

На правах рукописи

ФИЛАРЕТОВ Владимир Валентинович

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ  
НА ОСНОВЕ СХЕМНОГО ПОДХОДА**

Специальность 05.09.05 - Теоретическая электротехника

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Москва, 2002

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном техническом университете на кафедре “Теоретические основы электротехники” и Ульяновском государственном техническом университете на кафедре “Электроснабжение”.

Научный консультант: доктор технических наук,  
профессор М.А.Шакиров.

Официальные оппоненты: доктор технических наук,  
профессор В.Г.Миронов;  
  
доктор технических наук,  
профессор А.В.Бондаренко;  
  
доктор технических наук,  
профессор Л.И.Волгин.

Ведущая организация: Научно-исследовательский электромеханический институт НПО “АНТЕЙ”

Защита состоится “ ..... 2002 г. в “ ..... час. на заседании диссертационного совета Д212.157.13 в Московском энергетическом институте (техническом университете) по адресу: 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14, ауд. 3-505.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МЭИ (ТУ).

Отзывы в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просьба направлять по адресу: 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14, Ученый совет МЭИ (ТУ).

Автореферат разослан “ ..... 2002 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.157.13  
к.т.н., доцент

М.К.Чобану

### Список условных сокращений

ДВ	двоичный вектор
ИНУН	источник напряжения, управляемый напряжением
ИНУТ	источник напряжения, управляемый током
ИТУН	источник тока, управляемый напряжением
ИТУТ	источник тока, управляемый током
НУИ	неудаляемый управляемый источник
ОУ	операционный усилитель
ПС	полная схема
ПУ	показатель участия
САД	суммарное алгебраическое дополнение
ССФ	символьная схемная функция
УИ	управляемый источник
ЭАС	элементарная активная схема

### ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Постоянный интерес к разработке проблемы формирования символьных схемных функций (ССФ) электрических цепей объясняется тем, что: 1) ССФ является аналитической моделью, позволяющей наглядно представить функционирование цепи, оценить уровни чувствительности и влияние допусков, эффективно выполнить параметрическую оптимизацию цепи; 2) установление связей между структурой схемы и ССФ лежит в основе структурного синтеза и получения новых схемотехнических решений; 3) ССФ обеспечивают более высокую точность моделирования по сравнению с использованием численных методов, что может быть использовано для эффективного решения плохообусловленных задач.

Широкое применение компьютерной техники и получение информации о режимах электрических цепей в виде массивов чисел “остро ставят проблему их физического осмысливания и оценки их достоверности” (Л.Р.Нейман и К.С.Демирчян, 1981). Одним из путей решения этой проблемы является разработка методов формирования ССФ, поскольку при использовании результатов анализа цепи в аналитическом виде достигается более глубокое понимание физической стороны происходящих в цепи процессов.

Максимальное использование возможностей аналитических методов рассматривается “в качестве предварительного условия для последующего перехода к численным расчетам”, что позволяет реализовать “преимущества компактности и полноты информации аналитических решений” (*К.С.Демирчян и П.А.Бутырин*, 1988). Немаловажно, что схемно-символьный подход к анализу пассивных электрических цепей имеет большое методическое значение (*П.А.Ионкин и В.Г.Миронов*, 1976).

Актуальность проблемы подтверждается также результатами анализа материалов международных симпозиумов по цепям и системам (ISCAS-88 -98, MWSCAS-87, -89, -91, -94, -96), конференций по теории цепей и проектированию (ECCTD-95, -97), семинаров по символьным методам и приложениям к схемотехническому проектированию (SMACD-91, -92, -94, -96, -98, -2000). Однако, до последнего времени не получили широкого распространения компьютерные программы формирования ССФ, а вывод соответствующих выражений нередко рассматривается как творческая задача. Это объясняется не только существенно более сложной реализацией таких программ по сравнению с программами численного анализа, но и несовершенством существующих методов символьного анализа.

Для формирования ССФ обычно используются такие промежуточные математические модели как матрицы, графы или теоретико-множественные объекты. Соответственно виду применяемого математического аппарата можно говорить о матричном, графовом или теоретико-множественном подходах. Названные подходы получили преимущественное развитие в теории электрических цепей. Это приводило к отрыву от наглядного образа схемных моделей. Между тем существует подход, в котором “схемные преобразования являются первичными, а алгебраические процедуры - вторичными” (*М.А.Шакиров*, 1980, 1984); разработаны методы топологического синтеза электрических цепей без использования промежуточных математических моделей (*Л.И.Волгин*, 1982, 2000).

Промежуточные математические модели требуют затрат на их построение и ограничивают допустимый набор схемных элементов (*А.В.Бондаренко*, 1981). Избыточность таких моделей обуславливает появление в выражениях числителя и знаменателя ССФ большого числа скрытых дубликаций, то есть равных по величине, но противоположных по знаку подобных членов, подлежащих взаимному уничтожению. В случае сохранения дубликаций избыточные операции вычитания затрудняют восприятие ССФ, увеличивают погрешность при вычислениях на их основе, а также затрудняют или делают невозможным переход к приближенным выражениям ССФ (*F.V.Fernandez & A.Rodriguez-Vazquez*, 1994). Не менее важной является задача минимизации

вычислительной сложности выражений ССФ, поставленная *Фойснером* (1902), которая до сих пор не имеет оптимального решения.

Для эффективного формирования выражений ССФ, оптимальных по вычислительной сложности и устойчивости, предлагается схемный подход, в котором рабочей моделью является непосредственно схема замещения цепи, а формирование ССФ сводится к рассмотрению схем, производных от исходной схемы [31].

Цель работы - развитие методологии символьно-топологического анализа линейных стационарных электрических цепей с сосредоточенными параметрами на основе схемного подхода.

Поставленная цель достигается разработкой:

- топологических методов получения выражений ССФ, наиболее удобных по форме представления для многовариантного моделирования, аналитических исследований и точных вычислений;

- эффективных обобщений символьно-топологических методов анализа на случай схем со всеми типами управляемых источников (УИ);

- топологических методов анализа схем делением их на части, позволяющих уменьшить сложность формируемых выражений ССФ, а также преодолеть существующие ограничения относительно выбора подсхем и состава элементов;

- универсальных алгоритмов формирования оптимальных выражений ССФ, предназначенных для символьного анализа схемы как вручную, так и с помощью компьютера, которые облегчают внедрение символьного моделирования в инженерную практику и учебный процесс.

Методы исследования. В работе использовались: теория линейных электрических цепей, элементы теории матриц, графов, множеств, алгоритмов, комбинаторного анализа и математической логики.

Научная новизна основных результатов работы:

1. Введены понятия неудаляемого управляемого источника (НУИ) и минора определителя схемы, который образуется в результате подсоединения НУИ к исходной схеме. Сформулированы выражения ССФ через схемные миноры числителя и знаменателя, инвариантные к типу элементов схемы и выбору координатного базиса. Выражения миноров схемы в отличие от миноров матрицы можно сформировать без дубликаций, применив топологический метод выделения параметров.

2. Разработан топологический метод выделения параметров УИ, не требующий трудоемкого перечисления контуров и цепей контуров передачи. Показано, что выделением параметров пассивных элементов и УИ можно свести разложение определителя произвольной линейной схемы к нахождению определителей элементарных активных схем (ЭАС), содержащих

исключительно НУИ. Доказано, что знак определителя ЭАС схемы равен знаку полного дерева графа тока-напряжения, в котором генераторы тока (приемники напряжения) соответствуют генераторам НУИ (приемникам НУИ) ЭАС.

3. Разработан топологический метод стягивания и удаления ветвей, обобщающий метод Фойснера для выделения параметров пассивных элементов, который позволяет уменьшить количество производных схем, подлежащих рассмотрению. Эффективность метода обусловлена также тем, что знак параметра УИ учитывается не в ориентации соответствующего НУИ, а непосредственно перед выделяемым параметром, что позволяет минимизировать число операций вычитания в выражениях ССФ.

4. Предложен комплекс эквивалентных схемных упрощений и преобразований, дополняющий методы выделения параметров, который позволяет избежать избыточных выкладок при разложении схемных определителей и уменьшить сложность формируемых выражений ССФ. Рассмотрены следствия расположения элементов схемы: 1) в контурах из генераторов напряжения и генераторов НУИ или приемников тока и приемников НУИ; 2) в сечениях из генераторов тока и генераторов НУИ или приемников напряжения и приемников НУИ.

5. Сформулированы правила выбора элементов и подсхем, первоочередное выделение которых обеспечивает получение выражений ССФ, оптимальных по вычислительной сложности и количеству операций вычитания, на основе схемной модели электрической цепи и производных от нее схем. При этом исключаются как формирование развернутого выражения ССФ, так и последующая его свертка. Правила использованы для получения оптимальных выражений определителей схем с лестничной, цепной и полной структурами. Предложена методика вывода рекуррентных соотношений для числа операций умножения и сложения в выражениях схемных определителей.

6. Разработаны диакоптические методы схемных миноров, основанные на рекурсивном делении схемы и иерархическом объединении подсхем. Методы свободны от ограничений на состав учитываемых линейных элементов и число внешних узлов подсхем. Представление подсхем их минорами дает возможность избежать появления дубликаций в сомножителях диакоптических формул и многократно уменьшить в них число слагаемых.

7. Создана методология символично-топологического анализа для класса полных схем, параметры которых удовлетворяют условиям равновесия *Ч. Уитстона* - *А.П.Новикова*. В основе методологии лежит исследование произвольно выбранной подсхемы, покрывающей все узлы полной уравновешенной схемы и не содержащей контуров с четным количеством ветвей. Предложенные выражения ССФ лишены избыточности, обусловленной

зависимостью параметров, и используют минимальное количество операций извлечения квадратного корня.

#### Практическая значимость основных результатов работы:

1. Практичность методологии как аппарата для теоретических исследований вытекает из возможности получать новые результаты в теории линейных электрических цепей, базируясь непосредственно на их схемных моделях и способствуя более глубокому постижению связей между структурой схемы и ее ССФ. Схемное решение является топологическим, опирается на наглядные и наполненные физическим смыслом понятия: удаление, стягивание, нейтрализация (соответственно при холостом ходе, коротком замыкании, равенстве нулю параметра элемента), вырождение схемы (в случае возникновения бесконечно больших или неопределенных токов или напряжений). При этом анализ исходной схемы сводится к анализу более простых схем, уменьшается объем выкладок, исключается избыточность формируемых ССФ, упрощается учет всех типов УИ.

2. Практичность методологии как инструмента для исследования схем на компьютере вытекает из следующих ее особенностей: 1) рабочей информацией об исходной схеме и производных от нее схемах является список элементов с указанием узлов подключения; 2) формируемые оптимальные выражения числителей и знаменателей ССФ не содержат операций деления, а число вычитаний минимизируется в процессе формирования ССФ, что делает эффективными и точными многовариантный анализ и оптимизацию электрических цепей в сотни узлов и элементов на современных персональных компьютерах; 3) разработанные программы служат безбумажным учебным пособием и интеллектуальным справочником, расширяющим возможности по проектированию аналоговых электро- и радиочепей.

Реализация результатов работы. Теоретические результаты диссертационной работы составили ядро читаемого на кафедре “Электроснабжение” УлГТУ альтернативного курса ТОЭ для направления 5529 “Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств”. Методика формирования ССФ через схемные определители внедрена в учебный процесс и научные исследования *Московского технического университета связи и информатики, Вологодского и Хабаровского государственных технических университетов и Чувашского государственного университета.*

Результаты диссертации, реализованные в пакете программ **SYMBOL** для формирования ССФ электрических цепей и решения систем линейных алгебраических уравнений в аналитическом виде, внедрены в *Национальном техническом университете Украины, Санкт-Петербургском государственном техническом университете (СПбГТУ), Санкт-Петербургском*

государственном электротехническом университете, Ульяновском отделении Института радиотехники и электроники РАН; используются на протяжении ряда лет в Научно-исследовательском электромеханическом институте НПО “АНТЕЙ” (Москва) и Жешувском технологическом университете (Польша). Ранние версии пакета **SYMBOL** были внедрены в 10 учреждениях и предприятиях [14], в том числе в Институте кибернетики АН Эстонии в составе программного обеспечения “Персональная рабочая станция инженера-разработчика аналоговых и аналого-цифровых устройств и средств автоматики (ПРС-1)” (Постановление СМ СССР № 675-155 от 16.06.87, задание 1.2.9.). В настоящее время пакет **SYMBOL** свободно распространяется через Интернет-сайт <http://astrometric.sai.msu.ru/~symbol/> (Москва).

Апробация работы. Теоретические положения и практические результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных конференциях: “Automation, simulation and measurement” (Таллин, 1991); “Проблемы автоматизированного моделирования в электронике” (Киев, 1992-1994); “Проблемы физической и биомедицинской электроники” (Киев, 1995-1997); “Методы и средства преобразования и обработки аналоговой информации” (Ульяновск, 1999), “Континуальные логико-алгебраические исчисления и нейроматематика в науке, технике и экономике” (Ульяновск, 2001), а также на научных семинарах кафедр ТОЭ МЭИ (ТУ) и СПбГТУ (Москва и Санкт-Петербург, 1997).

Публикации. Результаты исследований по теме диссертации опубликованы в 35 работах, опубликованных без соавторов. Статья [18] признана лучшей публикацией журнала “Электричество” за 1992 год по разделу “Теоретическая электротехника” и отмечена премией издательства “Pergamon Press” [20, с. 79].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения и списка использованных источников, содержащего 173 наименования. Текстовая часть изложена на 265 страницах (иллюстраций 61, таблиц 16). В приложении на 11 страницах размещаются документы, подтверждающие внедрение результатов диссертационной работы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дана общая характеристика работы.

**Первый раздел** “Состояние и проблемы развития схемного подхода к символьному анализу электрических цепей” посвящен основным вехам эволюции идей и сравнению прямых или схемных методов с методами, использующими промежуточные отображения схем матрицами и графами.



Выбор метода формирования ССФ. Возможные подходы к формированию ССФ сведены в табл. 1.

Таблица 1

Тип подхода	Путь получения ССФ
1. Матричный	Схема – матрица – ССФ
2. Графовый	Схема – матрица – граф – ССФ или схема – граф – ССФ
3. Теоретико-множественный	Схема – матрица – структурное (обобщенное) число – ССФ
4. Схемный	Схема – ССФ

В основу сравнения методов формирования ССФ положено три основных требования: 1) универсальность; 2) вычислительная устойчивость; 3) пригодность для анализа сложных схем по частям. Универсальный метод применим к широкому классу линейных схем как в качестве инженерной методики, так и в виде компьютерной программы. Такой метод должен обеспечивать получение как единых, так и последовательных формул ССФ [28], быть удобным для формирования не только символьных, но и символьно-численных выражений ССФ [8,11].

Требование устойчивости касается свойств выражений ССФ при проведении численных расчетов в случае плохой обусловленности, то есть существенного разброса значений параметров и других численных вырождений, что характерно для моделей электрических цепей. В этом требовании должна предусматриваться возможность формирования выражений ССФ, оптимальных по сложности, а также по числу операций деления и вычитания, которые являются основным источником погрешности при вычислениях с ограниченным числом значащих цифр.

Недостатки матричного, графового и теоретико-множественного подходов. Как следует из табл. 1, всякого рода искусственные построения, будь-то матрица схемы, ее граф или структурное число, в определенной степени препятствуют выявлению физической сущности поведения исследуемой схемы, затрудняя получение ССФ. Избыточность матричного подхода заключается в том, что параметр элемента схемы может учитываться в матрице схемы более одного раза [28]. Модели схем в виде графов позволяют сделать переход к ССФ более простым и обусловленным структурой графа схемы [6,10,13,17,20]. Однако все известные виды графов в случае отображения схемы с УИ оказываются неизоморфными ей.

При использовании ненаправленного графа пассивной подсхемы отсутствует избыточность представления пассивных элементов [2-5]. Однако отображение на графе активных элементов с помощью сигнальных [13],

унисторных [20] дуг или их сочетания [10,17] неизбежно приводит к избыточным ССФ. Подобно матричным моделям, существенным недостатком графовых моделей схем является ограниченный набор допустимых типов пассивных элементов и УИ или существенное снижение эффективности в результате расширения этого набора [18,20]. Элементы матрицы схемы, равные нулю, не отображаются на графе схемы, что важно для электрических цепей, которым присуща разреженность структуры [4,28]. Теоретико-множественный подход также учитывает это свойство электрических цепей, но посредством списочного хранения ненулевых элементов, которое наследует избыточность матричных моделей.

Искать альтернативу матричному аппарату побуждает и то, что он не в полной мере учитывает свойства электрических цепей, например по знаку определителя матрицы, в отличие от знака схемного определителя (*S.Hoang*, 1985), нельзя судить об устойчивости частотно-независимых цепей (*Хейнлейн* и *Холмс*, 1980). Таким образом, имеются серьезные основания для того, чтобы, опираясь на классические результаты, сосредоточить усилия на развитии схемного подхода.

Зарождение схемного подхода. В 1847 г., спустя два года после опубликования своих законов, *Г.Р.Кирхгоф* попытался сделать процесс получения решения более наглядным. Его метод анализа z-схем без управляющих связей использует непосредственно схему замещения цепи и не требует предварительного составления ее уравнений. Дуальный результат для u-схем опубликовал *Д.К.Максвелл* (1873). В его работе вводится отношение (впоследствии названное схемной функцией и ССФ)

$$H = \Delta N / \Delta D, \quad (1)$$

где  $\Delta N$  и  $\Delta D$  - соответственно числитель и знаменатель ССФ, в которых параметры всех элементов схемы представлены символами.

*В.Фойснер* в 1902 г. обратил внимание на трудности построения ССФ с помощью топологических формул *Кирхгофа* и *Максвелла* [19,23]. Нахождение ССФ по *Фойснеру* предусматривает разложение определителей исходной схемы и производных от нее схем. Схемный определитель раскрывается по формулам

$$\Delta = y\Delta_y + \Delta^y \quad (2)$$

или

$$\Delta = z\Delta^z + \Delta_z, \quad (3)$$

где нижний индекс при символе  $\Delta$  указывает на стягивание y- или z-ветви, а верхний - на их удаление. При делении схемы на две подсхемы

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \quad (4)$$

и

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2(a,b) + \Delta_1(a,b) \Delta_2, \quad (5)$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  - определители первой и второй подсхем. Обозначение в скобках после  $\Delta$  указывает на объединение внешних узлов  $a$  и  $b$  в соответствующих подсхемах. Подсхемы могут иметь один общий узел (формула (4)) или два общих узла  $a$  и  $b$  (формула (5)). Рекурсивное применение формул (2) - (5) позволяет представить определитель схемы  $\Delta D$  сразу в окончательной форме, то есть в компактном виде с вынесенными за скобки общими множителями.

Для получения  $\Delta N$  находится множество  $\rho$  контуров передачи схемы, которые обязательно содержат независимый источник и ветвь с искомым откликом, то есть

$$\Delta N = \sum_{i \in \rho} P_i \Delta_i \quad (6)$$

где  $P_i$  - произведение проводимостей, входящих в  $i$ -й контур передачи, взятое с соответствующим знаком;  $\Delta_i$  - определитель схемы при стягивании всех ветвей  $i$ -го контура.

Метод полных деревьев (C.L.Coates, 1958). Первоначально этот метод был разработан для у-схем с источниками тока, управляемыми напряжением (ИТУН), а впоследствии обобщен на схемы с другими типами УИ (А.М.Иваницкий и А.А.Игошин, 1984). Расчетной моделью метода является вспомогательная схема, полученная заменой всех пассивных элементов схемы, заданных проводимостями, вырожденными ИТУН, у которых генератор и приемник параллельны. Полным деревом схемы Коутса, соответствующим слагаемому определителя, называется связная подсхема, покрывающая все узлы. Содержащиеся в этой подсхеме генераторы ИТУН образуют дерево, а в дополнение этого дерева обязательно входят приемники одноименных ИТУН, и наоборот.

Матрично-топологический метод выделения параметров. Советский исследователь Ю.П.Галямичев (1958) первым получил схемное решение задачи формирования ССФ, предусматривающее использование непосредственно у-схемы. Вначале определитель активной схемы освобождается от элементов, вносящих в него несимметричность, то есть от ИТУН, а затем выражается через деревья пассивных схем, производных от пассивной подсхемы исходной схемы. В основе этого метода лежит связь между минорами матрицы узловых проводимостей схемы и ее  $k$ -деревьями [12]. Коэффициенты при произведениях параметров ИТУН выражаются через сумму  $k$ -деревьев соответствующего вида. Различным вариантам этого метода посвящены работы зарубежных авторов (J.T.Barrows, 1966; H.Wozniacki, 1967; S.Hoang, 1974; P.M.Lin, 1991).

Дать строгое обоснование и развитие методу позволила теорема об определителе суммы двух матриц (В.П.Сигорский, 1958), что было сделано в

работах Ю.М.Калниболотского (1967), В.И.Анисимова и Н.Г.Козьмина (1973). Были предложены рекурсивный (Р.М.Лин, 1970) и теоретико-множественный (Я.К.Трохименко, 1972) варианты этого метода. Например, в случае выделения параметра одного из ИТУН схемы используется формула

$$\Delta = (-1)^{a+c} s \Delta_{(a+b)(c+d)} + \Delta(s=0), \quad (7)$$

где  $s$  - параметр выделяемого ИТУН;  $a, b, c, d$  - соответственно номера узлов подключения его генератора и приемника;  $\Delta_{(a+b)(c+d)}$  - суммарное алгебраическое дополнение (САД), образованное в результате следующих преобразований над матрицей проводимостей исходной схемы: 1) поэлементное прибавление строки  $a$  к строке  $b$ , а столбца  $c$  к столбцу  $d$ ; 2) удаление строки  $a$  и столбца  $c$ ;  $\Delta(s=0)$  - определитель матрицы схемы при  $s=0$ , то есть нейтрализации ИТУН.

Методы схемных преобразований. К числу наиболее разработанных методов относятся методы схемоанализа (М.А.Шакиров, 1980, 1992), буквенно-полиномиальной (Р.В.Дмитришин, 1985, 1997) и схемной редукции (Э.А.Лаксберг, 1990). Эти методы используют единственную схему замещения, которая упрощается в результате последовательности эквивалентных преобразований до получения искомого решения. В основе схемоанализа лежат понятия обобщенно-последовательного или обобщенно-параллельного соединения элементов схемы и их упрощения путем переноса ветвей через узлы, сечения или вдоль контуров. Методы редукции предусматривают последовательное упрощение схемы путем исключения узлов или контуров. Раздельное нахождение числителя и знаменателя ССФ (в виде единого выражения) обеспечивается при использовании методов матрицы алгебраических дополнений (С.Б.Тарабаров, 1983) и модификаций (Я.К.Трохименко, А.И.Рыбин, 1991), которые можно рассматривать как развитие классических методов схемоанализа.

Методы схемных преобразований предусматривают непрерывное изменение как структуры схемы, так и значений параметров ее элементов. При этом в процессе упрощения исходной схемы обязательно появляются новые управляющие связи. В случае использования метода выделения параметров производные схемы всегда оказываются проще породивших их схем, а параметры всех элементов остаются без изменения.

Анализ сложных схем делением их на части - диакоптика. В отличие от методов полных деревьев и выделения параметров методы схемных преобразований легко обобщаются для анализа подсхем и их иерархического объединения до получения параметров исходной схемы (М.А.Шакиров, 1980; Р.В.Дмитришин, 1997). Однако к числу наиболее исследованных диакоптических методов символьного анализа относятся методы, использующие представление схемы унисторным графом. Первый метод

предусматривает деление графа на части по дугам (Я.Н.Матвийчук, 1973). Во втором, более общем, методе (Н.И.Ястребов, 1985) - методе  $D$ -деревьев (Р.В.Дмитришин, 1974) используется деление по узлам. Метод  $D$ -деревьев был реализован в наиболее эффективных программах (Ю.П.Шаповалов, 1978, 1983; Н.И.Ястребов, 1978, 1985; J.A.Starzyk & E.Sliwa, 1984).

Для оценки вычислительной сложности диакоптических формул важно знать, как зависит число  $m$   $D$ -деревьев подсхемы от числа ее внешних узлов, включая базисный узел  $n+1$ . Соответствующие значения приведены в первой и второй строках табл. 2.

Таблица 2

$n+1$	3	4	5	6	7	8	9	10
$m$	6	23	104	537	3100	19693	136064	1013345
1	6	20	70	252	924	3432	12870	48620

Возможности современных персональных компьютеров таковы, что максимальное количество внешних узлов подсхемы для метода  $D$ -деревьев не может превышать семи (Р.В.Дмитришин, 1998). Достоинством метода  $D$ -деревьев является то, что знаки перед слагаемыми диакоптических формул всегда положительные. Однако наличие в унисторных графах активных схем дуг одного веса, но с разными знаками, приводит к образованию дубликаций как на уровне построения  $D$ -деревьев подсхем, так и на уровне их объединения. Кроме того,  $D$ -дерево графа одной подсхемы оказывается в общем случае совместным с несколькими  $D$ -деревьями графа другой подсхемы. Это приводит к значительному увеличению числа слагаемых в диакоптической формуле по сравнению с числом  $D$ -деревьев подсхем.

Пути совершенствования методов формирования ССФ. С точки зрения точности вычислений на основе ССФ целесообразно полностью исключить операции деления в числителе и знаменателе ССФ. Среди методов, не использующих операции деления, требованию универсальности удовлетворяет в наибольшей степени метод выделения параметров, который позволяет представить определитель схемы в компактном и желаемом виде. Однако до сих пор не выяснено, каким образом и в каком порядке следует выделять параметры элементов схемы и подсхем, не установлены общие правила для формирования оптимальных по сложности выражений ССФ, не ставился вопрос, как обеспечить минимизацию операций вычитания в выражениях ССФ.

Формулу (7) нельзя считать прямым обобщением формулы (2) (Р.М.Лин, 1991) по двум причинам: 1) схема по сравнению с матрицей является топологическим объектом; 2) в формуле (7) не используется схемное отображение САД. Чтобы избежать излишних выкладок и сократить вычислительную сложность формируемых выражений ССФ, необходимо

выполнять разложение схемных определителей без трудоемкого перечисления контуров передачи (см. формулу (6)). Таким образом, развитие схемного подхода Фойснера следует начинать с того, чтобы: 1) отказаться от использования формулы (6) и ее обобщений (*J.T.Barrows*, 1966; *S.Hoang*, 1974); 2) дать схемную интерпретацию числителя ССФ; 3) найти схемное отображение САД.

**Во втором разделе** “Формирование оптимальных выражений ССФ для пассивных электрических цепей” разработаны начала методологии символично-топологического анализа пассивных электрических цепей без взаимных связей.

Понятие НУИ и схемные уравнения ССФ [32,33]. Для одновременного нахождения числителя и знаменателя ССФ можно использовать схему упорядочения, которая получается из исходной схемы в результате преобразования независимого источника воздействия во вспомогательный УИ, приемником которого является искомый отклик (*P.M.Lin*, 1970). Вместо того, чтобы находить определитель схемы упорядочения рассмотрим схему, в которой вспомогательному УИ придан статус НУИ. Неудалемым назван УИ, если наложен запрет на его нейтрализацию. Очевидно, полученная схема является схемным отображением числителя ССФ. Параметру НУИ можно формально присвоить значение, равное единице, поскольку сортировка слагаемых по признаку наличия в них параметра вспомогательного УИ не потребуется. Генератор НУИ изображается двумя спаренными стрелками-треугольниками, а приемник НУИ - одной такой стрелкой. Ориентация генератора НУИ (приемника НУИ) противоположна (соответствует) ориентации генератора (приемника) породившего НУИ вспомогательного УИ.

Введение нового схемного элемента - НУИ позволяет наглядно представить правила нахождения ССФ в виде схемно-алгебраических выражений, как показано в табл. 3. Здесь  $E$  и  $J$  обозначают соответственно параметры независимых (измерительных) источников напряжения и тока, а  $U$  и  $I$  - искомые отклики напряжения и тока.

Таблица 3

Передаточные ССФ	Входные ССФ
$\frac{I}{E} = \frac{\text{[Circuit 1]}}{\text{[Circuit 2]}}$	$\frac{I}{E} = \frac{\text{[Circuit 3]}}{\text{[Circuit 4]}}$
$\frac{U}{J} = \frac{\text{[Circuit 5]}}{\text{[Circuit 6]}}$	$\frac{U}{J} = \frac{\text{[Circuit 7]}}{\text{[Circuit 8]}}$
$\frac{U}{E} = \frac{\text{[Circuit 9]}}{\text{[Circuit 10]}}$	$\frac{I}{E} = \frac{\text{[Circuit 11]}}{\text{[Circuit 12]}}$
$\frac{I}{J} = \frac{\text{[Circuit 13]}}{\text{[Circuit 14]}}$	$\frac{U}{J} = \frac{\text{[Circuit 15]}}{\text{[Circuit 16]}}$

Схемно-алгебраические выражения ССФ в сочетании с формулами (2) - (5) предоставляют эффективный аппарат для символьного анализа пассивных электрических цепей. При этом разложение схемных определителей следует выполнять таким образом, чтобы в первую очередь выделялись параметры пассивных ветвей по формулам (2) и (3), а генератор и приемник НУИ относились бы к одной и той же подсхеме в случае использования формул (4) и (5). Простейшие схемы, к которым приводит разложение схем числителей ССФ, изображены на рис. 1.

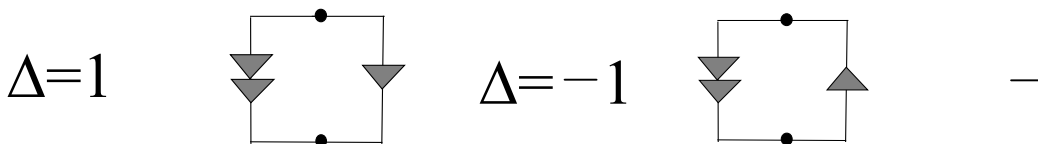


Рис. 1

Оптимальное выделение параметров [2,7]. Возможны два пути получения оптимальных выражений схемных определителей: 1) посредством свертки развернутого выражения (M.A.Breuer, 1969); 2) на основе оптимального

выделения параметров схемы. Чтобы выполнять символьный анализ схем в десятки-сотни узлов и элементов необходимо формировать оптимальные выражения ССФ непосредственно, минуя как получение развернутого выражения, так и последующую его свертку [22].

Для формирования оптимальных выражений схемных определителей использовано взаимно однозначное соответствие между преобразованиями алгебраического выражения и изменениями в структуре рассматриваемой схемы. Изоморфное соответствие вытекает из формул (2) - (5). В отличие от показателя участия параметра [7] показатель участия (ПУ) ветви [4] получается в результате стягивания этой ветви и нахождения числа деревьев образованной схемы, то есть без трудоемкого просмотра выражения. Таким образом удается исключить формирование развернутого выражения определителя и иметь дело лишь с изображениями исходной схемы и производных от нее схем. Эффективное выделение подвыражений оказывается возможным вследствие того, что произвольному подвыражению может быть сопоставлена некоторая схема.

При формировании оптимальных выражений ССФ необходимы правила выбора мультиветвей (параллельно соединенных у-ветвей) и других подсхем, параметры которых подлежат выделению в первую очередь. Учитывая аналогию с алгоритмом свертки [7], среди мультиветвей схемы выбирается та, которая имеет наибольший ПУ. Чтобы избежать использования процедуры вычисления количества деревьев, предложено правило выбора таких мультиветвей.

Правило “минимума” [24]. В схеме рассматриваются узлы и сечения, которым инцидентно минимальное количество мультиветвей. Принимается, что наибольшим ПУ обладает та из них, которая смежна наименьшему числу мультиветвей.

Правила ПУ и кратности [24]. Первое правило заключается в первоочередном выделении мультиветвей, имеющих наибольшие ПУ. Правило кратности требует, чтобы среди претендентов на выделение выделялась в первую очередь та мультиветвь, которая имеет наибольшую кратность, то есть количество образующих ее ветвей.

Анализ полных схем (ПС) [1-5,9,21,24]. Для подтверждения достоверности установленных правил использована ПС, которая рассматривалась *Фойснером* (1902) как наиболее общая модель пассивной электрической цепи и традиционно является объектом исследования. ПС с  $q$  узлами содержит  $q(q-1)/2$  ветвей (между каждой парой узлов имеется единственная ветвь). В качестве базы для сравнения использовалась формула определителя ПС, полученная на основе разложения по ветвям, входящим в пути между парами узлов [9]. Эта формула имеет наименьшую сложность среди известных формул, но в ней не



учитываются правила ПУ и кратности. Формула определителя ПС, полученная с помощью оптимального выделения мультиветвей, требует значительно меньше операций сложения, чем базовая формула. Так, выигрыш в числе сложений увеличивается с одной операции при  $q=4$  до 2095427 операций при  $q=10$ . Показатели оптимизированной формулы сведены во второй и третий столбцы табл. 4.

Таблица 4

q	Мультиветви		Подсхемы с 3 узлами		Без свертки	
	Число “*“	Число “+”	Число “*“	Число “+”	Число “*“	Число “+”
4	9	12	8	11	32	15
5	40	62	29	50	375	124
6	205	340	122	237	5184	1295
7	1236	2102	617	1259	84035	16806
8	8659	14840	3710	7698	1572864	262143
9	69280	118974	25979	54165	33480783	4782968
10	623529	1071276	207842	433863	800000000	99999999

В производных схемах ПС могут быть выделены последовательно соединенные ветви и мультиветви, а также трехузловые подсхемы. Первоочередное выделение последовательно соединенных ветвей (мультиветвей) при совместном использовании формул (2) и (5) с учетом правил ПУ и кратности позволяет получить формулу, которая требует существенно меньше операций. Дальнейшая оптимизация формулы определителя ПС достигается выделением трехузловых подсхем по мере их образования в производных схемах

$$\Delta = \sum_{i=1}^{q-3} y_i \Delta_i^{12\dots i-1} + (y_{q-2} + y_{q-1}) \Delta_{q-1}^{12\dots q-2,t} + [y_{q-2} (y_{q-1} + y_t) + y_{q-1} y_t] \Delta_{q-2,q-1}^{12\dots q-3} \quad (8)$$

где  $i$  - порядковые номера ветвей, инцидентных некоторому узлу ПС,  $y_t$  - ветвь, дополняющая ветви  $y_{q-2}$  и  $y_{q-1}$  до треугольника [1].

Правило половинного деления [24]. Исследование формулы (8) показывает, что, наряду с правилами ПУ и кратности, необходимо учитывать третье правило, которое называется правилом половинного деления. Оно означает, что получение оптимального выражения достигается выделением по возможности более сложных подсхем и минимизацией разности между количествами ветвей в выбранных подсхемах.

Вычислительная сложность формулы (8) характеризуется данными четвертого и пятого столбцов в табл. 4. Так, оптимальное выражение определителя полной пятиузловой у-схемы требует соответственно 29 и 50 операций умножения и сложения. В то же время выражение определителя полной матрицы узловых проводимостей четвертого порядка, полученное с

помощью пакета MATHEMATICA-3, содержит 77 умножений и 110 сложений (это лучший результат среди аналогичных программных систем). Для сравнения в шестом и седьмом столбцах табл.4 помещены количества операций в соответствующих развернутых выражениях схемных определителей.

Анализ лестничных и цепных схем [21,24]. Лестничной называется схема, образованная  $n$  звеньями, которая содержит  $2(n+1)$  узлов и  $3n+1$  ветвей. Более заполненную структуру имеет цепная схема с  $n$  звеньями, содержащая  $n+2$  узлов и  $2n+1$  ветвей. Рекурсивное деление названных схем можно выполнить двумя способами, Традиционный способ состоит в применении наращивания, то есть исходная схема на первом уровне иерархии делится на две подсхемы, которые несопоставимы по сложности. Со второй подсхемой поступают так, как с исходной схемой и т.д. до получения на последнем уровне иерархии двух подсхем минимальной размерности. Предложенный способ учитывает правило половинного деления.

При формировании определителей лестничных и цепных схем использовались формулы (2), (4) и (5) с учетом правил ПУ и кратности. Результаты расчетов для числа операций умножения сведены в табл. 5. Как видно, число операций умножения в оптимальных выражениях определителей лестничных и цепных схем увеличивается пропорционально увеличению количества звеньев  $n$ . Это опровергает утверждения о невозможности получения единых выражений для ССФ сложных электрических цепей (P.M.Lin & M.M.Hassoun, 1991,1995). Формирование оптимальных выражений для определителей произвольных пассивных у-схем было впервые реализовано **Д.В.Шеиным** в программе *GRAF* [24], что подтвердило теоретические оценки сложности (см. табл. 4 и 5).

Таблица 5

Число звеньев	Лестничные схемы			Цепные схемы	
	Первое звено	Среднее звено ( $v$ )	Среднее звено ( $z$ )	Первое звено	Среднее звено
1	4	4	0	2	2
2	12	12	2	5	5
3	28	20	6	9	9
4	60	36	9	15	14
5	124	52	18	23	20
6	252	68	23	35	27
7	508	84	32	51	35
8	1020	116	36	75	44
9	2044	148	56	107	54

Оптимальные z- и uz-выражения ССФ [21,24]. Для лестничной схемы число узлов более чем в два раза превышает число независимых контуров. Поэтому в качестве параметров ветвей такой схемы целесообразно использовать сопротивления. Учитывая дуальность формул (2) и (3), для формирования оптимальных z- и uz-выражений схемных определителей введено понятие макроветви, параметром которой является сумма сопротивлений образующих ее последовательно соединенных z-ветвей. Оптимальное z-выражение получается на основе формул (3) - (5) с учетом правил ПУ, кратности и половинного деления. В силу дуальности формул (2) и (3) правило “минимума”, используемое при выборе мультиветвей, модифицируется в правило “максимума” для выбора макроветвей, то есть среди макроветвей, инцидентных узлу или сечению с максимальным числом мультиветвей и макроветвей, выбирается та, которой смежно наибольшее их количество. Результаты расчетов для числа операций умножения приведены в четвертом столбце табл. 5.

В случаях, когда количества независимых узлов и контуров схемы отличаются незначительно, смешанное представление параметров ветвей открывает возможности для получения uz-выражений ССФ, имеющих различную сложность и способных конкурировать по вычислительным свойствам с y- и z-выражениями. Для этого совместно используются формулы (2) - (5) и правила оптимального выделения параметров.

Задание параметров емкостей (индуктивностей) в виде емкостных проводимостей (индуктивных сопротивлений) позволяет избежать операций деления при получении ССФ в операторной форме. При надлежащем задании параметров ветвей всегда могут быть получены оптимальные безразмерные uz-выражения для передаточных ССФ. Такие выражения потенциально более устойчивы при численных расчетах (Ю.В.Тимкин, 1985). При этом также снижаются требования к диапазону представления чисел. Из правила ПУ и формул (2), (3) следует, что уменьшение сложности схемного определителя достигается заданием проводимостями (сопротивлениями) ветвей с меньшими (большими) ПУ. Алгоритм формирования оптимальных y-, z- и uz-выражений ССФ реализован автором в программе **CIRSYM** пакета **SYMBOL**.

Говорить о получении оптимальных z- и uz-выражений обычно имеет смысл только в случае анализа схем, имеющих разреженную структуру. Для схем, близких к ПС, необходимо использовать y-выражения ССФ. Данные табл. 4 являются предельными оценками сложности таких выражений. Вместе с тем существует специальный класс ПС, параметры которых удовлетворяют условиям равновесия Уитстона (1844) и А.П.Новикова (1946). Это полные

уравновешенные схемы, находящие применение в электротехнике и измерительной технике.

Анализ полных уравновешенных схем [25,27,29,30]. Задача формирования оптимальных выражений ССФ для таких схем имеет весьма простое решение с линейной зависимостью количества требуемых операций от числа узлов схемы. Для нахождения ССФ входного сопротивления между узлами  $i$  и  $l$  рассматриваемой схемы используется формула

$$Z_{il} = (\delta^i + \delta^l) / \Delta, \quad (9)$$

где  $\Delta$  - определитель ядра схемы,  $\delta^i$  и  $\delta^l$  - дополнения определителя  $i$ -го и  $l$ -го узлов ядра. Передаточная ССФ по напряжению находится по формуле

$$K_{ij} = \delta^l / (\delta^i + \delta^l). \quad (10)$$

При этом источник напряжения включен между узлами  $i$  и  $l$ , а отклик снимается с узлов  $j$  и  $l$ . ССФ передаточного сопротивления между указанными парами узлов имеет вид

$$Z_{il,jl} = \delta^l / \Delta. \quad (11)$$

Ядром полной уравновешенной схемы с  $q$  узлами называется ее подсхема, включающая  $q$  независимых проводимостей. Ядро может содержать один или несколько контуров, каждый из которых имеет нечетное количество ветвей (нечетных контуров). При наличии более одного контура ядро представляет собой несколько изолированных друг от друга подсхем, в каждой из которых имеется один и только один контур.

В простейшем случае, когда ядро является нечетным контуром с  $q$  ветвями, его определитель находится по формуле

$$\Delta = \sum_{i=1}^q \Delta_i, \quad (12)$$

где  $\Delta_i$  - определитель  $i$ -го узла контура.  $\Delta_i$  представляет собой произведение  $(q+1)/2$  сомножителей. Первые два из них являются параметрами проводимостей пары ветвей контура, инцидентных узлу  $i$ . Оставшиеся  $(q-3)/2$  сомножителей соответствуют параметрам проводимостей тех ветвей контура, которые несмежны друг другу и ветвям, учитываемым в первых двух сомножителях. Оптимальная свертка выражения  $\Delta$  выполняется с помощью алгоритма [7]. Дополнение определителя  $i$ -го узла контура имеет вид

$$\delta^i = P / \Delta_i, \quad (13)$$

где  $P$  - произведение проводимостей ветвей контура.

В работе предложены оптимальные формулы для нахождения определителя одноконтурного ядра в общем случае, при наличии неконтурных ветвей. Доказано, что использование ядер, имеющих более одного контура, не позволяет получить ССФ, лишенные иррациональностей. Разработана диакоптика многоконтурного ядра и выведены формулы для его определителя

и дополнений, требующие минимального количества операций извлечения квадратного корня. Сформулированы правила получения полного класса решений вековой задачи преобразования полной уравновешенной схемы в эквивалентную звезду (*A.E.Kennelly*, 1899), которые облегчают применение выражений (9) - (11).

**В третьем разделе** “Формирование оптимальных выражений ССФ для активных электрических цепей” методология символьно-топологического анализа обобщена на случай схем с различными типами УИ.

Задача формирования ССФ для схемы с УИ, как и пассивной схемы, сводится к разложению определителей двух схем, полученных в результате простейших преобразований исходной схемы (см. табл. 3). В данном разделе обсуждаются топологические свойства схем с УИ и оптимальные методы разложения схемных определителей, учитывающие эти свойства для сокращения объема выкладок, а также минимизации вычислительных операций в формируемых выражениях ССФ.

Эквивалентные упрощения схем с УИ и НУИ при разложении определителей [32,33]. В схеме с УИ, кроме преобразований у-ветвей в мультиветви и z-ветвей в макроветви, возможны обобщенные преобразования для ИТУН и источников напряжения, управляемых током (ИНУТ). Параллельно (последовательно) соединенные ИТУН (ИНУТ) заменяются одним УИ, параметр которого равен сумме параметров образующих его УИ с учетом знаков. Наряду с этими простейшими преобразованиями в первую очередь целесообразно выполнить проверку схемы на вырожденность, что также позволяет упростить разложение схемного определителя.

Определитель вырожденной схемы тождественно равен нулю. Схема вырождается, когда становится несвязной. К вырождению активной схемы приводит также наличие контуров и сечений, которые содержат генераторы или приемники НУИ и УИ. Эти и другие следствия расположения элементов схемы в контурах и сечениях отражены в табл. 6. Случаи вырождения активной схемы и ее упрощения, инвариантные к схемному определителю, в полной мере согласуются с физическими представлениями о пассивных элементах и источниках напряжения и тока. Важно, что упрощения и проверка вырожденности схемы выполняются путем выявления соответствующих особенностей ее структуры и состава элементов, что невозможно или затруднено при аналогичных проверках матрицы или графа этой схемы.

Таблица 6

Элемент схемы	Принадлежность элемента			
	контур		сечению	
	из ГН и ГНУИ	из ПТ и ПНУИ	из ГТ и ГНУИ	из ПН и ПНУИ

Проводимость ( $y$ – ветвь)	Удаление		Стягивание-выделение	
Сопротивление ( $z$ – ветвь)	Удаление-выделение		Стягивание	
Генератор напряжения (ГН)	Вырождение	НУИ	Стягивание	
Приемник тока (ПТ)	НУИ	Вырождение		Стягивание
Генератор тока (ГТ)	Удаление		Вырождение	НУИ
Приемник напряжения (ПН)		Удаление	НУИ	Вырождение
Генератор НУИ (ГНУИ)	Вырождение		Вырождение	
Приемник НУИ (ПНУИ)		Вырождение		Вырождение

Следствием стягивания или удаления пассивных ветвей является образование ИТУН, у которых генератор и приемник параллельны, или ИНУТ, у которых генератор и приемник соединены последовательно. Такие УИ замещаются квазипассивными двухполосниками с параметрами проводимости или сопротивления согласно рис. 2 и 3. Квазипассивное преобразование в отличие от обычно используемого обратного преобразования (*C.L.Coates*, 1958; *P.M.Lin*, 1991) упрощает схему.

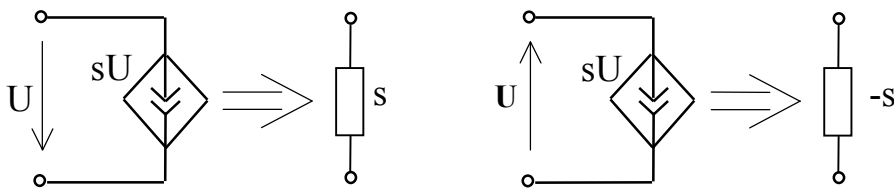


Рис. 2

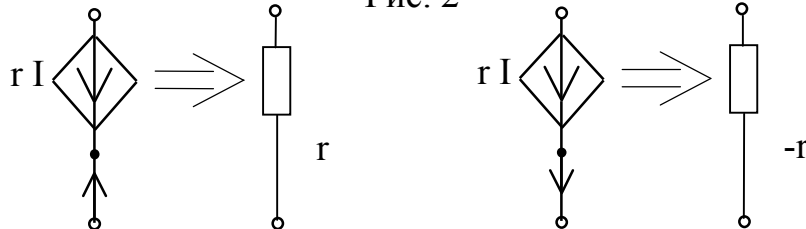


Рис. 3

Рекурсивного применения формул (2) и (3) в сочетании с табл. 6, рис. 2 и 3, как правило, недостаточно для полного разложения определителя активной схемы. В общем случае результатом выделения пассивных элементов являются схемы, которые содержат исключительно УИ и НУИ.

Метод НУИ для выделение параметров УИ [32]. Трудности обобщения формулы (7) для УИ, отличных от ИТУН, объясняются ограниченностью матричного представления схемы и понятия САД. Отказавшись от использования матрицы схемы, следует подумать о том, чем можно заменить понятие САД. Предложенное в работе самое простое решение состоит в том, чтобы не выполнять какие-либо преобразования исходной схемы для

получения первой производной схемы в формуле (7), а придать выделяемому УИ статус НУИ и оставить его в схеме.

Запрет на нейтрализацию УИ позволяет, подобно нахождению числителя передаточной ССФ (см. табл. 3), найти первое слагаемое в формуле (7) независимо от того к какому типу этот УИ относится и каков состав элементов исходной схемы, что недоступно для матричного метода выделения параметров. Специфика (нейтрализация) того или иного УИ будет отражена во втором слагаемом формулы (7). Таким образом, общую формулу для выделения параметра  $\chi$  произвольного УИ можно записать в виде

$$\Delta = \chi \Delta(\chi \Rightarrow \text{нуи}) + \Delta(\chi=0), \quad (14)$$

где  $\Delta(\chi \Rightarrow \text{нуи})$  - определитель первой производной схемы, полученной из исходной схемы путем придания выделяемому УИ статуса НУИ с параметром, равным единице. Схемно-алгебраические выражения, иллюстрирующие формулу (14) для различных типов УИ ( $\chi \in \{s, k, z, \beta\}$ ), приводятся на рис. 4.

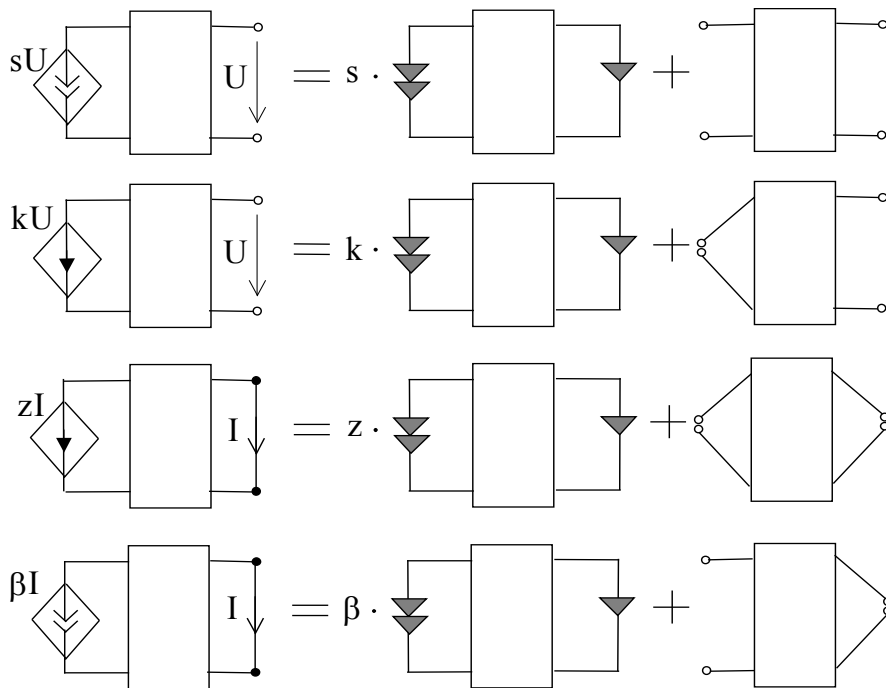


Рис. 4

Главным отличием формулы (14) от формулы (7) является то, что ориентация УИ сохраняется в ориентации НУИ и выделяемый параметр всегда положителен. При необходимости параметру НУИ вместо значения, равного единице, можно присвоить значение  $\chi$ . Тогда определитель исходной схемы представляется в виде суммы определителей первой и второй производных схем. Это отличает НУИ от обычного нуллора и ориентированного нуллора (*S.Hoang*, 1981 г.), которые сами по себе не имеют параметров, а моделируют операционный усилитель (ОУ) с коэффициентом усиления, равным бесконечности.

Использование понятия НУИ, как и понятия нуллора, упрощает получение ССФ для схем с идеальными ОУ, не требуя предварительного формирования общего символьного выражения и трудоемкого выполнения предельного перехода. Из формулы (14) и рис. 4 непосредственно вытекают важные специальные случаи упрощения схемы путем преобразования УИ в НУИ и нейтрализации УИ, которые отражены в табл. 6.

Элементарная активная схема [32]. Выделением параметров пассивных элементов и УИ можно свести анализ произвольной активной схемы к анализу ряда ЭАС, содержащих исключительно НУИ, параметры которых равны единице. Перед нахождением определителя необходимо исследовать ЭАС на вырожденность согласно табл. 6. Генераторы НУИ обязательно образуют дерево невырожденной ЭАС, а приемники НУИ входят в дополнение этого дерева и наоборот. Следовательно, полное дерево *Коутса*, как и ЭАС, состоит из НУИ, но их параметры равны не единицам, а значениям проводимостей у ветвей и передаточных проводимостей ИТУН, генераторы и приемники которых вошли в это дерево. Таким образом, определитель ЭАС может быть найден с помощью процедуры *Коутса* для нахождения знака полного дерева. Вместо этого в работе предложено более простое решение.

Разложение определителей ЭАС через выделение НУИ [32,33]. Топологическая формула для выделения параметра НУИ с номером  $n$  имеет вид

$$\Delta = \pm \Delta_n, \quad (15)$$

где  $\Delta_n$  - определитель схемы, полученной из первоначальной ЭАС в результате следующих преобразований: 1) стягивание генератора (приемника) выделяемого НУИ таким образом, чтобы генераторы (приемники), которые инцидентны одному из узлов - опорному узлу этого генератора (приемника), переключились на другой его узел; 2) объединение опорных узлов выделяемого НУИ. Положительный (отрицательный) знак перед  $\Delta_n$  выбирается в случае противоположной (одинаковой) ориентации генератора и приемника НУИ в первоначальной ЭАС по отношению к его опорным узлам.

Преобразования 1 и 2, выполняемые относительно выделяемого НУИ, называются его стягиванием. Опорные узлы, относительно которых выполняется стягивание НУИ, выбираются произвольно. При наличии у генератора и приемника общего узла целесообразно использовать его в качестве опорного узла и генератора, и приемника. Для этого случая преобразование 2 в операции стягивания опускается, а данное выше правило выбора знака инвертируется, то есть знак перед  $\Delta_n$  считается положительным (отрицательным) при одинаковой (противоположной) ориентации генератора и приемника соответствующего НУИ по отношению к общему опорному узлу в первоначальной схеме.



Принципиальное отличие формулы (15) от формулы (14) состоит в способе определения знака перед выделяемым параметром. Рекурсивное применение простейшей формулы (15) избавляет от необходимости назначать базисный узел в ЭАС, образовывать подстановку из главных генераторов и приемников, определять их знаки и число инверсий в подстановке.

Метод стягивания и удаления ветвей [33]. Для объединения полезных свойств формул (14) и (7) необходимо дать последней формуле схемную интерпретацию и разработать топологическое правило нахождения знака, не требующее нумерации узлов схемы и позволяющее минимизировать число операций вычитания в формируемых выражениях ССФ. Это потребовало введения операции стягивания для УИ, подобной аналогичным операциям для  $u$ -ветви (см. формулу (2)) и НУИ (см. формулу (15)).

Предложенная модификация формулы (14), не приводящая к образованию нового НУИ взамен УИ в первой производной схеме, имеет вид

$$\Delta = \pm \chi \Delta_{\chi} + \Delta(\chi=0), \quad (16)$$

где  $\Delta_{\chi}$  - определитель схемы, полученной из первоначальной схемы в результате стягивания выделяемого УИ.

Если опорным узлам инцидентны  $u$ -ветви, то для выполнения стягивания УИ они должны быть замещены вырожденными ИТУН. Поскольку нейтрализация генераторов напряжения и приемников тока приводит к объединению узлов схемы, не допускается инцидентность соответствующих ветвей других УИ хотя бы одному из опорных узлов выделяемого УИ. Это ограничение всегда можно обойти надлежащим выбором опорных узлов, первоочередным выделением  $z$ -ветвей и УИ с генераторами напряжения и (или) приемниками тока, а также заменой в необходимых случаях операции стягивания операцией преобразования в НУИ.

Алгоритм формирования оптимальных выражений определителей [33]. Схемный определитель тождественно равен нулю в случае вырожденной схемы. Поэтому перед выделением параметров выполняется проверка наличия простейших признаков вырождения (см. табл. 6). Убедившись в невырожденности схемы, следует исследовать ее на возможность проведения эквивалентных упрощений путем: 1) объединения параллельно (последовательно) включенных  $u$ -ветвей и ИТУН ( $z$ -ветвей и ИНУТ); 2) преобразования вырожденных ИТУН и ИНУТ в  $u$ -ветви и  $z$ -ветви; 3) преобразования в НУИ, стягивания или удаления элементов согласно табл. 6. Стягивание или удаление генераторов и приемников влечет нейтрализацию соответствующих УИ (см. рис. 4)

Проверка на вырожденность и эквивалентные упрощения безусловно выполняются для всех схем и подсхем, полученных в результате преобразований исходной схемы. Предлагаемый алгоритм заключается в

рекурсивном исполнении следующих шагов для исходной схемы, а также производных от нее схем и подсхем.

1. Выделение параметров с максимальными ПУ (частные случаи формул (2), (3), (14) - (16)).

2. Выделение по формуле (4) определителей подсхем, имеющих с оставшейся частью схемы - второй подсхемой единственный общий узел.

3. Выделение по формуле (5) параметра подсхемы, имеющей с оставшейся частью схемы - второй подсхемой два общих узла. Вторая подсхема при этом является вырожденной или становится вырожденной в случае объединения внешних узлов.

4. Выделение НУИ, для которых существует операция стягивания, по формуле (15).

4.1. Выделение параметров НУИ, генератор и приемник которых имеют общий узел. Этот узел используется в качестве опорного узла.

4.2. Выделение параметров НУИ, генератор и приемник которых не имеют общего узла. В качестве опорных узлов используются узлы, параллельно которым не подсоединены у-ветви, или узлы, по отношению к которым генератор и приемник выделяемого НУИ имеют противоположную ориентацию.

5. Применение диакоптических формул. Здесь рассматриваются возможности деления схемы на подсхемы по двум, трем или более узлам с учетом правила половинного деления и наличия у подсхем параметров, которым соответствуют вырожденные схемы. Не допускается размещение одноименных генератора и приемника в различных подсхемах. В случае утвердительного ответа схемный определитель раскрывается по соответствующей формуле.

6. Выделение параметров УИ, для которых существует операция стягивания. Здесь среди названных УИ выбирается тот, который имеет наибольший ПУ. Если имеется более одного УИ с таким же ПУ (или его оценкой по правилу “минимума”), то в первую очередь выделяется тот, который имеет большую кратность, являясь результатом объединения большего числа УИ. Для уменьшения количества операций вычитания необходимо, чтобы в первую очередь выделялся УИ, генератор и приемник которого имеют общий узел и ориентированы противоположно по отношению к нему. Этот узел должен использоваться в качестве общего опорного узла.

7. Выделение параметров УИ, для которых не существует операции стягивания. Для этого выбирается УИ с учетом требований шага 4. Далее применяется формула (16), но вместо стягивания выделяемого УИ выполняется его преобразование в НУИ с соответствующим параметром.

8. Выделение параметров пассивных элементов. К этому времени в схеме не остается НУИ и УИ, то есть отсутствуют препятствия для последовательной реализации правил ПУ, кратности и половинного деления.

В результате работы алгоритма формируется вложенное выражение схемного определителя или обнаруживается вырожденность схемы. Изменяя взаимно порядок следования шагов, можно получить выражение с первоочередным выделением параметров выбранных элементов. Таким образом удастся управлять процессом формирования ССФ за счет увеличения числа вычитаний и изменения сложности выражения. Это полезно, например, в случаях нахождения функций чувствительности к изменениям заданных параметров, формирования символьно-численных и упрощенных выражений ССФ. Алгоритм реализован автором в программе **CIRSYM**, некоторые результаты использования которой приводятся ниже.

Анализ ПС с ИТУН [33]. В качестве пассивной подсхемы использовалась полная у-схема с восемью узлами (28 ветвей). К этой подсхеме поочередно подсоединяется одна из четырех активных подсхем, образованных ИТУН: 1) (12,34), (34,12), (56,78), (78,56); 2) (12,23), (13,34), (14,45), (15,56), (16,67), (17,78), (18,12); 3) (12,34), (34,56), (56,78), (78,12); 4) (12,34), (12,56), (12,78), (34,56), (34,78), (56,78). Первая пара номеров в скобках указывает узлы подключения генератора, а вторая - приемника ИТУН. Схемы, полученные в результате соединения пассивной подсхемы с первой, второй, третьей и четвертой активными подсхемами, далее обозначены соответственно test1, test2, test3 и test4.

В строках табл. 7 приведены количества операций, требуемых в выражениях определителей ПС с соответствующими активными подсхемами.

Таблица 7

Схема	Вложенные выражения			Без свертки	
	Число "*"	Число "+"	Число "-"	Число "*"	Число "+", "-"
test1	15559	26381	686	10080000	1439999
test2	18164	44442	63	5173245	739034
test3	15775	27480	595	10920000	1559999
test4	20537	33942	773	11289600	1612799

Во втором, третьем и четвертом столбцах табл. 7 помещены показатели вложенных выражений схемных определителей, сформированных с помощью программы **CIRSYM**. Для сравнения в пятом и шестом столбцах этой таблицы указаны количества операций в развернутых выражениях при отображении рассматриваемых схем унисторными графами. Причем дубликации в этих выражениях сохранены, а в качестве базисного узла использован узел № 1.

В табл. 8 приведены показатели сложности вложенных выражений определителей обсуждаемых четырех схем при их отображении унисторными

графами и матрицами узловых проводимостей. В первом случае использовалась программа *SYMB*, реализующая разложение унисторного графа по ветвям и дугам [18] (автор *Д.В.Шеин*).

Таблица 8

Схема	Унисторный граф			Матрица проводимостей		
	Умножения	Сложения	Вычитания	Умножения	Сложения	Вычитания
test1	6941	22327	2443	8659	14130	17227
test2	6399	21426	6193	8659	14136	17592
test3	13219	39582	6317	8659	14130	17227
test4	12382	46136	7563	8659	13448	16640

Во втором случае применялась программа на основе рекурсивного разложения *Лапласа* по строкам матрицы узловых проводимостей (*W.Verhaegen, G.Gielen, 1998*). Полученные выражения графовых и матричных определителей содержат дубликации, устранение которых весьма трудоемко и приводит, как правило, к увеличению количества операций умножения и сложения, что подтверждает сравнение табл. 7 и 8.

Анализ схемы полосового фильтра на базе идеальных ОУ. 32-узловая схема активного фильтра содержит 13 идеальных ОУ, 36 резисторов и 8 конденсаторов (*J.Starzyk & A.Konczykowska, 1986*). Полтора десятилетия эта схема используется для сравнения алгоритмов формирования ССФ, что нашло отражение в Интернет-сайте <http://www.eng.uts.edu.au/~benr/symbolic/>. При этом в качестве объекта оптимизации выступает передаточная ССФ по напряжению указанной схемы. Применение промежуточной модели в виде унисторного графа (программа *SYMB*) не позволило выполнить анализ этой схемы без ее деления на подсхемы с тремя внешними узлами.

Реализация метода стягивания и удаления ветвей в программе **CIRSYM** обеспечила формирование передаточной ССФ по напряжению в виде единого выражения без деления схемы на подсхемы. Показатели сложности этого выражения составили: 104 умножения, 11 вычитаний, 1 деление и 53 сложения, что не столь значительно уступает выражениям, сформированным на основе диакоптических формул, требуя в 1,5 раза меньше операций умножения, чем единое выражение, полученное с помощью программы *STAINS*, в которой реализован усовершенствованный алгоритм редукции матрицы по *Лапласу* (*B.Rodanski, 1996, 2000*).

**В четвертом разделе** “Формирование ССФ электрических цепей делением их на части” обсуждаются вопросы применения схемного подхода к символю-топологическому анализу сложных активных электрических цепей.

Минор подсхемы [35]. Удаление строк и столбцов в матрице наглядно отображается подсоединением нораторов и нуллаторов к соответствующим узлам схемы. Это позволяет выполнить бисекцию на схемном уровне и свести

раскрытие миноров определителей матриц к разложению определителей нораторно-нуллаторных схем (*S.M.Chang & G.M.Wierzba, 1994*). Однако такая схема не может быть проанализирована топологическим методом, поскольку при использовании нуллора утрачивается информация о знаке. С другой стороны, НУИ можно рассматривать как ориентированный нуллок. Следовательно, операция удаления строки и столбца в матрице эквивалентна операции подсоединения НУИ на схеме. Отсюда по аналогии с минором матрицы можно ввести понятие “минор схемы”.

Миноры подсхемы удобно отображать двоичными векторами (ДВ) размерности  $2n$ , где  $n$  - число внешних узлов подсхемы, не считая базисного узла. Единицы в первой (второй) половине элементов ДВ соответствуют конечным узлам подключения генераторов (приемников) НУИ. Если к внешнему узлу подсхемы не подсоединяются НУИ, то в соответствующие позиции ДВ заносятся нули. Положение элементов в каждой из половин ДВ задается упорядоченным множеством - кортежем внешних узлов подсхемы, исключая базисный узел, который является начальным узлом всех без исключения генераторов и приемников НУИ.

Минор подсхемы, заданный некоторым ДВ, равен определителю схемы, которая получена из этой подсхемы в результате подсоединения НУИ согласно ее ДВ. Для обозначения миноров схемы или подсхемы может применяться символика, принятая для обозначения миноров матрицы. Все шесть миноров подсхемы с тремя внешними узлами изображены на рис. 5.

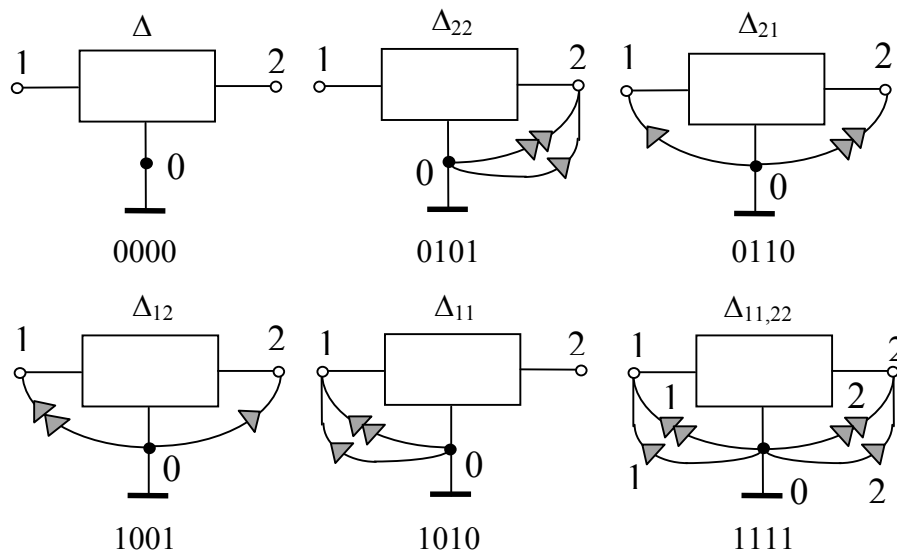


Рис. 5

В отличие от нуллоров НУИ должны быть пронумерованы в соответствии с их очередностью в ДВ, а именно,  $i$ -я по порядку единица в первой (второй) половине ДВ соответствует генератору  $i$  (приемнику  $i$ )  $i$ -го НУИ. Подобно определителям, миноры схемы и матрицы эквивалентны. Однако выражения

определителя и миноров матрицы схемы, представленные в развернутом виде, избыточны. Подсоединение НУИ позволяет представить внешние характеристики подсхем в виде производных схем, избежав применения в диакопнике объектов, имеющих математическую природу, и порожденных вычислительных трудностей.

Формула трехузловой бисекции [32,35]. Двоичное отображение формулы, обобщающей формулы (2) и (3) и предусматривающей деление схемы по узлам 1, 2 и 0, имеет вид

$$\Delta = \Delta_1(0000)\Delta_2(1111) + \Delta_1(0101)\Delta_2(1010) - \Delta_1(0110)\Delta_2(1001) - \Delta_1(1001)\Delta_2(0110) + \Delta_1(1010)\Delta_2(0101) + \Delta_1(1111)\Delta_2(0000). \quad (17)$$

Слагаемые этой формулы представлены шестью парами ДВ. Векторы каждой пары взаимно дополняют друг друга. Кортёж общих (или внешних) узлов подсхем, являющийся обозначением позиций ДВ, имеет вид 1212 (см. рис. 5).

Топологический метод схемной бисекции [35]. Для формирования множества ДВ перебираются  $2n$ -разрядные двоичные числа (от  $2n$  нулей до  $2n$  единиц) и выбираются те из них, которые содержат одинаковое количество единиц в первой и второй половинах разрядов. Это свойство, вытекающее из определения ДВ, позволяет получить число ДВ подсхемы в виде

$$l = \sum_{i=0}^n \{n \ i\}^2, \quad (18)$$

где  $\{n \ i\}$  - число сочетаний из  $n$  элементов по  $i$ . Число миноров подсхемы (см. третью строку табл. 2) при  $n > 2$  значительно меньше числа ее  $D$ -деревьев, что позволяет анализировать методами схемных миноров более сложные схемы.

Множество ДВ второй подсхемы получается из множества ДВ первой подсхемы применением операции дополнения двоичного числа. В общем случае схемный определитель находится по топологической формуле

$$\Delta = \sum_{i=1}^1 \delta_i \Delta_1(b_i) \Delta_2(\overline{b_i}), \quad (19)$$

где  $\delta_i$  - определитель ЭАС, которая образована в результате объединения НУИ, соответствующих ДВ  $b_i$  и его дополнению  $\overline{b_i}$ ;  $\Delta_1(b_i)$  - минор первой подсхемы, соответствующий  $b_i$ ;  $\Delta_2(\overline{b_i})$  - минор второй подсхемы, соответствующий  $\overline{b_i}$ .

Множество ДВ несопоставимо количественно с содержащим его множеством двоичных чисел, насчитывающим  $2^{2n}$  элементов. Поэтому для ссылок на ДВ используются их порядковые номера, а не десятичное представление соответствующего двоичного числа. Например, в формуле (17) слагаемым соответствуют следующие пары миноров: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). Метод схемных миноров отличается от метода  $D$ -деревьев тем, что минору одной подсхемы соответствует один и только один минор другой

подсхемы, а каждый минор является сомножителем одного и только одного слагаемого формулы (19). Формулы бисекции, получаемые на основе выражения (19), содержат слагаемые с положительными и отрицательными знаками, независимо от типа схемы. Однако в этих формулах вычитания удается минимизировать на уровне сомножителей указанных слагаемых, что не позволяет сделать методы, реализующие матричный и графовый подходы. Не менее важно, что число слагаемых в формулах бисекции минимально и равно числу миноров подсхемы. Иерархическая бисекция схемы предусматривает повторную бисекцию каждой подсхемы с применением формул (4), (5), (17) или (19).

Топологический метод объединения подсхем [35]. Множества внешних узлов объединяемых подсхем, как правило, не совпадают с множеством их общих узлов. В этом случае необходимо рассматривать согласно формуле (19) только те позиции ДВ, которые относятся к узлам, являющимся общими узлами для обеих подсхем. Оставшиеся позиции ДВ непосредственно переносятся во вновь формируемый ДВ объединенной схемы. Таким образом, взаимно однозначное соответствие миноров, присущее формуле (19), нарушается и некоторый минор одной подсхемы оказывается совместным с двумя и более минорами другой подсхемы.

Если среди общих узлов объединяемых подсхем отсутствуют узлы, являющиеся одновременно внешними узлами объединенной схемы, то ДВ совместных миноров подсхем должны дополнять друг друга в части позиций, соответствующих общим узлам подсхем. В качестве примера выполним объединение подсхем, образующих схему на рис. 6.

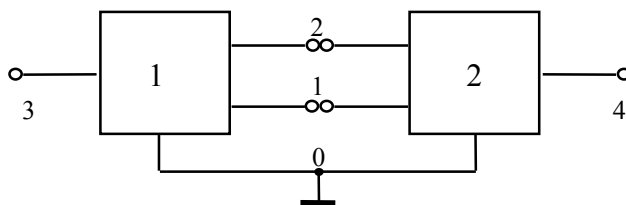


Рис. 6

Для обозначения позиций ДВ первой и второй подсхем удобно выбрать кортежи 312312 и 124124. Чтобы установить совместность миноров подсхем, необходима информация, размещенная в позициях 1212 ДВ этих подсхем. При нахождении знака пары совместных ДВ также используются только эти позиции.

Внешними узлами объединенной схемы являются собственные узлы 3 и 4 подсхем 1 и 2. Следовательно, размерность ДВ этой схемы равна четырем, а число ДВ или число миноров схемы равно шести. ДВ объединенной схемы приведены слева в табл. 9. Справа указаны пары совместных миноров подсхем

с соответствующими знаками перед скобками. Произведения миноров подсхем (справа) в сумме с учетом знаков образуют минор объединенной схемы (слева).

Таблица 9

ДВ объединенной схемы: 3434	Совместные пары миноров объединяемых подсхем
0000	$+(1,19), +(2,13), -(3,12), -(5,7), +(6,6), +(8,1)$
0101	$+(1,20), +(2,15), -(3,14), -(5,9), +(6,8), +(8,2)$
0110	$+(4,16), -(7,10), +(9,4), -(10,3)$
1001	$+(11,18), -(12,17), +(14,11), -(17,5)$
1010	$+(13,19), +(15,13), -(16,12), -(18,7), +(19,6), +(20,1)$
1111	$+(13,20), +(15,15), -(16,14), -(18,9), +(19,8), +(20,2)$

Миноры объединенной схемы содержат всю информацию о ее ССФ (см. рис. 5). Нахождение знака слагаемых миноров объединенной схемы усложняется, когда обозначения позиций ДВ подсхем неупорядочены. Упорядочение позиций первой подсхемы предусматривает их приведение к виду: собственные узлы - общие узлы. Напротив, позиции ДВ второй подсхемы считаются упорядоченными, если они приведены к виду: общие узлы собственные узлы. При этом порядок следования общих узлов в обозначениях позиций ДВ обеих подсхем должен быть одинаков. Таким образом, топологическое правило нахождения знака требует учета двух составляющих  $(-1)^{d+h}$ , где  $d$  - число инверсий, требующихся для упорядочения ДВ первой и второй подсхем;  $h$  - число инверсий в подстановке, образованной из номеров генераторов и приемников, которые инцидентны общим узлам подсхем.

Если среди общих узлов объединяемых подсхем имеются узлы, являющиеся одновременно внешними узлами объединенной схемы, то следует использовать обобщенное условие совместности ДВ. Для доказательства этого условия вводится дополнительный узел, соединенный короткозамкнутой ветвью, то есть вырожденным НУИ, с общим внешним узлом. Дополнительный узел рассматривается в качестве собственного узла одной из подсхем. Таким образом, задача приводится к рассмотренному ранее случаю, когда у подсхем отсутствуют общие внешние узлы.

Обобщенное условие совместности ДВ [35]. Два ДВ совместны, если результат поэлементного сложения содержимого каждой из общих позиций этих ДВ отличен от нуля.

При формировании объединенного ДВ содержимое собственных позиций ДВ объединяемых подсхем переносится без изменений в ДВ объединенной схемы. Содержимое каждой из позиций объединенного ДВ, формируемых для общих внешних узлов этих подсхем, равно поэлементному произведению содержимого соответствующих позиций ДВ объединяемых подсхем.

Алгоритм объединения двух подсхем [35].

1. Попарное сравнение ДВ подсхем и выявление пар совместных ДВ. Для



этого используются позиции ДВ, соответствующие общим узлам подсхем, и условие совместности.

2. Приведение совместных пар ДВ к ДВ объединенной схемы. В объединенный ДВ в первую очередь заносится содержимое позиций, относящихся к собственным узлам первой подсхемы. Далее рассматриваются позиции, соответствующие общим внешним узлам. В объединенный ДВ заносится единица только в том случае, если содержимое соответствующих позиций в ДВ подсхем отлично от нуля. В противном случае объединенный ДВ дополняется нулем в позиции, соответствующей общему внешнему узлу. Формирование объединенного ДВ завершается учетом содержимого позиций, относящихся к собственным узлам второй подсхемы. Параметр найденного ДВ равен произведению миноров исходных подсхем.

3. Определение знаков совместных пар миноров объединяемых подсхем. Если в позициях общих внешних узлов обоих ДВ содержатся единицы, то ДВ первой подсхемы модифицируется путем помещения в соответствующую позицию нуля. Такая модификация необходима, поскольку единица из ДВ первой подсхемы перешла в объединенный ДВ подсхем. Далее применяется топологическое правило и знак рассчитывается по формуле  $(-1)^{d+h}$ .

4. Приведение подобных членов среди параметров объединенных ДВ по виду ДВ и образование миноров объединенной схемы. Перед параметром объединенного ДВ учитывается знак соответствующей пары миноров объединяемых подсхем.

Специального рассмотрения заслуживают случаи, когда подсхемы включают идеальные ОУ. Среди миноров таких подсхем могут быть миноры, тождественно равные нулю, если подсоединение НУИ в соответствии с ДВ минора приводит к получению вырожденной схемы. Это обусловлено тем, что идеальный ОУ имеет статус НУИ, и возможно образование контуров, содержащих только генераторы или только приемники НУИ (см. табл. 6). Наличие нулевых миноров позволяет значительно сократить количество ДВ, подлежащих рассмотрению, как при анализе подсхем, так и при их объединении. Для этого необходимо использовать правила, учитывающие условие совместности ДВ объединяемых подсхем.

Правило 1. Если внешний узел подсхемы совпадает с выходным узлом идеального ОУ, принадлежащего этой подсхеме, то в первой половине позиций ДВ содержимое позиции этого внешнего узла равно нулю.

Правило 2. Если внешний узел подсхемы совпадает с выходным узлом идеального ОУ, принадлежащего другой подсхеме, то в первой половине позиций ДВ содержимое позиции этого внешнего узла равно единице.

В правилах 1 и 2 предполагается, что одним из выходных узлов идеального ОУ является базисный узел схемы, что практически всегда имеет

место. Дуальные правила могут быть предложены для входного узла идеального ОУ с дифференциальным входом, когда другой входной узел этого ОУ является базисным узлом схемы. Алгоритм объединения подсхем в сочетании с правилами 1 и 2 использован для анализа схемы полосового фильтра (см. раздел 3) без применения компьютера [35].

Формирование ССФ на компьютере [26,35]. Для схемы полосового фильтра применение трехузловой бисекции приводит к существенному сокращению вычислительной сложности выражения ССФ. Итогом оптимизации стало последовательное выражение для передаточной ССФ по напряжению, образованное 23 выражениями и требующее 30 умножений, 8 вычитаний, 9 делений, 22 сложения. Показатели этого выражения являются минимальными среди результатов решения теста *Стажика-Кончиковской* известными программами символьного анализа (1986-1997гг.), представленных на сайте “*Symbolic circuit analysis: Library of benchmark circuits*” (<http://www.eng.uts.edu.au/~benr/symbolic/>, Австралия). Формула **Filaretov2** заняла вторую позицию в рейтинге формул по вычислительной эффективности и перепечатана в трудах международного семинара “*Symbolic methods and applications in circuit design*” (“Символьные методы и их применение в схемотехническом проектировании”) как пример компактной формулы (*B.Rodanski*, Лиссабон, 2000). В трудах этого же семинара показатели сложности оптимальных выражений, формируемых программой **CIRSYM** из пакета **SYMBOL** для определителей полных электрических схем, признаны недостижимыми при использовании существующих пакетов и систем компьютерной алгебры (*R.Dmytryshyn*, Кайзерслаутерн, 1998).

Анализ избирательного усилителя [33,35]. Одной из наиболее сложных тестовых схем для отечественных программ символьного анализа считается 40-узловая схема замещения избирательного усилителя (*Э.А.Лаксберг*, 1973), которая содержит 49 резисторов, 35 конденсаторов, 9 ИТУН. Числитель и знаменатель передаточной ССФ по напряжению схемы избирательного усилителя, сформированные программой **CIRSYM** в виде единого выражения, требуют 36758, 49077 и 9883 операций умножения, сложения и вычитания соответственно. В ходе анализа обсуждаемой схемы применялась двух-, трех-, четырех- и пятиузловая бисекция.

Для формирования ССФ в виде последовательных выражений на базе программы **CIRSYM** была разработана программа **CIRSYMS**, предусматривающая иерархическое объединение подсхем в соответствии с алгоритмом, который приведен выше. К наименьшему по сложности последовательному выражению привело деление схемы на 9 подсхем, соответствующих усилительным каскадам. В начале последовательного выражения для шести миноров исходной схемы размещаются 318 выражений,

требующих 1452, 1517 и 375 операций умножения, сложения и вычитания. Затем следуют 477 выражений, требующих соответственно 1508, 1052 и 456 операций. ССФ избирательного усилителя в виде последовательного выражения оказывается более эффективной в частотной области, чем матричная модель, используемая в программах *PSpice (DesignLab)* при числе вариантов анализа большем 1000.

Анализ ОУ  $\mu A741$ . Среди зарубежных программ формирования последовательных выражений ССФ выделяется упомянутая в третьем разделе программа *STAINS*. Эта австралийская программа имеет лучшие показатели на 2000г. по оценкам сложности выражений среди ряда программ, представленных на сайте <http://www.eng.uts.edu.au/~benr/symbolic/>. Самой сложной тестовой схемой, файл которой размещен на сайте, является схема замещения операционного усилителя  $\mu A741$  (советский аналог - 140УД7). 76-узловая малосигнальная схема замещения  $\mu A741$  содержит 115 резисторов, 76 конденсаторов и 26 ИТУН. Показатели сложности последовательного выражения передаточной функции по напряжению этой схемы, полученного с помощью программы *STAINS* следующие: 579 умножений, 267 делений, 502 сложения, 382 вычитания, 715 присваиваний и 317 пар скобок. В этом числе 116 операций деления требуются для инициализации выражений указанной ССФ (при переходе от сопротивлений к проводимостям). Остальные операции используются в выражениях, отображающих редукцию матрицы схемы, и в сочетании с операциями вычитания обуславливают методическую погрешность при вычислениях с конечным числом значащих цифр.

Избыточные операции деления и вычитания исключаются в случае применения программы **CIRSYMS**. Соответствующие показатели выражения составили 1942, 116, 1617, 142, 830 и 1208 операций. Как видно, полученное последовательное выражение ССФ не требует дополнительных операций деления, а число операций вычитания уменьшилось в 2,6 раза по сравнению с ранее рассмотренным выражением ССФ.

Для вычисления сложных единых и последовательных выражений **Д.В.Шеиным** разработан специализированный интерпретатор **CALCSYM**, который входит в состав пакета **SYMBOL**. Интерпретация полученных выражений показала, что расчет ССФ с помощью первого выражения (программа *STAINS*) обеспечивает только 13 верных цифр в мантиссе результата. При расчете ССФ по второму выражению (программа **CIRSYMS**) погрешность не была отмечена даже в 17 цифре (в обоих случаях использовалась 19 разрядная мантисса). Важно, что время интерпретации второго выражения увеличилось лишь на 11%, что несопоставимо с резким ухудшением точности результата для первого выражения ССФ.

Проведенные численные эксперименты свидетельствуют в пользу высокой точности и устойчивости единых оптимальных выражений ССФ. Например, для схем избирательного усилителя и ОУ *µа741* в случаях задания параметров пассивных элементов только проводимостями, только сопротивлениями, как проводимостями, так и сопротивлениями, не происходит потери точности даже в последнем десятичном знаке.

Схемные отображения матриц [34]. Пусть  $A$  – квадратная матрица порядка  $n$ . Определитель этой матрицы можно разложить путем рекурсивного применения формулы Лапласа

$$\Delta = (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} + \Delta(a_{ij}=0), \quad (20)$$

где  $\Delta_{ij}$  – минор элемента  $a_{ij}$  и  $\Delta(a_{ij}=0)$  – определитель производной матрицы, полученной из исходной матрицы при условии  $a_{ij}=0$ . Порядки исходной и производной матриц одинаковы, поэтому можно говорить об аналогии между выделением элемента матрицы и выделением параметра ИТУН в соответствующей схеме (см. рис. 4). Таким образом каждый элемент матрицы можно отобразить одним и только одним ИТУН на схеме с  $n+1$  узлами. Нумерация узлов схемы соответствует нумерации строк (столбцов) матрицы, а дополнительному узлу присвоен номер 0. При этом элементу  $a_{ij}$  соответствует ИТУН вида  $(i,0)(j,0)$ . Значение параметра ИТУН считается равным значению отображаемого элемента матрицы. После отображения матрицы схемой можно применить алгоритм формирования оптимальных выражений схемных определителей.

Формирование последовательных выражений требует как оптимального выбора подсхем в исходной схеме, так и нахождения оптимальной последовательности их объединения, что может составить основную долю в затратах времени на разложение определителя. В этой связи предлагается в качестве подсхем рассматривать подмножества ИТУН, соответствующие строкам исходной матрицы. Объединение подсхем-строк выполняется следующим образом: сначала объединяются первые две строки, затем к их объединению добавляется третья строка и т.д., наконец, к объединению  $n+1$  строк добавляется последняя  $n$ -я строка. Предложенные алгоритмы формирования единых и последовательных выражений были реализованы автором в программах **MATSYM** и **MATSYMS**. Показатели сложности выражений, сформированных указанными программами для определителей полностью заполненных матриц приводятся в табл. 10.

Таблица 10

n	Единые выражения			Последовательные выражения			
	Умно- жения	Сло- жения	Вычи- тания	Умно- жения	Сложе- ния	Вычи- тания	Присваи- вания
4	40	14	17	28	16	20	27

5	205	71	97	75	43	44	51
6	1236	424	633	186	106	98	93
7	8659	2939	4253	441	249	216	169
8	69280	23245	34069	1016	568	480	311
9	623529	206914	306681	2295	1271	1064	583

Установлено, что последовательные выражения, сложность которых в среднем на два порядка ниже, не дают удовлетворительных результатов по точности при решении плохообусловленных систем уравнений [34]. В то же время единые выражения обеспечивают получение точных результатов. Это заставляет не подвергать сомнению (*P.M.Lin & M.M.Hassoun, 1991,1995*) целесообразность формирования единых выражений. Тем более, что при решении с помощью программы **MATSYM** уравнений с разреженными матрицами отсутствуют принципиальные ограничения на допустимый порядок матрицы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработано новое научное направление в области символьного анализа электрических цепей, основанное на схемном подходе, который использует понятия определителя схемы и схемных миноров. Топологическими моделями для раскрытия схемных определителей служат непосредственно схема замещения цепи и производные от нее схемы. К числу наиболее важных относятся следующие результаты.

1. Введено понятие схемного минора, который равен определителю схемы, образованной из исходной схемы в результате подсоединения НУИ. Это послужило основой для разработки аппарата формирования ССФ, альтернативного традиционному матричному аппарату и обеспечивающему нахождение ССФ через схемные определители, выделение параметров УИ, учет параметров, имеющих бесконечно большие значения, и анализ схем по частям. Отсутствуют ограничения на тип линейных элементов, допустимых для того или иного координатного базиса. Минимальный набор базовых понятий имеет физическое толкование и не связан с использованием какого-либо математического аппарата.

2. Разработаны топологические методы выделения параметров: 1) метод НУИ; 2) метод стягивания и удаления ветвей. Эти методы, предназначенные для анализа схем со всеми типами УИ и идеальными ОУ, обеспечивают разложение схемных определителей без дубликаций, не требуя трудоемкого перечисления цепей контуров передачи. Выражения ССФ, сформированные предложенными методами, оказываются более устойчивыми к вычислениям, поскольку знак перед выделяемым параметром в отличие от матричного метода выделения параметров не зависит от нумерации узлов схемы. При использовании метода стягивания и удаления ветвей этот знак определяется

ориентацией УИ в схеме, что позволило поставить и решить задачу минимизации числа операций вычитания, главным образом обуславливающих погрешность вычислений на основе ССФ.

3. Предложена внешняя характеристика подсхемы в виде множества ее миноров. Разработаны диакоптические методы иерархического деления схемы на две подсхемы и объединения подсхем, позволяющие преодолеть существующие ограничения на тип линейных элементов и число внешних узлов подсхем. Сомножители диакоптических формул не содержат дубликаций, поскольку являются минорами некоторой подсхемы и находятся как определители производных схем, образованных в результате подсоединения НУИ к внешним узлам этой подсхемы.

4. Сформулированы правила выбора элементов и подсхем, первоочередное выделение которых обеспечивает получение оптимальных по вычислительной сложности выражений ССФ. Разработаны алгоритмы и реализованы программы для формирования выражений ССФ, оптимальных по вычислительной сложности и количеству операций вычитания. При этом исключаются предварительное получение развернутого выражения ССФ и последующая его свертка, что позволяет выполнять символьный анализ электрических цепей в сотни узлов и элементов за приемлемое время.

5. Выведены оптимальные выражения ССФ для лестничных, цепных и полных схем, а также схем с идеальными ОУ и ИТУН. Сформированные выражения обладают наилучшими показателями сложности, которые недостижимы для известных программ символьного анализа электрических цепей, а также систем аналитических вычислений и компьютерной алгебры. Получены оптимальные по вычислительной сложности и устойчивости выражения ССФ для тестовых схем *Лаксберга*, *Стажика-Кончиковской*, операционного усилителя  $\mu A741$ . Показаны вычислительные преимущества оптимальных выражений ССФ по точности и быстрдействию в частотной области.

6. Доказано, что необходимая информация о ССФ полной уравновешенной схемы содержится в ее ядре, то есть в подсхеме с независимыми параметрами ветвей. Разработаны топологические методы формирования оптимальных выражений ССФ для полных уравновешенных схем без применения промежуточных математических моделей. Формируемые ССФ лишены избыточности и не требуют в случае одноконтурных ядер операций извлечения квадратного корня. ССФ в случае многоконтурных ядер содержат минимальное количество таких операций.

7. Предложено схемное отображение матрицы, позволяющее непосредственно использовать разработанную методологию схемного подхода для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений

электрических цепей и уравнений произвольной физической природы. Показаны вычислительные преимущества оптимальных выражений при раскрытии определителей плохообусловленных матриц высокого порядка.

8. Полученные результаты реализованы в пакете программ **SYMBOL** (<http://astrometric.sai.msu.ru/~symbol/>) для формирования ССФ электрических цепей и решения систем линейных алгебраических уравнений в аналитическом виде. Программы используют стандартный *CIR*-формат для описания схем и в отличие от известных программ, кроме непосредственного учета всех типов УИ, предусматривают задание параметров пассивных элементов сопротивлением, а также смешанное задание параметров.

В целом создана универсальная методология формирования ССФ линейных стационарных электрических цепей с сосредоточенными параметрами, ориентированная на применение в виде инженерных методик и компьютерных программ.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих источниках:

1. Филаретов В.В. К цифровому моделированию электронных схем в топологическом базисе ветвей // Электрон. моделирование.-1985.-№ 6.-С.92-94.
2. Филаретов В.В. Рекурсивные методы выражения определителя ненаправленного графа // Теорет. электротехника.-Львов,1986.-Вып. 40.-С.6-12.
3. Филаретов В.В. Расчет электрических цепей с помощью топологических таблиц (о статье *А.Г.Каренкова*) // Электричество.- 1986.- № 12.- С.63-64.
4. Филаретов В.В. Метод изоморфных преобразований для анализа квазиполных и квазиоднородных графов проводимостей // Электричество.- 1987.- № 5.- С. 5-9.
5. Филаретов В.В. Формирование коэффициентов функций RLC-схемы полной топологической структуры // Электричество.- 1987.- № 6.- С. 42-47.
6. Филаретов В.В. Алгоритм упорядочения деревьев на основе унисторных пометок вершин // Радиоэлектроника.- 1987.- № 6.- С. 90-91.
7. Филаретов В.В. Алгоритм формирования экономных буквенно-численных выражений для коэффициентов схемных функций // Электрон. моделирование.- 1987.- № 4.- С. 33-35.
8. Филаретов В.В. Символьно-численный анализ электронной схемы в базисе управляющих напряжений нелинейных компонентов // Проблемы нелинейной электротехники: Тез. докл. 3-й Всесоюз. конф.- Киев: Изд-во ин-та электродинамики АН УССР, 1988.- Ч. 1.- С. 183-186.
9. Филаретов В.В. Алгоритм разложения определителя ненаправленного графа проводимостей по ребрам, входящим в пути между парами вершин // Теорет. электротехника.- Львов, 1988.- Вып. 45.- С. 28-34.

10. Филаретов В.В. Унисторно-сигнальный граф электронной схемы и его анализ // *Электричество*.- 1989.- № 9.- С. 48-55.- То же. Filaretov V.V. A unistor signal flow graph for an electronic circuit and its analysis // *Electrical technology*.- 1989.- N 3.- 14 p.
11. Филаретов В.В. Неявный принцип наложения и анализ линейных электрических цепей // *Электричество*.- 1990.- № 3.- С. 37-43.
12. Филаретов В.В. Уравнения топологических функций и их некоторые свойства // *Электричество*.- 1990.- № 5.- С. 73-76.
13. Филаретов В.В. Разложение определителя гибридного графа схемы с усилителями напряжения методом удаления и стягивания сигнальных дуг // *Электрон. моделирование*.- 1990.- № 3.- С. 38-44.
14. Филаретов В.В. Алгоритмы символично-топологического анализа электрических цепей: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Ленингр. гос. техн. ун-т.- Л., 1990.- 20 с.
15. Филаретов В.В. Программа **SYMBOL** автоматического вывода передаточной функции электронной схемы произвольной структуры // Алгоритмы и устройства обработки сигналов и автоматизация проектирования.- Таллин: АН Эстонии, 1991.- С. 130-148.
16. Филаретов В.В. Алгоритм приведения развернутых алгебраических выражений топологических функций к скобочной форме и его реализация в программе **SYMBOL** // Алгоритмы и устройства обработки сигналов и автоматизация проектирования.- Таллин: АН Эстонии, 1991.- С. 149-166.
17. Филаретов В.В. Диакоптика унисторно-сигнального графа электронной схемы // *Теорет. электротехника*.- Львов, 1992.- Вып. 51.- С. 48-54.
18. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения ветвей и дуг // *Электричество*.- 1992.- № 7.- С. 31-37.
19. Филаретов В.В. Исследования *Вильгельма Фойснера* в области теоретической электротехники // *Электричество*.- 1992.- № 9.- С. 64-67.
20. Филаретов В.В. Обобщенный унисторный граф электронной схемы и его анализ // *Электричество*.- 1993.- № 5.- С. 65-70.
21. Филаретов В.В. Оптимизация формул схемных функций электрических цепей // *Электричество*.- 1993.- № 9.- С. 64-68.
22. Филаретов В.В. Оптимальный синтез формул схемных функций // *Проблемы автоматизированного моделирования в электронике: Сб. докл. международ. конф.*- Киев: Политехн. ин-т, 1994.- С. 23-27.
23. Филаретов В.В. Приоритеты в науке, или еще об одном слагаемом успеха // *Электричество*.- 1994.- № 12.- С. 63-64.
24. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // *Электричество*.- 1995.- № 4.- С. 36-43.



25. Филаретов В.В. Топологические формулы для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду // *Электричество*.- 1995.- № 11.- С. 50-55.
26. Филаретов В.В. Об иерархическом подходе к символьному анализу сложных электронных схем // *Проблемы физической и биомедицинской электроники: Сб. докл. междунар. конф.*- Киев: Национальный техн. ун-т Украины, 1996.- С. 132-136.
27. Филаретов В.В. Топологический синтез оптимальных формул для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду // *Электричество*.- 1996.- № 4.- С. 63-70.
28. Филаретов В.В. Оптимальная реализация дешифраторного метода анализа электрических цепей // *Электричество*.- 1996.- № 10.- С. 43-49.- То же. Filaretov V.V. Improved decoding method for electrical network analysis // *Electrical technology*.- 1996.- N 4.- P. 41-53.
29. Филаретов В.В. О преобразовании полного электрического многоугольника к параллельным лучевым схемам // *Электричество*.- 1997.- № 2.- С. 58-60.
30. Филаретов В.В. Топологический синтез оптимальных формул для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду (ответ автора на замечания *А.В.Нетушила*) // *Электричество*.- 1997.- № 3.- С. 67-68.
31. Филаретов В.В. Схемный подход к символьному анализу активных электрических цепей // *Электроника и связь: Науч.-техн. сб.*- Киев, 1997.- Вып. 2.- Ч. 1.- С. 97-101.
32. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // *Электричество*.- 1998.- № 5.- С. 43-52.- То же. Filaretov V.V. A topological analysis of electronic circuits by a parameter extraction method // *Electrical technology Russia*.- 1998.- N 2.- P. 46-61.
33. Филаретов В.В. Формирование символьных функций для активных электрических цепей методом стягивания и удаления ветвей // *Электричество*.- 2001.- № 4.- С. 43-51.
34. Филаретов В.В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // *Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. междунар. конф.*- Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.- С. 13-15.
35. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // *Электричество*.- 2001.- № 8.- С. 33-42.