     | 178 |
| <b><i>From the history of electrical engineering</i></b> |   |     |
| Pankin V. V.,<br>Solovyeva E. B.                         | First electrotechnical laboratory in the first electrotechnical University of Russia                  | 184 |
| Erochov I. V.  | Transformations of circuit determinants by Wilhelm Feusner  | 199 |
| <b><i>Our anniversaries</i></b>                          |   |     |
| Filaretov V. V.  | Erochov Igor Vasilievich  | 214 |

**Synthesis, analysis and diagnosis of electronic networks** : The international scientific transactions.– Issue 16 / under edition V.V. Filaretov. – Ulyanovsk: Ulyanovsk state technical university, 2020. – 224 p.

This collection of scientific works continues a series of specialized collections published in Ulyanovsk State Technical University during international conferences: «Continual algebraic logic calculus and neuralmathematics in science and technics», «Conference on logic, computer science, sociology of science» and «Volgin's Readings».

In this volume discusses the theoretical questions and practical application of the modern theory of electrical and electronic networks and modeling of electromagnetic devices. Including: matrix analysis, structural synthesis, synthesis of analog and digital filters, topological analysis, decomposition and transformation of electronic circuits presented nullor and mirror pathological elements, neural networks and robotics.

Recommended for specialists in the field of circuit theory, computer algebra, electronic circuitry analog and mixed discrete electronic circuits, undergraduates and graduate students of corresponding specialties.

Научное издание

**СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА  
ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

Международный сборник научных трудов  
Выпуск 16

Под редакцией В. В. Филаретова

Компьютерная верстка В. В. Филаретов

ЛР № 020640 от 22.10.97.

Подписано в печать 20.11.2020. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 15,11. Тираж 50 экз. Заказ 67.

Ульяновский государственный технический университет  
432027, Ульяновск, Северный Венец, 32.

ИПК «Венец» УлГТУ 432027, Ульяновск, Северный Венец, 32.