

Санкт-Петербургский государственный технический университет

Ульяновский государственный технический университет

На правах рукописи

Филаретов Владимир Валентинович

**Топологический анализ электрических цепей
на основе схемного подхода**

05.09.05 - Теоретическая электротехника

**Диссертация
на соискание ученой степени
доктора технических наук**

Научный консультант:

докт. техн. наук, профессор М.А.Шакиров

Санкт-Петербург – Ульяновск 2002

Список условных сокращений

АД	алгебраическое дополнение
ДВ	двоичный вектор
ИНУН	источник напряжения, управляемый напряжением
ИНУТ	источник напряжения, управляемый током
ИТУН	источник тока, управляемый напряжением
ИТУТ	источник тока, управляемый током
НУИ	неудаляемый управляемый источник
ОУ	операционный усилитель
ПВ	последовательность выражений
ПС	полная схема
ПУ	показатель участия
ПУС	полная уравновешенная схема
САД	суммарное алгебраическое дополнение
ССФ	символьная схемная функция
УИ	управляемый источник
ЦКП	цепь контуров передачи
ЭАС	элементарная активная схема

Список условных сокращений	2
Введение	7
1. СОСТОЯНИЕ И ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ СХЕМНОГО ПОДХОДА	
К СИМВОЛЬНОМУ АНАЛИЗУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	17 1.1.
Выбор метода формирования ССФ	17 1.2.
Матрицы и графы - посредники в символьном анализе	
электрических цепей	21 1.3.
Схемный подход Вильгельма Фойснера	28 1.4.
Метод полных деревьев	33 1.5.
Матрично-топологический метод выделения параметров	36 1.6.
Метод цепей контуров передачи	41 1.7.
Методы схемных преобразований	45 1.8.
Нерешенные задачи и пути совершенствования	
методов формирования ССФ	51 1.9.
Выводы	54
2. ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ССФ	
ДЛЯ ПАССИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	55 2.1.
Понятие НУИ и схемные уравнения ССФ	56 2.2.
Алгоритм свертки алгебраических выражений	59 2.3.
Структура схемы - ключ к формированию оптимальных ССФ	62 2.4.
Формирование оптимального выражения определителя ПС	65 2.4.1.
Правило ПУ и минимизация операций умножения	66
2.4.2. Минимизация операций сложения и правило кратности	67
2.4.3. Сравнение оптимальных формул	
с эвристическими формулами определителей ПС	69
2.4.4. Выделение последовательно соединенных ветвей и	
мультиветвей	74
2.4.5. Выделение трехузловых подсхем и правило половинного	

деления	77
2.5. Формирование оптимальных выражений определителей для лестничных и цепных схем	81
2.6. Формирование оптимальных выражений определителей для z- и uz-схем	87 2.6.1.
Формирование оптимальных выражений uz-определителей	89 2.6.2.
Пример формирования оптимального выражения ССФ для цепной uz-схемы	91 2.7.
Формирование оптимальных выражений ССФ для ПУС	96 2.7.1.
Понятие ядра и нахождение постоянных узлов	99 2.7.2.
Топологические формулы для ядра-контур	104
2.7.3. Пример формирования выражений для ядра в виде 9-контур	106
2.7.4. Общий случай одноконтурного ядра	107
2.7.5. Пример формирования выражений для одноконтурного ядра с неконтурными ветвями	108 2.7.6.
Декомпозиция ядра и обобщения топологических формул	109
2.7.7. Пример формирования выражений для ядра в виде трех контуров	111
2.7.8. Общий случай многоконтурного ядра	112 2.7.9.
Пример формирования выражений для двухконтурного ядра с неконтурными ветвями	113
2.7.10. Правила формирования оптимальных выражений для преобразования ПУС в звезду	114
2.7.11. Формирование ССФ для ПУС на основе параметров эквивалентной звезды	116 2.8.
Выводы	117

3. ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ССФ

ДЛЯ АКТИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	119 3.1.
Эквивалентные упрощения схем с НУИ и УИ	
при разложении определителей	119 3.2.
Метод неудаляемого управляемого источника	122 3.2.1.
Выделение пассивных элементов и преобразование УИ	
в квазипассивные двухполюсники	123 3.2.2.
Выделение параметров УИ и понятие ЭАС	126 3.2.3.
Разложение определителей ЭАС через выделение НУИ	131 3.2.4.
Пример анализа уз-схемы с ИТУН	136 3.2.5.
Пример анализа уз-схемы с ИТУТ и ИНУН	140 3.2.6.
Сравнение метода НУИ с известными методами	
выделения параметров	144 3.3.
Метод стягивания и удаления ветвей	148 3.3.1.
Формула выделения параметра УИ	148 3.3.2.
Выделение параметров вырожденных и висячих УИ	152 3.3.3.
Пример анализа у-схемы с ИТУН	158 3.3.4.
Пример анализа у-схемы с ИТУТ и ИНУН	162 3.4.
Минимизация операций вычитания в схемных определителях	166 3.5.
Алгоритм формирования оптимальных выражений ССФ	169 3.6.
Формирование ССФ на компьютере	172 3.6.1.
Формирование определителей полных схем с ИТУН	173 3.6.2. Анализ
схемы полосового фильтра на базе идеальных ОУ	178
3.7. Выводы	183

4. ФОРМИРОВАНИЕ ССФ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ДЕЛЕНИЕМ ИХ НА ЧАСТИ	186 4.1.
Формула трехузловой бисекции	186 4.2.
Понятие двоичного вектора подсхемы и обобщение матричного метода бисекции	190 4.3.
Понятие минора подсхемы и топологический метод бисекции . . .	193
4.4. Топологическое правило нахождения знака при объединении подсхем	196 4.5.
Формула четырехузловой бисекции	198 4.6.
Сравнение формул схемной бисекции с формулами, реализующими методы К-деревьев и Д-деревьев	200 4.7.
Топологический метод объединения подсхем	205
4.8. Нахождение параметров схемы полосового фильтра с идеальными ОУ	210 4.8.1.
Анализ подсхем полосового фильтра	211 4.8.2.
Объединение подсхем полосового фильтра	212 4.9.
Формирование ССФ на компьютере	217 4.9.1.
Иерархическая бисекция полосового фильтра	217 4.9.2.
Анализ схемы избирательного усилителя	222
4.9.3. Анализ операционного усилителя $\mu A741$	229
4.9.4. Применение методов схемных миноров для решения систем линейных алгебраических уравнений в аналитическом виде . . .	232
4.10. Выводы	236
Заключение	239
Список использованных источников	243
Условные сокращения в названиях источников	262
Приложение: Документы, подтверждающие внедрение результатов диссертационной работы	263

Посвящается Вильгельму Фойснеру,
давние идеи которого до сих пор
не утратили своей свежести

Введение

Актуальность темы. Проблема формирования символьных схемных функций (ССФ) линейных электрических цепей решается со времени появления основополагающей работы Кирхгофа в 1847 году [27]. Интерес к разработке этой “вечной” для теоретической электротехники проблемы объясняется тем, что ССФ является аналитической моделью, позволяющей наглядно представить функционирование цепи, оценить уровни чувствительности и влияние допусков, эффективно выполнить параметрическую оптимизацию цепи. Установление связей между структурой схемы и ССФ лежит в основе структурного синтеза и получения новых схемотехнических решений. ССФ обеспечивают более высокую точность моделирования по сравнению с использованием численных методов [29], что позволяет решать плохообусловленные задачи анализа линейных электрических цепей [64].

В актуальности проблемы убеждает анализ материалов международных симпозиумов по цепям и системам (ISCAS “88 - “98), среднезападных симпозиумов по цепям и системам (MWSCAS “87, “89, “91, “94, “96), Европейской конференции по теории цепей и проектированию (ECCTD “95, “97), международных семинаров по символьным методам и приложениям к схемотехническому проектированию (SMACD “91, “92, “94, “96, “98) [131, 134 - 140, 148 - 151, 153, 159, 160, 163, 165, 166, 170].

Для формирования ССФ могут использоваться схема цепи или какие-либо вспомогательные математические модели, служащие промежуточным звеном между схемой замещения и ее ССФ. Такими моделями могут быть матрицы, графы или теоретико-множественные объекты (структурные и обобщенные числа, схемные множества и т.д.). Соответственно виду применяемого математического аппарата можно говорить о матричном, графовом или теоретико-множественном подходах к формированию ССФ.

Метод получения ССФ определяет форму ее представления. Выражения ССФ могут быть развернутыми по Г.Р.Кирхгофу или вложенными по В.Фойснеру [141], то есть с вынесенными за скобки общими множителями в числителе и знаменателе. ССФ может представлять собой единое выражение или иерархическую последовательность выражений (*sequence of expressions*), в которой следующие по порядку выражения используют в качестве параметров предыдущие выражения. Выражения ССФ характеризуются вычислительной сложностью [5, 130], а также степенью пригодности для какой-либо аналитической обработки и точных вычислений. Требуют внимания вопросы формирования оптимальных по тому или иному критерию выражений ССФ, поскольку символьные выражения, как правило, используются многократно и затраты на их получение будут возмещены.

Задача формирования компактных выражений ССФ, поставленная В.Фойснером (1902 г.), до сих пор не имеет оптимального по М.А.Бройеру (1969 г.) решения даже для классических схем с цепной и полной структурами. Причиной этого следует считать как отсутствие регулярных методов получения оптимальных по вычислительной сложности выражений ССФ, так и невозможность использования результатов, известных из области вычислительной математики и кибернетики, касающихся оптимальной свертки произвольных алгебраических выражений.

Так случилось, что в теории линейных электрических цепей преимущественное развитие получили матричный, графовый и теоретико-

множественный подходы. Это приводило к отрыву от наглядного образа схемных моделей. Промежуточные математические модели требуют затрат на их построение и ограничивают допустимый набор схемных элементов. Избыточность таких моделей обуславливает появление дубликаций - равных по величине, но противоположных по знаку подобных членов, в формируемых выражениях ССФ. Избыточные операции вычитания увеличивают погрешность при вычислениях на основе ССФ и затрудняют переход к приближенным выражениям ССФ.

Для формирования выражений ССФ, оптимальных по вычислительной сложности и по количеству операций вычитания, оказывается полезным так называемый схемный подход, не требующий применения каких-либо избыточных моделей. Рабочей моделью является при этом непосредственно схема замещения, содержащая пассивные элементы и управляемые источники (УИ), а формирование ССФ сводится к рассмотрению схем, производных от исходной схемы.

Цель работы - развитие теории электрических цепей путем создания универсальной методологии символьно-топологического анализа на основе схемного подхода. Объектом исследования являются инвариантные во времени линейные электрические цепи с сосредоточенными параметрами.

Поставленная цель достигается разработкой:

- топологических методов получения выражений ССФ, наиболее пригодных по форме представления для многовариантного моделирования, аналитических исследований и точных вычислений;

- эффективных обобщений символьно-топологических методов анализа на случай схем со всеми типами УИ;

- топологических методов анализа схем делением их на части, предусматривающих формирование как единых выражений, так и последовательностей выражений ССФ, которые позволяют увеличить сложность анализируемых схем и точность моделирования;

- универсальных алгоритмов формирования оптимальных выражений ССФ, удобных как для анализа схемы вручную, так и для ее исследования на компьютере, которые облегчают внедрение символьного моделирования в учебный процесс и инженерную практику.

Методы исследования. В работе использовались: теория линейных электрических цепей, методы матричного и топологического анализа электрических цепей, элементы теории матриц, графов, множеств, алгоритмов, комбинаторного анализа и математической логики.

Научная новизна основных результатов работы

1. Разработан топологический метод выделения параметров УИ, не требующий трудоемкого перечисления контуров и цепей контуров передачи. Разложение определителя исходной схемы приводится к разложению определителей двух производных схем: 1) схемы, образованной в результате придания выделяемому УИ статуса так называемого неудаляемого УИ (НУИ); 2) схемы, которая образована путем удаления выделяемого УИ. Знак перед выделяемым параметром берется положительным, а ориентация соответствующего УИ учитывается в ориентации производного от него НУИ. Показано, что выделением параметров пассивных элементов и УИ можно свести разложение определителя произвольной линейной схемы к нахождению определителей так называемых элементарных активных схем (ЭАС), содержащих исключительно НУИ. Доказано, что знак определителя ЭАС равен знаку полного дерева графа тока-напряжения, в котором генераторы тока (приемники напряжения) соответствуют генераторам НУИ (приемникам НУИ) ЭАС.

2. Предложена схемная интерпретация для операции удаления некоторых строки i и столбца j в матрице схемы, состоящая в соединении этой схемы с НУИ, генератор и приемник которого ориентированы из базисного узла в узлы i и j соответственно. В результате такого соединения получается схема, определитель которой назван минором определителя исходной схемы.

Использование при нахождении ССФ миноров схемы вместо миноров матрицы позволяет избежать построения систем уравнений электрического равновесия и полностью снять ограничения на тип линейных элементов, допустимых для того или иного координатного базиса. Важно, что выражения миноров схемы в отличие от миноров матрицы можно сформировать без дубликаций, применив топологический метод выделения параметров.

3. Разработан топологический метод стягивания и удаления ветвей, обобщающий метод Фойснера для выделения параметров пассивных элементов. Число узлов у первой производной схемы для этого метода всегда меньше на единицу чем у исходной схемы, что позволяет уменьшить количество производных схем, подлежащих рассмотрению. Эффективность метода обусловлена также тем, что знак параметра УИ учитывается не в ориентации соответствующего НУИ, а непосредственно перед выделяемым параметром. В отличие от матричного метода выделения параметров этот знак не зависит от нумерации узлов схемы, а определяется ориентацией выделяемого УИ, что позволяет минимизировать число операций вычитания в выражениях ССФ.

4. Предложен комплекс эквивалентных схемных упрощений и преобразований, дополняющий методы выделения параметров, который позволяет избежать избыточных выкладок при разложении схемных определителей и уменьшить сложность формируемых выражений ССФ. Рассмотрены топологические свойства схем, определители которых тождественно равны нулю. Выведены топологические следствия расположения элементов схемы: 1) в контурах из генераторов напряжения и генераторов НУИ или приемников тока и приемников НУИ; 2) в сечениях из генераторов тока и генераторов НУИ или приемников напряжения и приемников НУИ.

5. Сформулированы правила выбора элементов и подсхем, первоочередное выделение которых обеспечивает получение выражений ССФ, оптимальных по вычислительной сложности и количеству операций вычитания, на основе

схемной модели электрической цепи и производных от нее схем. При этом исключаются как формирование развернутого выражения ССФ, так и последующая его свертка, практически неосуществимые при анализе сложных электрических цепей. Правила использованы для получения оптимальных выражений определителей классических схем с лестничной, цепной и полной структурами. Предложена методика вывода точных рекуррентных соотношений для числа операций умножения и сложения в выражениях схемных определителей.

6. Разработаны диакоптические методы рекурсивного деления схемы и иерархического объединения подсхем, предусматривающие формирование единого выражения и последовательности выражений ССФ соответственно. Методы свободны от ограничений на состав учитываемых линейных элементов и число внешних узлов подсхем. Параметрами подсхемы являются ее миноры, которые находятся как определители схем, образованных в результате подсоединения НУИ к внешним узлам этой подсхемы. Представление подсхем их минорами дает возможность многократно уменьшить число слагаемых в диакоптических формулах по сравнению с методами анализа по частям на основе унисторного графа. С другой стороны, применение миноров схем вместо миноров матриц позволяет избежать появления дубликаций в сомножителях диакоптических формул.

7. Создана специальная методология символично-топологического анализа для класса полных схем, параметры которых удовлетворяют условиям равновесия Ч.Уитстона - А.П.Новикова [50,172]. В основе методологии лежит исследование произвольно выбранной подсхемы, покрывающей все узлы полной уравновешенной схемы (ПУС) и не содержащей контуров с четным количеством ветвей. Предложенные выражения ССФ для ПУС лишены избыточности, обусловленной зависимостью параметров ПУС, и используют минимальное количество операций извлечения квадратного корня.

Практическая значимость основных результатов работы

1. Развита схемный подход к формированию ССФ, что позволило получать новые результаты в теории линейных электрических цепей, базируясь непосредственно на их схемных моделях и способствуя более глубокому постижению связей между структурой схемы и ее ССФ. Схемное решение является топологическим, поскольку номера или буквенные обозначения узлов служат лишь для указания соединений элементов и подсхем. Это избавляет от трудоемкой перенумерации узлов, предусмотренной матричным аппаратом. Вскрытые возможности схемного подхода создают условия для переноса центра тяжести со вспомогательных математических аппаратов (матриц, графов, множеств и др.), во многом чуждых ясным физическим представлениям, на аппарат разработанной методологии, которая в большей степени ориентирована на логику мышления специалиста по электротехнике и радиотехнике.

2. Практичность методологии как инструмента для исследования схем без помощи компьютера обусловлена следующими ее особенностями:

- делаются излишними рутинные манипуляции с матрицами, графами или другими абстрактными объектами (графы могут использоваться в качестве упрощенных изображений производных схем, но не как математические модели);

- анализ исходной схемы сводится к анализу более простых схем (новые управляющие связи между элементами не возникают или число таких связей может быть уменьшено); ключом к минимизации объема выкладок и получению оптимального выражения ССФ является структура схемы и состав ее элементов;

- чтобы найти ССФ для несложной пассивной схемы или схемы с УИ не требуется знания всех положений и методов универсальной методологии - достаточно усвоить понятия НУИ, определителя и минора схемы, а также овладеть методом НУИ или методом стягивания и удаления ветвей;

- исключается избыточность формируемых ССФ, предельно упрощается учет всех типов УИ и получение функций чувствительности;

- по знаку схемного определителя, в отличие от знака определителя матрицы, можно судить об устойчивости активных частотно-независимых схем и схем на базе операционных усилителей (ОУ).

3. Практичность методологии как инструмента для исследования схем на компьютере вытекает из следующих ее особенностей:

- схема задается списком элементов с указанием узлов подключения, поэтому не возникает вопроса об учете разреженности электрических цепей как в случае матричного представления;

- формируемые выражения числителей и знаменателей ССФ не содержат операций деления, которые нежелательны, как и операции вычитания, с точки зрения численных расчетов, а также препятствуют аналитической обработке и упрощению выражений;

- оптимальные по вычислительной сложности выражения требуют во много раз меньше операций, чем традиционные выражения ССФ; показатели оптимальных выражений недоступны для современных пакетов компьютерной алгебры, в которых не учитываются топологические свойства электрических цепей;

- показатели выражений ССФ, оптимальных по числу операций вычитания, недостижимы при формировании ССФ на основе известных методов выделения параметров, не позволяющих ставить знак перед выделяемым параметром УИ в зависимость от ориентации его генератора и приемника;

- показатели оптимальных последовательностей выражений ССФ, сформированных методом иерархического объединения подсхем, делают возможными и эффективными многовариантный анализ и оптимизацию электрических цепей в сотни узлов и элементов на современных персональных компьютерах;

- разработанные на основе универсальной методологии компьютерные программы могут служить безбумажным учебным пособием и интеллектуальным справочником, расширяющим возможности по проектированию аналоговых электро- и радиочепей.

Реализация результатов работы. Теоретические результаты диссертационной работы составили ядро читаемого на кафедре “Электроснабжение” УлГТУ альтернативного курса ТОЭ для направления 5529. Методика формирования ССФ внедрена в учебный процесс и научные исследования *Московского технического университета связи и информатики, Вологодского и Хабаровского государственных технических университетов и Чувашского государственного университета.*

Результаты диссертации, реализованные в пакете программ **SYMBOL** для формирования ССФ электрических цепей и решения систем линейных алгебраических уравнений в аналитическом виде, внедрены в *Национальном техническом университете Украины, Санкт-Петербургском государственном техническом университете (СПбГТУ), Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете, Ульяновском отделении Института радиотехники и электроники РАН, Государственном астрономическом институте им. П.К.Штернберга Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова;* используются на протяжении ряда лет в *Научно-исследовательском электромеханическом институте НПО “АНТЕЙ” (Москва) и Жешувском технологическом университете (Польша).* Ранние версии пакета **SYMBOL** были внедрены в 10 учреждениях и предприятиях [90], в том числе в *Институте кибернетики АН Эстонии* в составе программного обеспечения “Персональная рабочая станция инженера-разработчика аналоговых и аналого-цифровых устройств и средств автоматики (ПРС-1)” (Постановление СМ СССР № 675-155 от 16.06.87, задание 1.2.9.). В настоящее время пакет **SYMBOL** свободно распространяется через Интернет-сайт <http://astrometric.sai.msu.ru/~symbol/> (Москва).

1. СОСТОЯНИЕ И ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ СХЕМНОГО ПОДХОДА К СИМВОЛЬНОМУ АНАЛИЗУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Под символьным анализом электрической цепи понимается формирование ее ССФ [23, 162]. Среди вопросов теории линейных электрических цепей формирование ССФ занимает особое место. За последние полтора века этому вопросу были посвящены тысячи журнальных статей, сотни диссертаций и десятки монографий. Оценить объем интеллектуального задела в этой области позволяет изучение обобщающих работ [2, 13, 23, 25, 36, 47, 51, 56, 57, 62, 90, 116, 120, 123, 124, 136, 148, 162]. Неисчерпаемость данной тематики во многом обуславливается бесплодным поиском ответа на вопрос о предпочтительности того или иного метода. Трудности усугубляются тем, что многие из публикаций дублируют друг друга, используют различный понятийный аппарат, игнорируя терминологию предшествующих работ [99], бездоказательно декларируют преимущества тех или иных методов и алгоритмов.

1.1. Выбор метода формирования ССФ

Заглянуть в корень проблемы символьного анализа электрических цепей может помочь классификация подходов к формированию ССФ, приведенная в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Классификация подходов к формированию ССФ

Тип подхода	Путь получения ССФ
1. Матричный	Схема - матрица – ССФ
2. Графовый	Схема – матрица - граф – ССФ или схема - граф – ССФ
3. Теоретико-множественный	Схема – матрица - структурное (обобщенное) число - ССФ
4. Схемный	Схема - ССФ

В рамках каждого из подходов можно выделить методы, предусматривающие раздельное нахождение числителя и знаменателя. Эти методы по существу реализуют способ Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений [10, 58]. Вторая группа методов более близка к способу Гаусса [4, 10], поскольку результатом их применения являются ССФ, у которых числитель и знаменатель не выражены в явном виде. Такое подразделение полезно при оценке методов, поскольку методы, реализующие каждый из четырех подходов по Крамеру или по Гауссу, обладают сходными вычислительными свойствами.

Выбор того или иного метода определяется не только трудоемкостью получения ССФ, но и желательной формой ее представления, так как ССФ предназначены в большинстве случаев для многократного применения [15, 33, 35, 39, 136, 137]. Форма представления в свою очередь обуславливает сложность выражений ССФ и тип используемых в них вычислительных операций [13, 137]. Выражения ССФ могут быть развернутыми по Кирхгофу [27] или вложенными (свернутыми, компактными) по Фойснеру [141], избыточными или свободными от дубликаций, точными или приближенными,

то есть применимыми в заданных диапазонах изменения частот и параметров. Приближенные выражения используются в случаях анализа сложных интегральных схем, когда желательно, а иногда и единственно возможно, обойтись без полного выражения ССФ, выполнив его упрощение (аппроксимацию) [131, 140, 148, 149, 153]. Это позволяет представить ССФ таких схем в обозримой форме, резко сократив затраты на символьное моделирование.

Обычно ССФ представляется в виде единого выражения, параметрами которого являются только параметры элементов схемы. С точки зрения экономии вычислительных операций бывает удобно представить ССФ в виде последовательности выражений, что достигается введением дополнительных переменных, задающих часто встречающиеся подвыражения в едином выражении [102, 152, 163, 169]. Прямое формирование последовательности выражений ССФ обеспечивается любым методом, реализующим один из подходов по Гауссу.

Наконец, выражения ССФ могут быть полностью символьными или символьно-численными, в которых символами задается только часть параметров схемы [15, 16, 25, 65, 79, 116, 162, 164, 166]. Та или иная форма представления выражений ССФ зависит от того, используются ли ССФ для аналитических или же только численных исследований [46 - 48, 51, 52, 62, 159].

Исходя из потребностей теории и практики анализа и проектирования электрических цепей на современном этапе [7, 12, 22, 43, 46, 51, 136, 148, 159, 162, 164], положим в основу сравнения методов формирования ССФ три основных требования: 1) универсальность; 2) вычислительная устойчивость; 3) реализуемость параллельных вычислений [4, 5].

Под универсальностью понимается применимость метода к широкому классу линейных схем и степень его пригодности для формирования ССФ как в качестве инженерной методики [52], так и в виде компьютерной программы [82, 91, 92, 96, 109, 159, 162]. Универсальный метод должен обеспечивать

получение не только единых выражений, но и последовательностей выражений ССФ, быть удобным для формирования как символьных, так и символьно-численных выражений ССФ.

Требование устойчивости касается свойств выражений ССФ при проведении численных расчетов в случае плохой обусловленности, то есть существенного разброса значений параметров и других численных вырождений, что характерно для реальных электрических цепей [43, 49, 64]. В этом требовании должна предусматриваться возможность формирования выражений ССФ, оптимальных по сложности [130, 164] и числу операций вычитания, которые являются основным источником погрешности при вычислениях с ограниченным числом значащих цифр [43, 53, 64]. Необходимость свертки (желательно оптимальной свертки по Бройеру [130]) обусловлена тем, что свертка выражения приводит не только к уменьшению их сложности, но и к увеличению точности вычисляемого результата [5, 53]. Сокращение сложности выражений ССФ обеспечивает конкурентоспособность символьных методов с численными методами формирования и решения уравнений электрического равновесия. Например, при расчете частотных характеристик схемы, имеющей 50 узлов, символьный метод оказывается в 10 раз эффективнее численного [22].

Третье требование к оптимальному методу формирования ССФ обусловлено высочайшей степенью интеграции современных электрических цепей, которой неспособна противостоять все возрастающая мощность компьютерной техники [149]. Союзником на стороне проектировщиков электро- и радиоаппаратуры являются методы расчета схем делением их на части, а также фундаментальное свойство сложных электрических цепей - разреженность их структуры [4, 152].

1.2. Матрицы и графы - посредники в символьном анализе электрических цепей

Как следует из табл. 1.1, всякого рода искусственные построения, будь-то матрица схемы, ее граф или структурное число, в определенной степени препятствуют выявлению физической сущности поведения исследуемой схемы, удлиняя путь к ее ССФ. Здесь и далее для краткости схема замещения электрической цепи (см. ГОСТ 19880-74) называется просто схемой. Математическая формулировка задачи символьного анализа способна затемнить ее суть и привести к размножению вариантов решения, становящемуся самоцелью. Действительно, количество методов и алгоритмов формирования ССФ столь велико, что оно может соперничать с обилием рецептурных приемов, разработанных для решения задачи синтеза электрических цепей [115]. При этом физическая сущность электрической цепи как объекта исследования отодвигается на второй план, а на первом плане возникают уже не электротехнические, а математические трудности, обусловленные издержками соответствующих аппаратов. Основные усилия специалистов приходится направлять на преодоление этих трудностей [12].

Существующее многообразие матричных методов и координатных базисов для моделирования электрических цепей [12, 23, 36, 57, 116] является скорее бедой, чем благом, поскольку обусловлено необходимостью поместить в “прокрустово ложе” матрицы физическую сущность электрической цепи, содержащей разнообразные элементы. Смешанные (контурно-узловые) координатные базисы [20, 21, 116] не приобрели популярности вследствие более сложных правил построения матрицы схемы по сравнению с однородными контурным и узловым базисами [58]. Наибольшее распространение получил модифицированный метод узловых напряжений, позволяющий учитывать УИ всех четырех типов и идеальные операционные усилители (ОУ) [36, 43, 152, 162]. Однако искусственное введение токовых переменных в расширенный узловой координатный базис приводит к известным неудобствам при его использовании [152].

Избыточность матричного подхода заключается в том, что параметр элемента схемы может учитываться в матрице схемы более одного раза. Например, в случае анализа у-схем источником избыточности служит то обстоятельство, что параметры у-ветвей и источников тока, управляемых напряжением (ИТУН), ни один из узлов которых не является базисным узлом схемы, входят в матрицу узловых проводимостей 4 раза - 2 раза с положительным знаком и 2 раза с отрицательным [23, 58].

Модели схем в виде графов (см. вторую строку табл. 1.1), были призваны уменьшить избыточность матричных моделей, сделав переход к ССФ более простым и обусловленным структурой схемы. Операции над графами оказываются нагляднее соответствующих операций с матрицами. Однако все известные виды графов при отображении схемы с УИ оказываются неизоморфными ей. Это вынуждает использовать, наряду с изображением схемы, рисунок графа в качестве вспомогательной математической модели.

При использовании ненаправленного графа [23] пассивной подсхемы удастся исключить дубликации, обусловленные избыточностью представления пассивных элементов в матрице схемы. Однако отображение на графе активных элементов с помощью сигнальных или унисторных дуг неизбежно приводит к ССФ, содержащим дубликации, то есть избыточным ССФ. Например, появление дубликаций в выражении определителя двунаправленного (унисторного) графа обусловлено тем, что унисторные графы ИТУН содержат дуги как с положительным, так и отрицательным весом [23, 62]. В определителе гибридного графа [51, 89] дубликации образуются при отображении источников напряжения, управляемых напряжением (ИНУН), генератор и (или) приемник которых неинцидентны базисному узлу схемы [89], что может иметь место в практической схемотехнике [7]. Оба предыдущих замечания можно отнести также к унисторно-сигнальному графу [83, 86, 93].

Избыточность графов активных подсхем вынуждает искать способы устранения дубликаций в процессе формирования ССФ, поскольку количество

избыточных пар слагаемых в выражении определителя графа достаточно сложной схемы может в несколько раз превышать число существенных слагаемых. Это показали эксперименты с программами, реализующими метод унисторного графа [82, 90 - 92, 109]. Некоторые способы сокращения дубликаций, рассмотренные в работе [62], не приводят к радикальному решению этой проблемы. В общем виде проблема исключения дубликаций для унисторного и унисторно-сигнального графов решается на основе первоочередного выделения параметров пассивных ветвей (см. формулы (1.2) и (1.3)) [85, 86, 90, 94]. Однако при реализации этого метода на компьютере приходится довольствоваться частичным устранением дубликаций вследствие высоких вычислительных затрат [98, 112]. Кроме того, используя унисторный граф, принципиально невозможно исключить все дубликации в случае отнесения дуг, отображающих некоторый ИТУН, к различным подсхемам [102, 108].

Подобно матричным моделям, существенным недостатком графовых моделей схем является ограниченный набор типов пассивных элементов и УИ. Это способствовало и способствует “размножению” модификаций топологических формул, ориентированных на те или иные типы элементов схем. Ценность известных методик значительно снижает наличие каких-либо ограничений в базисе элементов, подлежащих учету. Графы нерегулярных для выбранного базиса УИ обладают, как правило, еще большей избыточностью, что является “ахиллесовой пятой” всех до сих пор разработанных обобщений, включая последние исследования [13]. Этому недостатка лишен обобщенный унисторный уз-граф, на котором предусматривается отображение нерегулярных УИ унисторно-подобными элементами [96]. Однако платой за такую возможность является необходимость рассмотрения 2^n производных графов (n - число нерегулярных УИ) и говорить об эффективности компьютерной реализации не приходится [96, 113, 114].

Элементы матрицы схемы, равные нулю, не отображаются на графе схемы, что важно для электрических цепей, которым присуща разреженность структуры. Исходной посылкой для разработки теоретико-множественного подхода (см. третью строку табл. 1.1) также служило желание учесть это свойство электрических цепей, но не путем наглядного изображения ненулевых элементов матрицы схемы, а посредством списочного хранения

этих элементов и организации работы только с ненулевыми элементами [2, 63, 64]. Такое усовершенствование матричного подхода в большей степени ориентировано на машинные выкладки, чем на использование человеком, поскольку применяется тяжеловесный теоретико-множественный аппарат и операция декартового произведения множеств [2].

Избыточность матричных моделей в полном объеме наследуется производными от них теоретико-множественными объектами, поскольку структурное или обобщенное число по сути является сжатой матрицей схемы. Например, в выражениях ССФ, формируемых на основе обобщенных чисел для u -схемы с ИТУН, присутствуют дубликации, обусловленные нерациональным учетом как пассивных, так и активных элементов схемы [64]. Эффективный алгоритм, не связанный с перебором слагаемых, для исключения этих дубликаций не известен.

Формирование ССФ с помощью матриц и графов значительно усложняется в случае схем с различными типами УИ, что поставило под сомнение привлекательность символьных методов для проектировщиков электрических цепей. Действительно, главными достоинствами символьно-топологических методов изначально являлись наглядность и удобство в применении [27, 44, 141]. Методическая ценность матричного подхода к формированию ССФ оказывается более низкой, чем графового подхода, так как работа с символьными таблицами занятие существенно более изнурительное, чем работа с числовыми матрицами. Преобладающая в настоящее время тенденция к повышению эффективности компьютерных реализаций матричного и графового подходов [150, 152, 169] приводит к тому, что алгоритмы оказываются, как правило, слишком сложными в освоении и трудоемкими в использовании при исследовании простых схем. Однако каждому обладателю компьютерной программы вывода ССФ желательно владеть эффективной методикой символьного анализа (точно также как

владельцу калькулятора, чтобы не попасть впросак, полезно знать таблицу умножения).

Важное место ССФ занимают в подготовке специалистов по электротехнике и радиотехнике [159]. Однако в традиционных курсах по теории электрических цепей основную нагрузку несут методы контурных токов и узловых напряжений. Это препятствует полной реализации возможностей аналитического представления зависимостей, поскольку вначале приходится объяснять студенту правила построения уравнений, а затем ему предстоит их решить по Крамеру или по Гауссу. Типична ситуация, когда молодой специалист вместо того, чтобы немедленно записать ССФ простейшей схемы непосредственно по ее виду, начинает составлять для нее уравнения по методу узловых напряжений или контурных токов. Если параметры схемы заданы как проводимостями, так и сопротивлениями, то ее обычно начинают приводить к однородному базису, выбирая тем самым более трудоемкий путь решения задачи. Наличие в схеме УИ, отличных от ИТУН или ИНУТ, как правило, приводит в замешательство.

Применение графового подхода для получения ССФ следует признать недостаточно эффективным в обучении, поскольку существует тенденция к выведению соответствующих методик за рамки учебных курсов [12, 123]. Основной причиной этого является то, что известные методики топологического анализа, несмотря на красоту и изящество, требуют существенно больших затрат времени на овладение ими, по сравнению с методиками построения уравнений электрического равновесия. Дополнительным доводом в пользу изучения матричных методов служит то обстоятельство, что численные методы решения уравнений преподаются ранее в математических дисциплинах.

Матрицы и графы, выступая в роли посредников, требуют за свои услуги существенно более высокой платы, чем снижение методической ценности соответствующих алгоритмов формирования ССФ. Основной недостаток

матричных и графовых представлений - их избыточность приводит к тому, что количество дубликаций увеличивается экспоненциально с усложнением схемы, препятствуя формированию компактных ССФ и уменьшая сложность анализируемых схем.

Погрешность расчетов на основе избыточных ССФ может оказаться недопустимо высокой или привести к полному искажению результата, о чем пользователь компьютера может и не подозревать [64]. Неприятности дубликации доставляют при получении приближенных ССФ, значительно снижая надежность соответствующих программ символьного анализа [140]. Важно подчеркнуть, что неустранимая погрешность возникает уже на этапе построения матрицы схемы, поскольку вычисление ее элементов проводится с конечным числом значащих цифр [43, 49, 118]. Это относится не только к численному, но и к символьному анализу, так как элементы матриц будут вычисляться перед проведением других операций в выражениях ССФ.

Искать альтернативу матричному аппарату побуждает и то, что он не в полной мере позволяет учесть специфику электрических цепей, а именно, по знаку определителя матрицы узловых проводимостей или контурных сопротивлений нельзя судить об устойчивости частотно-независимых цепей [115, 158]. С другой стороны, знак схемного определителя отражает эту фундаментальную характеристику активной электрической цепи [157, 158].

Критические замечания в адрес методов, реализующих матричный, графовый и теоретико-множественный подходы, не означают принижения значения этих методов. Напротив, изучая зарубежные работы последних лет можно прийти к мысли, что значительному продвижению в области компьютерного символьного моделирования мы обязаны использованию математических аппаратов матриц и графов [132, 134, 135, 137, 138, 149, 152, 153, 165, 166, 170]. Вместе с тем изложенное выше позволяет утверждать и то, что посреднические услуги матриц и графов не только отрывают нас от физических представлений, но и обходятся нам слишком дорого, препятствуя

разработке универсальных и точных методов формирования ССФ электрических цепей.

Итак, существуют серьезные основания для того, чтобы сосредоточить усилия на разработке схемного подхода (см. четвертую строку табл. 1.1), который обеспечивает наиболее короткий путь к ССФ, минуя построение вспомогательных математических моделей в виде уравнений, матриц, графов или теоретико-множественных объектов. Применение схемного подхода снимает вопросы учета избыточности и разреженности структуры электрических цепей, поскольку задание схемы списком ее элементов с указанием узлов подключения является не только исходной, но и рабочей информацией. Следует подчеркнуть, что в случае пассивных электрических цепей без взаимных индуктивностей графовый и схемный подходы отождествляются, поскольку ненаправленный граф схемы по существу является ее упрощенным изображением, а не математической моделью.

1.3. Схемный подход Вильгельма Фойснера

До формулирования законов электрического равновесия анализ разветвленных цепей, более сложных, чем “мостик Уитстона” представлял собой непростую задачу [172]. После опубликования Кирхгофом своих законов в 1845 году [27] появилась возможность использовать для анализа произвольной электрической цепи достаточно разработанный к этому времени аппарат определителей или метод Гаусса. Однако спустя два года Кирхгоф, очевидно, желая сделать процесс получения решения более наглядным и приблизиться к физической сущности поведения анализируемой схемы, предложил метод анализа z-схем без управляющих связей. Этот метод предусматривает использование непосредственно схемы замещения цепи и не требует предварительного составления ее уравнений. Так полтора с лишним века назад был выдвинут схемный подход к анализу электрических цепей.

Дуальный результат для у-схем опубликовал Максвелл в 1873 году [44]. В литературе по этому поводу обычно называют 1892 год - дату третьего издания знаменитого трактата [2, 13, 56]. Работа Максвелла подвела к определению ССФ в виде отношения

$$H = \Delta N / \Delta D, \quad (1.1)$$

где ΔN и ΔD - соответственно числитель и знаменатель ССФ, в которых параметры всех элементов схемы представлены символами. Указанные результаты Кирхгофа и Максвелла не были развиты, если не принимать во внимание их математическую интерпретацию [128], до появления работ Фойснера [141 - 144].

Фойснер обратил внимание на трудности построения ССФ с помощью топологических формул Кирхгофа и Максвелла, объяснив в 1902 году, почему они не находят применения у специалистов и отсутствуют в справочниках по физике [141]. Нахождение ССФ по Фойснеру предусматривает разложение определителей исходной схемы и производных от нее схем. Важно, что на каждом шаге расчета приходится иметь дело со схемой, менее сложной, чем исходная схема, а не с абстрактными сочетаниями ветвей исходной схемы. Схемный определитель в зависимости от типа элементов схемы раскрывается по одной из двух формул [141, 144]

$$\Delta = y\Delta_y + \Delta^y \quad (1.2)$$

или

$$\Delta = z\Delta^z + \Delta_z, \quad (1.3)$$

где нижний индекс при символе Δ указывает на стягивание у- или z-ветви, а верхний - на их удаление.

Чтобы упростить разложение определителей сложных схем, Фойснер предложил следующие формулы [141]

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \quad (1.4)$$

и

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2(a,b) + \Delta_1(a,b) \Delta_2, \quad (1.5)$$

где Δ_1 и Δ_2 - определители первой и второй подсхем. Обозначение в скобках после Δ указывает на объединение внешних узлов a и b в соответствующих подсхемах. Формула (1.4) применяется, когда первая и вторая подсхемы имеют единственный общий узел. Для использования формулы (1.5) необходимо, чтобы схема делилась на подсхемы по узлам a и b .

Рекурсивное применение формул (1.2) - (1.5) позволяет представить определитель схемы сразу в окончательной форме, то есть в компактном виде с вынесенными за скобки общими множителями. Между тем развернутые символьные выражения, составленные из произведений параметров ветвей деревьев и дополнений деревьев схемы по Максвеллу и Кирхгофу, нуждаются в дополнительных трудоемких преобразованиях.

Для нахождения числителя ССФ Фойснер ввел понятие контура передачи схемы, который обязательно содержит независимый источник и ветвь с искомым откликом [144]. При этом разложение числителя ССФ выполняется по формуле

$$\Delta_N = \sum_{i \in \rho} P_i \Delta_i \quad (1.6)$$

где ρ - множество контуров передачи схемы; P_i - произведение проводимостей, входящих в i -й контур передачи; Δ_i - определитель схемы, образованной из исходной схемы в результате стягивания всех ветвей i -го контура передачи. Знаменатель ССФ равен определителю производной схемы, полученной стягиванием (удалением) независимого источника напряжения (тока) и ветви с искомым током (напряжением).

Наиболее полно формулы (1.1) - (1.6) рассмотрены в учебнике [23], удостоенном Ленинской премии. Этих формул вполне достаточно для

эффективного символьного анализа пассивных электрических цепей без взаимных индуктивностей. Однако заслуги немецкого ученого, заложившего фундамент схемного подхода, не были должным образом оценены ни современниками, ни последующими поколениями исследователей. Немногочисленные ссылки на его статьи [141, 144] в зарубежных источниках, например в [56, 129], весьма поверхностны и некорректны. Обычно Фойснеру приписывается авторство только одной из формул - формулы (1.2) [56, 129, 162]. Формальной причиной искажения научных приоритетов является то, что спустя пятьдесят с лишним лет после Фойснера формулы (1.2), (1.4) - (1.6) были получены и опубликованы сначала Персивалем (кроме формулы (1.6)), а затем Робишо и Мэйсоном (кроме формул (1.4) и (1.5)) [47, 56, 62].

Работы Фойснера, опубликованные авторитетными “Анналами физики” (в этом журнале публиковался и Кирхгоф [27]), почему-то не были замечены специалистами по теории электрических цепей. Отсюда при указании соответствующих результатов даются ссылки на Персиваля и Мэйсона, как в [154], или формула (1.2) приписывается Фойснеру, а формула (1.6) - четвертому претенденту на авторство - Сикету [129] и т.д. Дело доходит до курьезов. Так, в работе [56, с. 241] при наличии в библиографическом списке статей Фойснера [141, 144] утверждается, что формулы (1.4) и (1.5) принадлежат Персивалю. Противоречия в отношении авторства этих формул имеются также в сравнительно недавно изданной капитальной монографии Лина “Символьный анализ цепей” [162, с. 45 и с. 109].

Искажения научных приоритетов в зарубежных источниках не могли не повлечь за собой неточности при указании авторства в отечественной литературе [1, с. 57], [13, с. 11, с. 95 и с. 207], [23, с. 238 и с. 239], [62, с. 24 и с. 25] и т.д. Тем не менее, приоритет Фойснера был установлен в нашей стране [90], а его имя получило известность после опубликования работ [94, 95, 97, 99, 100]. Дополнительные библиографические исследования, проведенные в фондах Марбургского университета (ФРГ), позволили обнаружить еще две статьи Фойснера по теории цепей, опубликованные в Докладах заседаний Общества содействия естествознанию Марбурга [142, 143]. Изучение работы

[142] показало, что Фойснеру принадлежит доказательство формулы для числа деревьев полной схемы (полного графа) q^{q-2} , где q - узлов схемы (графа). Это доказательство было повторно опубликовано в журнале Лондонского математического общества спустя 56 лет [100].

К сожалению, имя Фойснера не упоминается в диакопике [99] (см., например, [57, 117]), хотя он был, по-видимому, первым, кто использовал понятие частичной схемы (подсхемы) для анализа электрических цепей [141]. Вызывает удивление, что о Фойснере ничего не известно специалистам по теоретической электротехнике в самой Германии. Это показало обсуждение доклада [137] на пятом международном семинаре по символьным методам и приложениям к схемотехническому проектированию.

В начале 20-го века в электротехнике не применялись активные элементы и не существовало понятия УИ. Интенсивные исследования вопросов анализа схем с УИ, используемых в моделях электронных ламп и транзисторов, начались лишь в середине 50-х годов [56, 133]. Фойснеру, который скончался в 1928 году, не пришлось заниматься обобщением своего подхода. Непросто объяснить то обстоятельство, что среди работ по символьному анализу активных электрических цепей крайне мала доля работ, которые опираются на схемные представления и используют в качестве расчетной модели непосредственно схему замещения цепи. Основные из этих работ систематически обсуждаются ниже.

1.4. Метод полных деревьев

Первоначально этот метод был разработан для у-схем с ИТУН [133]. Стержневой идеей метода Коутса является замена всех пассивных элементов схемы, заданных проводимостями, вырожденными ИТУН, у которых управляемая и управляющая ветви параллельны. Далее, для краткости, будем именовать управляемую и управляющую ветви УИ соответственно

генератором и приемником, используя терминологию Хуана [154, 156]. Полученная в результате вспомогательная схема, содержащая исключительно ИТУН, является расчетной моделью метода Коутса.

Полным деревом схемы Коутса называется связанная подсхема, покрывающая все узлы исходной схемы. Содержащиеся в этой подсхеме генераторы ИТУН образуют дерево, а в дополнение этого дерева обязательно входят приемники одноименных ИТУН, и наоборот, дерево образуется приемниками, а дополнение этого дерева - генераторами одноименных ИТУН. Определитель полного дерева по абсолютной величине равен произведению параметров ИТУН, генераторы и приемники которых образуют это дерево.

Знак определителя полного дерева находится с помощью топологической процедуры Коутса [56, 133]. Для этого необходимо пронумеровать узлы полного дерева от 0 до $q-1$, узел с номером 0 считается базисным узлом. Генератор и приемник, относящиеся к одному ИТУН, должны иметь одинаковые порядковые номера. Алгоритм нахождения знака в предлагаемой здесь интерпретации содержит следующие шаги:

1) $\sigma = 0$; 2) для каждого независимого узла $i = 1, 2, \dots, q-1$ выполнить три операции: а) найти путь от узла i к узлу 0 в дереве, образованном генераторами; если первый по порядку генератор пути (главный генератор) направлен от базисного узла, то $\sigma = \sigma + 1$; б) найти путь от узла i к узлу 0 в дереве, образованном приемниками; если первый по порядку приемник пути - главный приемник направлен от базисного узла, то $\sigma = \sigma + 1$; в) из номеров главных генератора и приемника составить i -й столбец подстановки p ; 3) получить число инверсий l в подстановке p ; 4) найти знак определителя полного дерева по формуле $(-1)^{\sigma+l}$.

Определитель схемы Коутса получается как сумма определителей полных деревьев, которые можно выделить в этой схеме. Поэтому метод Коутса не позволяет выполнять автоматическую группировку и свертку слагаемых числителя и знаменателя для формирования ССФ в компактном виде.

Применение этого метода для получения ССФ без помощи компьютера ограничивает также трудоемкая процедура нахождения знака полного дерева и то обстоятельство, что вспомогательная схема Коутса оказывается существенно более сложной, чем исходная схема, поскольку практические схемы содержат главным образом пассивные элементы, а не УИ. Многочисленным модификациям [56, 61, 162] и обобщениям метода полных деревьев для учета других типов элементов [20, 21, 135] присущи аналогичные недостатки.

Строгое матричное доказательство метода Коутса [133] и его известность среди специалистов создали условия для реализации основного преимущества этого метода перед матричными и графовыми методами, состоящего в отсутствии избыточности. Так, за последние годы были реализованы эффективные программы формирования приближенных выражений ССФ [140, 148, 149] и выражений ССФ для проведения точных вычислений [138].

Метод Вознячки [173] можно рассматривать как развитие метода Коутса. При этом вместо преобразования пассивных элементов схемы в вырожденные УИ используется обобщенная ветвь в виде соединения пассивного элемента с генератором УИ (при наличии последнего). В основе метода Вознячки лежит перечисление всех деревьев схемы, составленной из обобщенных ветвей. Каждое дерево дополняется приемниками УИ и находится определитель полученной схемы, которую назовем элементарной схемой Вознячки.

Учет УИ в такой схеме подобен учету независимых источников в топологическом методе Кирхгофа [27]. что придает методу Вознячки наглядность. Вместе с тем определитель элементарной схемы содержит в общем случае более одного слагаемого, а формула разложения определителя зависит от структуры этой схемы. Это, с одной стороны, позволяет выносить за скобки произведения проводимостей ветвей соответствующего дерева, а с другой стороны, усложняет формализацию методики формирования ССФ.

Правило нахождения знака слагаемых определителей элементарных схем, в отличие от аналогичной процедуры Коутса, не имеет обоснования, хотя в

[173] сообщалось о намерении автора сделать это в будущем. Возможно поэтому, метод Возняcki не нашел последователей ни за рубежом, ни в нашей стране, хотя был опубликован как приложение в известной книге [2, с. 294 - 311].

1.5. Матрично-топологический метод выделения параметров

Советский исследователь Ю.П.Галямичев (г. Ленинград) первым получил схемное решение задачи формирования ССФ, предусматривающее анализ непосредственно схемы с ИТУН и пассивными элементами, выраженными проводимостями [8, 9]. Суть его идеи состояла в том, что вначале определитель активной схемы освобождается от элементов, вносящих в него несимметричность, то есть от ИТУН, а затем выражается через деревья пассивных схем, производных от пассивной подсхемы исходной схемы. Таким образом, определитель схемы представляется в виде суммы 2^n слагаемых, где n - число ИТУН в схеме. Каждое слагаемое соответствует некоторому сочетанию из параметров ИТУН. Произведение параметров сочетания умножается на коэффициент, учитывающий параметры пассивных ветвей, который можно найти, анализируя структуру пассивной подсхемы, поскольку удаление ИТУН не приводит к объединению узлов схемы.

Чтобы обосновать свою идею Ю.П.Галямичев установил связь между минорами матрицы узловых проводимостей схемы и ее деревьями (1-деревьями) или k -деревьями ($k > 1$), то есть несвязными подсхемами, образованными k компонентами, каждая из которых в отдельности является деревом [1, 34, 56]. Это позволило выразить коэффициенты при произведениях параметров ИТУН через сумму k -деревьев соответствующего вида. Ю.П.Галямичев ограничился рассмотрением схем с трехполюсными ИТУН, у

которых генератор и приемник имеют общий узел. Именно такие ИТУН использовались в моделях электронных ламп, наиболее распространенных в схемотехнике конца 50-х и начала 60-х годов.

Следует обратить внимание на то, что в 1960 году (то есть двумя годами позже Ю.П.Галямичева [8]) Мэйсон опубликовал лишь частную формулу для разложения определителя схемы с одним трехполюсным ИТУН [47]. В формуле Мэйсона коэффициент при параметре ИТУН находится посредством перечисления путей между узлом а приемника и узлом b генератора этого ИТУН. Учитываемые пути не должны проходить через общий узел с генератора и приемника. Это соответствует перечислению 2-деревьев вида (с,ab), то есть частному виду k-деревьев, которые использовал Ю.П.Галямичев для выделения двух, трех и более параметров ИТУН, что доказывает приоритет советской электротехнической школы.

Заслугой Ю.П.Галямичева является также обобщение формул (1.4) и (1.5). В частности, он привел диакоптическую формулу схемного определителя для случая, когда пассивная схема делится на две подсхемы по узлам а, b и с [8, 9]. Эта формула в принятой здесь символике [102, 108] имеет вид

$$\Delta = \Delta_1(a,b,c) \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_2(a,b,c) + \Delta_1(a,cb) \Delta_2(b,c) + \Delta_1(b,ca) \Delta_2(a,c) + \Delta_1(c,ab) \Delta_2(a,b) . \quad (1.7) \text{ Здесь}$$

$\Delta_1(a,b,c)$ и $\Delta_2(a,b,c)$ - определители схем, образованных из первой и второй подсхем в результате объединения внешних узлов. $\Delta_1(a,cb)$, $\Delta_1(b,ca)$, $\Delta_1(c,ab)$ - сумма определителей 2-деревьев первой подсхемы, содержащих путь между узлами с и b, с и а, а и b соответственно. Оставшиеся сомножители в формуле (1.7) находятся аналогично сомножителям в формуле (1.5).

Для нахождения знака k-деревьев Ю.П.Галямичев использовал понятие “поворот фазы сигнала” [9]. Доказать правило знаков Ю.П.Галямичева можно на основе топологической процедуры Коутса (см. подраздел 1.4.). Однако при использовании этого правила для анализа схем с четырехполюсными ИТУН теряется наглядность и затрудняется формализация методики получения ССФ.

Дать строгое матричное обоснование методики Ю.П.Галямичева позволила теорема об определителе суммы двух матриц, доказанная В.П.Сигорским [57]. Эта теорема и введенное им же понятие суммарного алгебраического дополнения (САД) в совокупности предоставили весьма плодотворный аппарат для анализа пассивных и активных электрических цепей через выделение параметров, расчета чувствительностей к их изменению, получения полиномиальных коэффициентов и т.д. Одним из первых на достоинства этого аппарата обратил внимание Л.Я.Нагорный [48].

Использование САД вместо миноров матрицы и правила нахождения знака многократных САД вместо правила “поворота фазы” позволили упростить и формализовать методику Ю.П.Галямичева, что было сделано в работах Ю.М.Калниболотского [26]. Определитель схемы через САД представляется в виде

$$\Delta = \Delta^{1,2,\dots,n} + \sum_{i=1}^n s_i \Delta_{(a_i+b_i)(c_i+d_i)} +$$

$$+ \sum_{i < j} s_i s_j \Delta_{(a_i+b_i)(c_i+d_i),(a_j+b_j)(c_j+d_j)} + \dots +$$

$$+ s_1 s_2 \dots s_n \Delta_{(a_1+b_1)(c_1+d_1),(a_2+b_2)(c_2+d_2), \dots (a_n+b_n)(c_n+d_n)}, \quad (1.8)$$

где $\Delta^{1,2,\dots,n}$ - определитель схемы, образованной из исходной схемы в результате удаления ИТУН с параметрами s_1, s_2, \dots, s_n ; a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) - соответственно номера узлов подключения генератора и приемника ИТУН с номером i ; $\Delta_{(a_i+b_i)(c_i+d_i)}$ - САД, образованное в результате следующих преобразований над определителем матрицы проводимостей исходной схемы: 1) поэлементное прибавление строки a_i к строке b_i , а столбца c_i к столбцу d_i ; 2) удаление строки a_i и столбца c_i ; $\Delta_{(a_1+b_1)(c_1+d_1),(a_2+b_2)(c_2+d_2), \dots (a_n+b_n)(c_n+d_n)}$ - n -кратное САД, образованное n -кратным применением

указанных преобразований. Операция удаления i -го ИТУН ($s_i = 0$) заключается в удалении его генератора и приемника из исходной схемы.

Спустя несколько лет [1] В.И.Анисимову и Н.Г.Козьмину удалось обобщить методику Ю.П.Галямичева для схем со всеми типами УИ и установить ее связь с методом полных деревьев Коутса. Это позволило перенести центр тяжести с матрично-топологической интерпретации Ю.М.Калниболотского на схемную интерпретацию Ю.П.Галямичева, который изначально ставил своей целью нахождение ССФ непосредственно из самой схемы без использования матриц [8]. Теоретико-множественная интерпретация метода выделения параметров, предложенная Беллертом [2], не только не способствовала продвижению к этой цели, но и удаляла от нее по сравнению с более наглядной и общепринятой матричной интерпретацией.

В предельном случае формулы (1.8), когда параметры всех элементов схемы выделяются в явном виде, метод выделения параметров переходит в так называемый множественно-топологический метод [61], который предусматривает перебор всех сочетаний из числа элементов схемы по $q - 1$. Это напоминает перебор сочетаний для поиска деревьев в неориентированном или унисторном графах схемы [34, 54]. Однако в случае перебора элементов схемы с ИТУН для отбраковки сочетаний, не образующих слагаемых определителя, приходится не выявлять контур в графе, а находить величину САД, которая может быть равна -1, 0 или 1. Нетрудно убедиться, что сочетание элементов, для которого САД отлично от нуля, соответствует полному дереву Коутса. Следовательно, для нахождения знака сочетания - слагаемого схемного определителя можно использовать не алгебраический алгоритм поиска неповторяющихся индексов САД [61], а топологическую процедуру Коутса [133], рассмотренную в подразделе 1.4.

Известны более эффективные, чем алгоритм из [61], алгоритмы нахождения знака САД [25, 63]. Однако и они не обеспечивают существенного выигрыша в числе операций по сравнению с топологической процедурой

Коутса, при использовании которой совместно с формулой (1.8) реализуются в большей степени такие преимущества схемного подхода как наглядность выкладок и отсутствие вспомогательных алгебраических объектов.

Трудностей, связанных с нахождением знака многократных САД, можно избежать, если после выделения очередного параметра выполнять перенумерацию узлов в схеме, соответствующей однократному САД. При этом определение знака у произведения выделяемых параметров заменяется учетом знака при каждом из них. Такая возможность реализована в матричном методе выделения параметров [116, 162], который был предложен Лином спустя десять с лишним лет после опубликования результатов Ю.П.Галямичева [8]. Для разложения определителя матрицы узловых проводимостей по Лину рекурсивно применяется следующая формула [46]

$$\Delta = (-1)^{a+c} s \Delta_{(a+b)(c+d)} + \Delta^s, \quad (1.9)$$

где s - параметр выделяемого ИТУН; a, b, c, d - соответственно номера узлов подключения его генератора и приемника; Δ^s - определитель матрицы схемы, образованной из исходной схемы в результате удаления этого ИТУН.

При использовании формулы (1.9) обеспечивается существенное уменьшение вычислительной сложности формируемых вложенных выражений ССФ по сравнению с формулой (1.8) [76]. Платой за это является трудоемкая перенумерация строк и столбцов матрицы, производной от исходной матрицы схемы и соответствующей САД $\Delta_{(a+b)(c+d)}$. В схемной интерпретации матричного метода, также предложенной Лином [162], осуществляется выполнение операций, предусмотренных в формуле (1.9), на схемном уровне. Для этого, в частности, проводится перенумерация узлов производных схем, образующихся при каждом применении формулы (1.9).

Таким образом, в формуле (1.9) используется простое алгебраическое правило знаков, опирающееся на порядковую нумерацию узлов исходной схемы и производных от нее схем. Однако схема по сравнению с матрицей является топологическим объектом, в котором номера или буквенные обозначения узлов должны служить лишь для указания соединений элементов. Например, в топологической процедуре Коутса вместо номеров узлов можно использовать их буквенные обозначения, поскольку знак полного дерева не является функцией от номеров узлов. Следовательно, метод выделения параметров Лина нельзя рассматривать как схемное решение задачи формирования ССФ.

Сравнение формул (1.8) и (1.9) заставляет усомниться в корректности формул выделения параметров УИ различных типов [46]. Дело в том, что предусматриваемое при использовании этих формул нахождение знаков многократных САД не позволяет, выделив один из УИ, сразу же забыть о его существовании, как это допускает формула (1.9).

1.6. Метод цепей контуров передачи

Этот метод был разработан вслед за методами полных деревьев и выделения параметров [129, 154 - 157]. Сущность метода состоит в замене перечисления k -деревьев пассивной подсхемы перечислением цепей контуров передачи (ЦКП), относящихся ко всей схеме, то есть объединению ее активной и пассивной подсхем. Понятие ЦКП, предложенное Хуаном [154], обобщает понятие контура передачи, введенное Фойснером (см. формулу (1.6)). Подобно методу выделения параметров метод ЦКП позволяет формировать вложенные выражения ССФ.

В основе метода ЦКП лежит идея, которую можно интерпретировать как правило последовательного возбуждения УИ. Дело в том, что в схеме с УИ могут быть образованы контура передачи, содержащие генератор и приемник

одного из УИ или различных УИ. В последнем случае возникает ЦКП, образованная двумя и более звеньями, которая соответствует некоторой подстановке из генераторов и приемников УИ, используемых в этой ЦКП. Это указывает на связь метода ЦКП с методом полных деревьев (см. процедуру Коутса в подразделе 1.4.). Многозвенную ЦКП начинает генератор одного из УИ, который возбуждает приемник другого УИ. Следующее звено начинается генератором того УИ, приемник которого был возбужден в предыдущем звене и т.д. Приемник последнего звена и генератор первого звена обязательно принадлежат одному и тому же УИ схемы, чтобы замкнуть ЦКП.

После нахождения некоторой ЦКП строится производная схем, образованная в результате стягивания всех ветвей ЦКП. Если эта схема не содержит УИ, то ее определитель раскрывается по формулам Фойснера (1.2) - (1.5), что обеспечивает снижение трудоемкости выкладок и экономию вычислительных операций в выражениях ССФ. Очевидно, что некоторому коэффициенту при произведении параметров ИТУН (см. формулу (1.8)) в общем случае соответствует более одной ЦКП, составленной из генераторов и приемников этих ИТУН. Знак ЦКП учитывает ориентацию генератора и приемника в каждом ее звене. Таким образом, можно установить связь между методом ЦКП и методикой Ю.П.Галямичева, основанной на выявлении путей тока от входа к выходу схемы и поворот фазы [9].

Несмотря на прозрачный физический смысл методики Барроуза [129] и Хуана [154], реализующие метод ЦКП, до сих пор не получили сколько-нибудь заметного критического обсуждения и развития за рубежом. Первые ссылки на работы Барроуза и Хуана в отечественной литературе относятся к 90-м годам [89, 99, 108]. По-видимому, сказалось то обстоятельство, что, как и метод Вознячки [173], метод ЦКП не имеет строгого доказательства, хотя следует отдать должное попытке Хуана дать топологическое обоснование своему методу на основе введенного с этой целью понятия “регулярное множество циклов” [156].

Методика Барроуза требует исследования всех возможных перестановок генераторов и приемников УИ [129]. Однако лишь незначительная часть из этих перестановок соответствует ЦКП, то есть слагаемым коэффициентов при произведениях параметров УИ [162]. Методика Хуана лишена этого недостатка, поскольку предусматривает неявное разложение определителя схемы по параметрам УИ путем нахождения ЦКП, действительно имеющих в схеме. Важным достоинством методики Хуана является возможность ее использования для анализа схем, содержащих как проводимости, так и сопротивления, а также УИ всех четырех типов [154]. Кроме этого, Хуаном разработаны специализированные методики для схем с взаимными индуктивностями [155] и идеальными операционными усилителями (ИОУ) [157].

Отсутствие алгоритма для нахождения ЦКП создает трудности в компьютерной реализации. В то же время метод выделения параметров по Ю.П.Галямичеву был реализован в машинной программе [1]. При нахождении ЦКП вручную оказывается, что в случае схем с несколькими УИ методики Барроуза и Хуана, подобно методу Вознячки, утрачивают свою наглядность. Существенно затрудняет использование этих методик наличие тождественных ЦКП, имеющих различную структуру [129, 156]. Результатом этого является снижение достоверности расчетов вследствие возможности пропуска слагаемых числителя или знаменателя ССФ. Наконец, понятие ЦКП, как и понятие многократного САД, по определению отрицают деление схемы на подсхемы, что требует дополнительных исследований в направлении анализа схем по частям с помощью соответствующих методов.

Практическую ценность методик Барроуза и Хуана, как и методики Ю.П.Галямичева, снижает также необходимость определения знака для каждого произведения параметров УИ. Этого не требуется, например, в методе обобщенного унисторного графа [96], когда параметры УИ учитываются в произведении со своими знаками. Особое внимание следует уделить

корректности соответствующих правил [129, 154]. Как ранее указывалось [96], правило для нахождения знака, используемое Хуаном и предусматривающее учет совместной ориентации генератора и приемника в каждом звене ЦКП, противоречит методу унисторного графа. Это объясняется тем, что Хуан не учитывает количества ЦКП, относящихся к некоторому слагаемому схемного определителя.

Вместо правила Хуана следует использовать правило, сформулированное Вангом для схем с трехполюсными УИ [171], после необходимого обобщения. Для этого обратим внимание на то, что структура ЦКП аналогична системе некасающихся контуров в сигнальном графе [23, 47, 120, 123]. Следовательно, знак соответствующего слагаемого определителя схемы (графа) должен зависеть не только от совместной ориентации генератора и приемника в звеньях ЦКП (от знаков весов контуров), но и от числа звеньев в ЦКП (числа контуров в системе) [89].

Несмотря на недостаточную обоснованность метода ЦКП, само понятие ЦКП имеет важное методологическое значение. В частности, полное дерево Коутса по существу представляет собой единственную ЦКП, определитель производной схемы для которой равен единице. Элементарная схема Возняcki, которая соответствует коэффициенту при некотором произведении параметров УИ, содержит в общем случае несколько ЦКП, в результате стягивания ветвей каждой из которых получается одна и та же схема-дерево, содержащая только пассивные элементы. С точки зрения Ю.П.Галямичева пассивные ветви, входящие в состав ЦКП, образуют k -дерево соответствующего вида. Без использования понятия ЦКП оказалось невозможно обобщить метод изоморфного графа [64] (под которым понимается u -схема с ИТУН), а также методику для анализа u -схем без избыточности [126], для схем, содержащих более одного ИТУН. Результатом невнимания к работам Барроуза и Хуана являются не только упущенные возможности или заблуждения, но и серьезные ошибки в недавних отечественных исследованиях по этому вопросу. Например,

в работе [3] отсутствует корректное правило для нахождения знака перед произведениями параметров ИТУН, а также игнорируется наличие перестановочных ЦКП в схемах с двумя и более УИ.

1.7. Методы схемных преобразований

Обсуждаемые в этом подразделе методы отличаются от рассмотренных выше методов, реализующих схемный подход к формированию ССФ, использованием операций деления. К числу наиболее разработанных методов относятся методы схемоанализа [117, 119] и схемной редукции [43]. Другим отличием от рассмотренных ранее методов является использование этими методами единственной схемы замещения, которая упрощается в результате последовательности эквивалентных преобразований до получения искомого решения. Расчетные формулы аналогичны по структуре формулам исключения Гаусса, поэтому можно говорить, что методы схемоанализа и схемной редукции реализуют схемный подход по Гауссу.

Если все параметры исходной схемы задать символами, то искомая ССФ находится в виде последовательности выражений (ПВ), отображающей выполняемые схемные преобразования. Из ПВ может быть получено единое выражение ССФ с одной операцией деления. Однако в проведении столь трудоемких алгебраических преобразований нет необходимости, поскольку формирование единых выражений ССФ более эффективно выполняется методами, реализующими схемный подход по Крамеру (см. подразделы 1.3. - 1.6.). Вычислительная сложность символьной ПВ оказывается, как правило, ниже сложности соответствующего единого выражения, поэтому ПВ рассматривается как форма представления ССФ, альтернативная традиционной форме (1.1) [102, 163, 169].

Методы схемоанализа или общей теории преобразования электрических схем предусматривают мышление схемными образами и являются

инструментом для исследования сложных электрических цепей по частям [117, 119]. Важно, что восприятие этих методов переводится на более высокую ступень мыслительных операций по сравнению с абстрактным языком алгебраических действий. В основе схемоанализа лежат понятия обобщенно-последовательного или обобщенно-параллельного соединения элементов схемы. При этом схемная модель рассматривается как схемное уравнение в схемных символах, а решение схемного уравнения достигается упрощением обобщенно-последовательных или обобщенно-параллельных соединений элементов схемы. Результатом упрощения обобщенно-параллельных соединений хорд с ветвями дерева в z-схеме является схема-дерево, параметрами которой служат входные и передаточные сопротивления, то есть ССФ в форме ПВ [118]. Выражения для вычисления новых параметров ветвей дерева после “растворения” в них некоторой хорды содержат операции вычитания и деления, что обуславливает формальное сходство методов схемоанализа с методом исключения Гаусса. Фактически упрощение обобщенно-последовательных и обобщенно-параллельных соединений нельзя рассматривать как схемную интерпретацию алгоритма Гаусса, поскольку такие упрощения интерпретируют более тонкие матричные преобразования, известные как коррекция элементов обратной матрицы по формуле Шермана-Моррисона [4, с. 206-207].

Методы схемной редукции [43] предусматривают последовательное упрощение схемы путем исключения узлов или контуров до получения простейшей схемы, анализируемой по закону Ома, и последующее восстановление промежуточных схем для нахождения напряжений или токов. Это соответствует прямому и обратному ходам в методе Гаусса. Формулы редукции не содержат операций вычитания. Тем не менее их можно рассматривать как схемную интерпретацию алгоритма Гаусса, когда используются неопределенные матрицы узловых проводимостей или

контурных сопротивлений, а элементы главной диагонали вычисляются через недиагональные элементы соответствующих строк или столбцов.

Таким образом, методы схемной редукции обеспечивают формирование ПВ, в которых устранены операции вычитания, обусловленные избыточностью представления пассивных и активных элементов в матрице схемы, что позволяет существенно повысить точность расчетов [43]. При этом допускается использование всех типов УИ и ИОУ. Вопросы устранения дубликаций и обобщения на все типы элементов для метода преобразования обобщенно-параллельных соединений z-схем обсуждались в работе [19]. Однако безизбыточные выражения оказываются весьма громоздкими, что затрудняет их программирование и делает непригодными при получении ССФ без помощи компьютера. Потенциально методы схемной редукции следует признать более устойчивыми к численным расчетам, поскольку их реализуют формулы, не содержащие операций вычитания. Такие операции появляются лишь при наличии в схеме параметров, имеющих отрицательные значения, и при учете ориентации ветвей УИ.

Известно, что при раздельном нахождении числителя и знаменателя ССФ можно достичь более высокую точность, чем в случае представления ССФ последовательностью выражений, отображающей процесс численного решения системы линейных алгебраических уравнений схемы [59, 60, 65]. В этом можно убедиться, воспользовавшись одной из программ численного анализа [30, 55, 116] и выполняя вычисления с ограниченной разрядностью, представив числитель и знаменатель ССФ в виде определителей, которые раскрываются методом Гаусса (в первом случае) или решив систему уравнений также методом Гаусса (во втором случае).

Раздельное нахождение числителя и знаменателя ССФ обеспечивается при использовании метода матрицы алгебраических дополнений (АД) [59], который в схемной интерпретации можно рассматривать как развитие методов схемоанализа [117, 119]. Таким образом, можно считать, что классические

методы схемоанализа (метод матрицы АД) реализуют схемный подход по Гауссу (Крамеру). В основе метода матрицы АД лежит формула (1.9) и теорема Якоби, позволяющая перейти от определителя матрицы к ее АД и многократным АД [58]. Первоначально находятся определитель и матрица его АД для некоторой начальной подсхемы, например, в виде дерева (сравните с методом преобразования обобщенно-параллельных соединений z-схем [118]). Затем определитель и матрица его АД модифицируются по мере дополнения этой подсхемы элемент за элементом до получения определителя и АД исходной схемы, которые необходимы для получения искомого ССФ. Схемный характер метода матрицы АД подчеркивает то обстоятельство, что формирование ССФ может выполняться непосредственно по у-схеме с ИТУН.

Трудоемкость получения матриц АД на каждом шаге расчета [59] можно уменьшить многократно, пренебрегая информацией о внутренних узлах [60]. Для этого находятся только те АД, которые необходимы для последующего учета других элементов схемы и ее задания относительно внешних узлов, используемых в искомого ССФ.

Вычисления, выполняемые на основе ПВ, которые сформированы методом матрицы АД, оказываются более точными по сравнению с обращением матрицы узловых проводимостей по методу Гаусса [60]. Кроме того, метод матрицы АД обеспечивает устойчивость вычислений в случае значений определителя, близких к нулю [59]. Однако формулы для нахождения определителя и АД [59, 60] содержат не только одну операцию деления, но и 7 операций вычитания. Поэтому нельзя уверенно утверждать, что метод матрицы АД является потенциально более устойчивым к вычислениям, чем метод схемной редукции, который реализуется без операций вычитания.

Методы схемных преобразований предусматривают непрерывное изменение как структуры схемы, так и значений параметров ее элементов. При этом в процессе упрощения исходной схемы обязательно появляются новые управляющие связи (новые ненулевые элементы в матрице АД) и объем

выкладок, требуемых для упрощения очередной схемы, может превысить трудоемкость упрощения предыдущей схемы. В случае использования метода выделения параметров (см. подразделы 1.3 и 1.5.) производные схемы всегда оказываются проще породивших их схем, а параметры всех элементов остаются без изменения. Важно, что мышление сосредоточивается на анализе структуры этих схем, а решение задачи формирования ССФ является топологическим. В методах схемных преобразований, напротив, центр тяжести (трудоемкости расчетов) переносится с созерцания структуры схем на пересчет их параметров. При этом вычисления оказывается удобно проводить с помощью вспомогательных матриц [59, 60, 118], что отрицает саму идею схемного подхода.

Изоморфизм между традиционными матричными методами и методами, реализующими схемный подход по Гауссу (классические методы схемоанализа, методы схемной редукции) и по Крамеру (метод матрицы АД), облегчает строгое обоснование этих методов [4, 43, 58]. В то же время топологическому методу ЦКП (см. подраздел 1.6.) не удалось подобрать матричного аналога, что сделало обоснование этого метода весьма затруднительным и не вполне строгим [156]. Общим недостатком рассмотренных в предыдущих подразделах методов ЦКП, полных деревьев и выделения параметров является то, что эти методы не обеспечивают формирование ССФ активных электрических цепей делением их на части. Обработка пассивной подсхемы, которую предусматривает методика Ю.П.Галамичева с использованием диакоптических формул (1.4), (1.5) и (1.7), оказывается крайне трудоемкой при анализе сложных схем на компьютере. С другой стороны, методы схемных преобразований легко адаптируются для анализа подсхем и их иерархического объединения до получения параметров исходной схемы [13, 60].

1.8. Нерешенные задачи и пути совершенствования

методов формирования ССФ

Исходя из требований к методу формирования ССФ, изложенных в подразделе 1.1., и результатов обсуждения методов, реализующих схемный подход к формированию ССФ, которое проведено в подразделах 1.3. - 1.7., выделим круг нерешенных задач и наиболее перспективных направлений исследования.

С точки зрения точности вычислений на основе ССФ целесообразно полностью исключить операции деления в числителе и знаменателе ССФ, сосредоточив усилия на разработке схемного подхода по Крамеру. Операции деления также нежелательны, как и операции вычитания, поскольку “операция деления усугубляет значение абсолютной погрешности разности двух близких по величине чисел” [53, с.37]. Операции деления препятствуют аналитической обработке и упрощению полученных выражений ССФ [131, 140, 149]. В частности, затрудняется формирование полиномиальных и символьно-численных ССФ [13, 65, 124]. Немаловажно, что операции деления выполняются в несколько раз медленнее, чем другие операции, которые поддерживаются численным сопроцессором [13, 137].

Доводом в пользу применения операций деления является “автоматическое нормирование” при вычислениях ССФ, которое препятствует выходу значений числителя и знаменателя за границы представления чисел [150]. Однако расплачиваться за такую возможность приходится резким увеличением погрешности вычислений. Следует подчеркнуть, что “правдоподобный результат оказывается хуже, чем явный сбой в вычислениях или полностью искаженный результат, поскольку на первый взгляд не вызывает сомнений” [43, с. 5]. Избегать переполнения разрядной сетки можно другими способами, например, использованием для задания параметров схемы как сопротивлений, так и проводимостей [62, 97] или осознанным ухудшением эффективности вычислений [29] за счет искусственного увеличения разрядности [124].

Среди методов, не использующих операции деления, требованию универсальности удовлетворяет в наибольшей степени метод выделения параметров, который позволяет представить определитель схемы в компактном и желаемом виде, что достигается изменением порядка выделения ее

элементов. При этом нахождение ССФ сводится к рассмотрению исходной схемы и производных от нее схем. Метод выделения параметров может быть обобщен для анализа схем со всеми типами УИ [46, 96] и использован как в качестве инженерной методики [46, 48, 51, 62], так и в виде компьютерной программы [110 - 114, 162].

Формулы (1.8) и (1.9), нельзя считать прямым обобщением формулы (1.2), как это предлагает Лин [162], поскольку в указанных формулах не используется схемное отображение САД. Поэтому вопрос о нахождении и использовании схемного отображения САД является центральным в развитии схемного подхода Фойснера от пассивных схем к схемам с УИ. При получении на него утвердительного ответа появится возможность находить числитель и знаменатель ССФ как определители соответствующих схем.

Чтобы избежать излишних выкладок и сократить вычислительную сложность формируемых выражений ССФ, необходимо выполнять разложение схемных определителей без трудоемкого перечисления контуров передачи (см. формулу (1.6)) и ЦКП. Формула (1.9) могла бы быть использована для этой цели, но неизвестно топологическое правило нахождения знака перед выделяемым параметром. В связи с этим возникает также вопрос, каким образом обеспечить минимизацию операций вычитания в выражениях ССФ.

До сих пор не выяснено, в каком порядке следует выделять параметры элементов схемы, и не установлены общие правила для формирования оптимальных по вычислительной сложности выражений ССФ. Положительный ответ на этот вопрос позволил бы поставить точку в вечном споре о предпочтительности того или иного метода формирования ССФ [13, 52, 73, 104]. Формирование оптимальных выражений ССФ сложных электрических цепей немислимо без их деления на части. Следовательно, необходимо разработать основы схемной диакоптики, предусматривающей нахождение параметров подсхем и их объединение с целью получения параметров исходной схемы, необходимых для получения искомым ССФ. Выделение

параметров подсхем, подобно выделению параметров отдельных элементов, должно выполняться оптимальным образом, чтобы формируемые ССФ обладали по возможности меньшей вычислительной сложностью.

Завершая обсуждение намеченных выше задач, отметим, что степень становления любого раздела технической науки характеризуется состоянием проектирования соответствующих объектов. В случае символьного анализа электрических цепей такими объектами являются ССФ и должен существовать оптимальный метод формирования оптимальных выражений ССФ. Однако в теории электрических цепей отсутствует понятие “оптимальное выражение ССФ”, хотя проблема оптимальной свертки (факторизации) алгебраических выражений уже три десятилетия волнует специалистов по программированию и компьютерной алгебре [5, 130, 164].

Под оптимальными выражениями ССФ будем понимать выражения ССФ, оптимальные по вычислительной сложности и количеству операций вычитания. В качестве оптимального метода выдвигается для исследования и разработки метод выделения параметров элементов и подсхем, реализующий схемный подход к формированию ССФ и обеспечивающий наиболее короткий путь к оптимальным выражениям ССФ.

1.9. Выводы

Обоснован приоритет Фойснера на формулы (1.2) - (1.6), составляющие фундамент схемного подхода к символьному анализу линейных электрических цепей. Имевшие место не вполне удачные попытки обобщить этот подход для схем с УИ увели исследователей на путь разработки методов, предусматривающих использование промежуточных избыточных математических моделей в виде матриц и графов.

Установлено, что методы формирования ССФ на основе избыточных моделей в большей степени ориентированы на “машинное мышление”, чем на

человеческий интеллект, оказываются менее пригодными для проведения точных вычислений, обладают ограниченными возможностями для получения оптимальных и приближенных выражений ССФ.

Показано, что до сих пор не оцененный по достоинству схемный подход имеет ключевое значение для формирования выражений ССФ, оптимальных по вычислительной сложности и количеству операций вычитания. Выделены пути совершенствования методов символьного анализа, что предполагает возврат к результатам Фойснера, их переосмысление и развитие для получения прямого схемного решения задачи формирования ССФ сложных активных электрических цепей.

2. ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ССФ ДЛЯ ПАССИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

При нахождении передаточных и входных ССФ используется так называемая схема упорядочения, которая получается из исходной схемы в результате преобразования независимого источника воздействия в УИ, приемником которого является искомый отклик [64, 116, 162]. Для получения передаточной проводимости определитель видоизмененной таким образом схемы можно разложить по формуле (1.9). В случаях, когда искомыми являются передаточное сопротивление, передаточные ССФ по напряжению или току для разложения определителя схемы упорядочения можно применить формулы, аналогичные по виду формуле (1.9) [46]. Напомним, что удаление УИ, отличных от ИТУН, приводит к объединению узлов схемы. Так, при удалении ИНУТ стягивается ветвь как генератора, так и приемника. Удаление источника тока, управляемого током (ИТУТ) или ИНУН приводит к стягиванию ветви соответственно приемника или генератора.

Использование формул выделения параметров позволяет избежать трудоемкой сортировки слагаемых определителя на два подмножества [64,

116]. Первое подмножество включает слагаемые, содержащие параметр фиктивного УИ [64] в качестве сомножителя, а второе подмножество не включает таких слагаемых. Согласно назначению схемы упорядочения первое подмножество включает слагаемые, образующие числитель передаточной или, в частном случае, входной ССФ, а слагаемые второго подмножества образуют знаменатель этой ССФ.

Предложенная методика нахождения ССФ через выделение параметра фиктивного УИ оказывается эффективнее не только процедуры сортировки слагаемых определителя схемы упорядочения, но и процедуры перечисления контуров передачи согласно формуле (1.6). Дело в том, что разложение по путям [47] уступает (для достаточно сложных схем многократно) другим способам разложения определителя в сложности формируемых выражений ССФ [70, 77, 84, 90, 97]. Вместе с тем применение формулы (1.9) и аналогичных формул для выделения параметров ИНУТ, ИНУН и ИТУТ ограничивает класс анализируемых схем у-схемами, поскольку для нахождения слагаемых, содержащих параметр фиктивного УИ, используются операции над матрицей проводимостей. Таким образом, развитие схемного подхода Фойснера следует начинать с того, чтобы, во-первых, отказаться от использования формулы (1.6) и ее обобщений [129, 154], а во-вторых, дать схемную интерпретацию числителя ССФ.

2.1. Понятие НУИ и схемные уравнения ССФ

Знаменатель ССФ находится предельно просто путем удаления соответствующего фиктивного УИ из схемы упорядочения. Вместо того, чтобы выполнять операции над матрицей схемы при нахождении числителя ССФ рассмотрим схему, в которой фиктивному УИ придан статус так называемого

неудаляемого УИ (НУИ). Очевидно, полученная схема является схемным отображением числителя ССФ. Параметру НУИ можно формально присвоить значение, равное единице, поскольку сортировка слагаемых по признаку наличия в них параметра фиктивного УИ не потребуется. Генератор НУИ будем изображать двумя спаренными зачерненными стрелками-треугольниками, а приемник НУИ - одной такой стрелкой. Принципиально важно, что ориентация генератора НУИ (приемника НУИ) противоположна (соответствует) ориентации генератора и приемника породившего его фиктивного УИ.

Введение нового схемного элемента - НУИ позволяет наглядно представить правила нахождения ССФ в виде схемных уравнений, как показано в табл. 2.1. Здесь E и J обозначают соответственно параметры независимых (измерительных) источников напряжения и тока, а U и I - искомые отклики напряжения и тока. Матричная [23] и графовая [51, 62] формулировки правил получения ССФ существенно более громоздки, поскольку требуют нумерации узлов схемы и использования понятий симметричного и несимметричного алгебраических дополнений (АД) матрицы или графа. Важно, что получение схемных уравнений ССФ, которые непосредственно вытекают из схемы упорядочения Лина и формул выделения параметров УИ, не связано с дополнительными выкладками, как в случае матричных уравнений ССФ.

Схемные уравнения ССФ в сочетании с формулами (1.2) - (1.5) предоставляют эффективный аппарат для символьного анализа пассивных электрических цепей. При этом разложение схемных определителей следует выполнять таким образом, чтобы в первую очередь выделялись параметры пассивных ветвей по формулам (1.2) и (1.3), а генератор и приемник НУИ относились бы к одной и той же подсхеме в случае использования формул (1.4) и (1.5). Простейшие схемы, к которым приводит разложение схем числителей ССФ (см. табл. 2.1), изображены на рис. 2.1. Знаки определителей этих схем

находятся в соответствии с процедурой Коутса (см. подраздел 1.4.), поскольку схемы на рис. 2.1 представляют собой простейшие полные деревья.

Таблица 2.1

Схемные уравнения ССФ

Передаточные ССФ	Входные ССФ
$\frac{I}{E} = \frac{\text{[Diagram: Box with two downward arrows on left, two downward arrows on right]}}{\text{[Diagram: Box with two outward-pointing triangles on left, two outward-pointing triangles on right]}}$	$\frac{I}{E} = \frac{\text{[Diagram: Box with two downward arrows on left, one downward arrow on right]}}{\text{[Diagram: Box with two outward-pointing triangles on left, one outward-pointing triangle on right]}}$
$\frac{U}{J} = \frac{\text{[Diagram: Box with two downward arrows on left, two downward arrows on right]}}{\text{[Diagram: Box with two terminals on left, two terminals on right]}}$	$\frac{U}{J} = \frac{\text{[Diagram: Box with two downward arrows on left, two downward arrows on right]}}{\text{[Diagram: Box with two terminals on left, two terminals on right]}}$
$\frac{U}{E} = \frac{\text{[Diagram: Box with two downward arrows on left, two downward arrows on right]}}{\text{[Diagram: Box with two outward-pointing triangles on left, two terminals on right]}}$	
$\frac{I}{J} = \frac{\text{[Diagram: Box with two downward arrows on left, two downward arrows on right]}}{\text{[Diagram: Box with two terminals on left, two outward-pointing triangles on right]}}$	

Простейшие схемы с одним НУИ и их определители



Рис. 2.1

Итак, найдено прямое схемное решение задачи формирования ССФ пассивных электрических цепей без взаимных связей. Теперь предстоит обсудить вопросы минимизации вычислительной сложности формируемых выражений ССФ.

2.2. Алгоритм свертки алгебраических выражений

Определитель схемы можно рассматривать, как это делали Кирхгоф и Максвелл [27, 44] в виде развернутого алгебраического выражения. Оно представляет собой символьную сумму произведений, имеющих одинаковое количество сомножителей, которые являются параметрами элементов схемы. Оптимальная свертка или факторизация традиционно считается проблемой вычислительной математики и программирования [5, 130, 164]. Существуют и развиваются системы аналитических вычислений и компьютерной алгебры [12, 29]. Некоторые из них, например МАТНЕМАТИСА-3, предусматривают получение компактных символьных выражений в форме с вынесенными общими множителями [137].

Известно [5], что оптимальная свертка принадлежит к задачам, решаемым алгоритмами экспоненциальной трудности. Поэтому практически размерность задач факторизации невелика и приходится ориентироваться на тот или иной класс алгебраических выражений. В частности, разработан алгоритм оптимальной свертки суммы слагаемых, каждое из которых является произведением только двух сомножителей [13, 124].

Наиболее общий и в то же время простой подход к свертке основан на первоочередном вынесении за скобки символа или подвыражения с

наибольшим показателем участия. Показатель участия символа (подвыражения) равен количеству слагаемых выражения, в которых данный символ (подвыражение) используется в качестве сомножителя. Если имеется несколько подвыражений, претендующих на выделение в первую очередь, то предпочтение отдается тому из них, которое наиболее трудоемко по числу операций. Этот подход, предложенный Бройером [130], нередко используется в оптимизирующих компиляторах с алгоритмических языков [79]. Теоретически подход Бройера позволяет разработать алгоритм оптимальной свертки. Однако на практике, даже при использовании высокопроизводительного компьютера, такой алгоритм оказывается применимым лишь для весьма простых выражений. Причиной этого является экспоненциальный характер процедуры поиска подвыражений - претендентов на выделение в первую очередь.

На основе подхода Бройера первоначально был разработан алгоритм свертки схемного определителя, использующий выделение отдельных символов - параметров схемы (но не подвыражений) [79, 90]. Алгоритм включает следующие шаги:

- 1) выбор символа с наибольшим показателем участия в исходном выражении или свободном подвыражении;

- 2) вынесение выбранного символа за скобки (при этом образуются подвыражение-сомножитель и свободное подвыражение); занесение свободного подвыражения в стек, то есть магазин с правилом “первым зашел, последним вышел”;

- 3) если подвыражение-сомножитель не является отдельным символом, то выбрать в этом подвыражении символ с наибольшим показателем участия и перейти к пункту 2;

- 4) если стек не пустой, то извлечь из него очередное свободное подвыражение и перейти к пункту 1.

Предложенный алгоритм был использован в первых версиях программы SYMBOL для формирования вложенных выражений передаточных ССФ [90 -

92, 96]. Программа SYMBOL была успешно апробирована и внедрена (1989 - 1992 гг.) в 14 проектных организациях и вузах. Однако формируемые программой SYMBOL выражения ССФ не только не являются оптимальными, но и могут быть легко улучшены в результате визуального просмотра. Основной причиной этого является то, что алгоритм свертки, выделяя лишь отдельные символы, не обеспечивает сокращения операций сложения. Возможности программы SYMBOL ограничиваются схемами до 10 узлов, имеющими разреженную структуру. Фактически это ограничение определяется числом слагаемых в развернутом выражении знаменателя ССФ (не превышающим 2500 для первых версий SYMBOL [96]), которое необходимо для выполнения свертки целиком помещать в память компьютера.

Количество слагаемых в схемном определителе увеличивается с усложнением схемы по экспоненциальному закону. Поэтому дальнейшее развитие теории факторизации абстрактных алгебраических выражений [5] вряд ли будет содействовать решению проблемы формирования оптимальных выражений ССФ. Иными словами, специалисты по теории электрических цепей, при всем своем желании, не смогут переложить задачи символьного анализа на плечи набирающих мощь универсальных систем аналитических вычислений. Опыт реализации программы SYMBOL и работа с наиболее продвинутой в обсуждаемом направлении системой МАТЕМАТИКА-3 [137] убеждает в том, что с помощью подобных систем принципиально невозможно получение ССФ для схем в десятки узлов и элементов.

Символьный анализ схем в десятки-сотни узлов и элементов возможен только при формировании вложенных выражений схемных определителей непосредственно, минуя как получение развернутого выражения, так и последующую его свертку. Сложность схем, подлежащих символьному анализу при реализации предлагаемого подхода, будет зависеть не столько от числа узлов схемы и слагаемых ее определителя, сколько от эффективности алгоритмов прямого формирования ССФ. В этой связи первостепенное

значение приобретает проблема оптимального разложения схемных определителей.

2.3. Структура схемы - ключ к формированию оптимальных ССФ

Для решения поставленной проблемы используем то обстоятельство, что в случае свертки выражений схемных определителей имеется возможность резко повысить эффективность формирования и уменьшить вычислительную сложность формул. Это обеспечивается учетом взаимно однозначного соответствия между преобразованиями алгебраического выражения и изменениями в структуре (топологии) рассматриваемой схемы. Такое соответствие непосредственно вытекает из формул Фойснера (1.2) и (1.3). Сопоставляя приведенный в подразделе 2.2 алгоритм свертки с формулой (1.2), убеждаемся в их изоморфизме. Действительно, понятия “символ”, “подвыражение-сомножитель”, “свободное подвыражение” соответствуют понятиям “у-ветвь”, “производная схема стягивания”, “производная схема удаления”.

Наполнение абстрактного алгоритма свертки схемным содержанием открывает новые возможности. В отличие от ПУ символа, который вычисляется путем просмотра выражения, здесь вводится ПУ ветви [70, 74], который получается в результате стягивания этой ветви и нахождения числа деревьев образованной при этом схемы. Таким образом, удается исключить крайне трудоемкую обработку развернутого выражения определителя и, оперируя исключительно изображениями исходной схемы и производных от нее схем, сделать первый шаг к формированию оптимальных выражений ССФ.

Алгоритм формирования выражений на схемном уровне, в отличие от алгоритма свертки, способен обеспечить выбор не только одиночных символов, но и подвыражений, которые имеют наибольшую трудоемкость по числу операций. Это оказывается возможным по той причине, что

произвольному подвыражению всегда может быть сопоставлена подсхема. Например, в простейшем случае подвыражение представляет собой сумму символов или, кратко, мультисимвол. При использовании алгоритма свертки непросто подобрать для мультисимвола соответствующее подвыражение-сомножитель. Иными словами, имеющиеся возможности для уменьшения сложности свертки непросто обнаружить путем визуального просмотра выражения, даже если оно не слишком сложное. В этом можно убедиться, используя результаты анализа несложных схем с помощью программы SYMBOL [90]. С другой стороны, в алгоритме формирования на схемном уровне выделение мультисимволов не вызывает затруднений, поскольку суммы символов в формуле схемного определителя всегда соответствуют параллельным u -ветвям (мультиветвям) или последовательным z -ветвям (макроветвям) схемы [97].

Принципиальным достоинством алгоритма формирования на основе выделения параметров является автоматический учет мультиветвей, которые образуются в производной схеме стягивания (см. формулы (1.2) и (1.3)). Следовательно, алгоритм свертки, работающий с выражением, уступает алгоритму формирования на схемном уровне тем значительней, чем сложнее это выражение. Слагаемые свертываемого выражения предельно сжаты в изображении схемы, а выделение требуемых подмножеств слагаемых сводится к простейшим операциям над схемой - стягиванию и удалению мультиветвей или макроветвей. Поскольку u -ветвь и z -ветвь являются соответственно мультиветвью и макроветвью единичной кратности, далее без необходимости не будем различать эти понятия, используя обобщенные понятия “мультиветвь” и “макроветвь”.

Вторым шагом к формированию оптимальных выражений ССФ является установление правил, которые обеспечивают оптимальное управление процессом выделения мультиветвей, макроветвей и более сложных подсхем. Оптимальность работы алгоритма формирования, по аналогии с алгоритмом

свертки, будет заключаться в очередности выделения мультиветвей и макроветвей. В силу дуальности формул (1.2) и (1.3), среди мультиветвей (макроветвей) выбирается та, которая имеет наибольший (наименьший) ПУ, равный числу деревьев схемы, содержащих эту мультиветвь или макроветвь.

Число деревьев, содержащих рассматриваемую ветвь, можно найти как определитель соответствующей производной схеме стягивания матрицы Трента [162]. При этом не следует учитывать кратность мультиветвей и макроветвей, то есть они считаются обычными ветвями. Однако численное получение ПУ приводит к более чем двухкратному увеличению сложности алгоритма формирования оптимальных выражений схемных определителей. Это было установлено Д. В. Шеиным в ходе экспериментов с компьютерными программами [110, 111]. В этой связи здесь предлагается правило, названное правилом минимума, позволяющее весьма точно осуществлять выбор ветвей с наибольшими ПУ непосредственно по структуре схемы, избежав трудоемкого вычисления самих ПУ.

В схеме выбирается узел или сечение, которым инцидентно минимальное количество ветвей. Наибольшим ПУ обладает та из них, которая смежна меньшему числу ветвей. Правило минимума доказывается с помощью разложения определителя схемы по некоторому узлу [141] при увеличении, начиная с единицы, количества инцидентных ему ветвей. Апробирование этого правила для определителей пассивных схем не выявило значительного увеличения сложности формируемых выражений по сравнению с использованием точных значений ПУ [100, 111].

Первоочередное выделение мультиветвей (макроветвей), имеющих наибольшие (наименьшие) ПУ положено в основу методологии формирования оптимальных выражений ССФ и названо правилом ПУ. Предложенная здесь реализация этого правила не требует как предварительного получения развернутого выражения схемного определителя, так и вычисления количества деревьев в производных схемах. Для исследования правила ПУ и установления

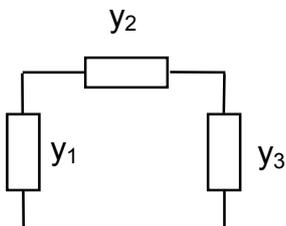
других правил оптимального формирования ССФ исследуем определитель полной схемы (ПС), которую Фойснер назвал наиболее общей моделью электрической цепи [141, 142].

2.4. Формирование оптимального выражения определителя ПС

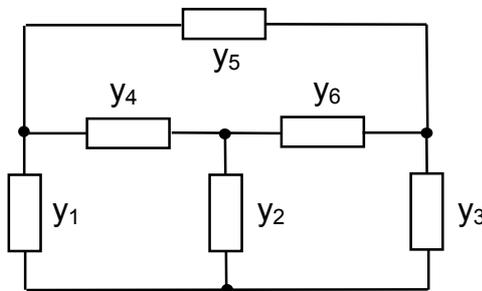
Пусть ПС содержит q узлов. В такой схеме $q(q-1)/2$ ветвей, то есть между каждой парой узлов имеется одна ветвь. Примеры ПС с тремя, четырьмя и пятью узлами показаны на рис. 2.2. Параметры ветвей ПС целесообразно задавать проводимостями, поскольку число ее независимых контуров, начиная с $q=5$, значительно превышает число независимых узлов.

Примеры полных схем

Полная схема с тремя узлами



Полная схема с четырьмя узлами



Полная схема с пятью узлами

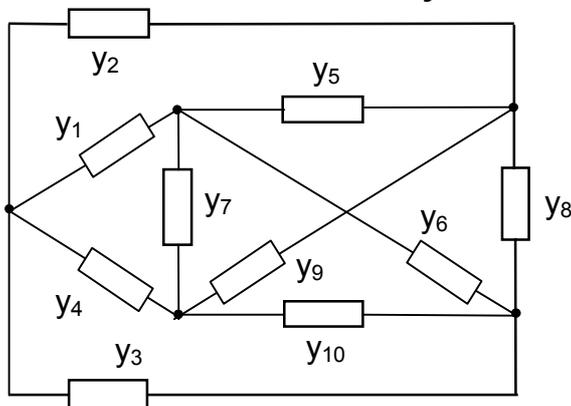


Рис. 2.2

2.4.1. Правило ПУ и минимизация операций умножения

Узел, с которого начинается нумерация ветвей, назовем исходным узлом ПС. Ветви, инцидентные исходному узлу, называются ведущими ветвями. Выделяя в соответствии с формулой (1.2) ведущие ветви ПС, получаем

$$\Delta = \sum_{i=1}^{q-1} y_i \Delta_i, \quad (2.1)$$

где $i = 1, 2, \dots, q-1$ - порядковые номера ведущих ветвей.

На первом шаге разложения по формуле (2.1) образуются $q-2$ полных мультисхем и одна ПС с $q-1$ узлами. Полной мультисхемой здесь называется схема, каждая пара узлов которой соединена ветвью или мультиветвью, причем все мультиветви имеют только один общий узел. Этот узел получается как результат объединения пары узлов и обязательно рассматривается на следующем шаге разложения определителя в качестве исходного узла. Инцидентные исходным узлам ветви и мультиветви являются ведущими во всех производных схемах.

Первоочередное выделение ведущих ветвей и мультиветвей исходной схемы и производных от нее схем при рекурсивном использовании формулы (2.1) обеспечивает полную реализацию правила ПУ, что вытекает из правила выбора ветвей с наибольшими ПУ (см. подраздел 2.3.). Количество операций умножения, являющееся основным показателем сложности формируемых выражений, может быть найдено по рекуррентной формуле

$$V_q = (q-1) (1 + V_{q-1}), \quad (2.2) \text{ где вычисления}$$

начинаются с $q=3$ ($V_2 = 0$). Формула (2.1) непосредственно следует из выражения (2.1) с учетом того, что наличие в производных схемах мультиветвей кратности, большей единицы, не оказывает влияния на количество умножений в формируемом выражении определителя ПС. Далее будет показано, что порядок выделения мультиветвей кратности, большей единицы, оказывает весьма сильное влияние на количество операций сложения.

2.4.2. Минимизация операций сложения и правило кратности

Ведущие мультиветви производных схем могут иметь различную кратность. Поэтому возможны варианты реализации формулы (2.1) с различным числом операций сложения. Для исследования ряда конкурирующих выражений введем ПУ ведущей мультиветви, равный количеству ее появлений в формируемом выражении. Рассматривая формулу (2.1) при конкретных значениях $q = 3, 4, 5$ (см. рис. 2.2) и т.д., можно убедиться, что ПУ ведущих ветвей $1, 2, 3, \dots, q-1$ подчиняются закону двоичного счетчика и равны соответственно $1, 2, 4, \dots, 2^{q-1}$. Этому же закону подчиняются ПУ ведущих мультиветвей в полных мультисхемах. Следовательно, очередность выделения мультиветвей имеет решающее значение для экономии операций сложения. Чтобы параметры мультиветвей с наибольшей кратностью имели наименьший ПУ, они должны выделяться в первую очередь. Это второе важное положение в методологии формирования оптимальных выражений ССФ назовем правилом кратности.

При исследовании оптимальной формулы (2.1) определителя ПС учтем, что число сложений в определителе полной мультисхемы больше числа сложений в определителе ПС с таким же количеством узлов на сумму ПУ ведущих ветвей. Это объясняется тем,

что ведущие ветви обязательно входят в состав мультиветвей, которые, как было обосновано, должны выделяться в первую очередь. Проиллюстрируем сказанное на примере разложения определителя ПС с пятью узлами (см. рис. 2.2).

Используя выражение (2.1) при $q=5$ с учетом правила кратности и кодируя для краткости проводимости ветвей их порядковыми номерами, получаем

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 \Delta_1 + 2 \Delta_2 + 3 \Delta_3 + 4 \Delta_4 = \\ & 1 \{ (2+5) [(3+6+8)(4+7+9+10) + (4+7+9)10] + \\ & \quad (3+6) [(4+7+10)(8+9) + 8 \cdot 9] + (4+7) [8(9+10) + 9 \cdot 10] \} + \\ & 2 \{ (3+8) [(4+9+10)(5+6+7) + (5+6)7] + \\ & \quad (4+9) [(5+7)(6+10) + 6 \cdot 10] + 5 [6(7+10) + 7 \cdot 10] \} + \\ & 3 \{ (4+10) [(6+7)(5+8+9) + (8+9)5] + \\ & \quad 6[(8+5)(7+9) + 7 \cdot 9] + 8[5(7+9) + 7 \cdot 9] \} + \\ & 4 \{ 5[(6+8)(7+9+10) + (7+9)10] + \\ & \quad 6[(7+10)(8+9) + 8 \cdot 9] + 7[8(9+10) + 9 \cdot 10] \}. \end{aligned}$$

В этой формуле подвыражениями являются определители полных мультисхем с четырьмя узлами: Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 . ПУ ведущих ветвей в указанных подвыражениях равны соответственно 1, 2, 4 (ведущие ветви 2, 3, 4); 1 и 2 (ведущие ветви 3 и 4); 1 (ведущая ветвь 4). Количество сложений в определителе ПС с четырьмя узлами Δ_4 меньше числа сложений в определителях Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 соответственно на 7, 3 и 1, то есть на сумму ПУ ведущих ветвей.

В общем случае сумма ПУ ведущих ветвей находится по формуле

$$\gamma = 2^{q-2} - 1 + 2^{q-3} - 1 + \dots + 2^1 - 1 = 2^{q-1} - q.$$

Отсюда на основе выражения (2.1), учитывая $\eta = q-2$ знаков сложения, разделяющих подвыражения, возглавляемые ведущими ветвями, получаем соотношение для числа сложений в формуле определителя ПС

$$\delta_q = (q-1) \delta_{q-1} + \gamma + \eta, \quad (2.3) \quad \text{где}$$

вычисления начинаются с $q=3$ ($\delta_2 = 0$).

2.4.3. Сравнение оптимальных формул с эвристическими формулами определителей ПС

Чтобы убедиться в фундаментальности установленных правил для формирования оптимальных выражений схемных определителей, проведем сравнение сформированных выражений с выражениями, предложенными эвристически и обладающими наименьшей вычислительной сложностью среди известных формул. Такие выражения были получены ранее на основе разложения по ветвям, входящим в пути между парами узлов [71, 84]. Определитель ПС в этом случае имеет вид

$$\Delta = \sum_{i=1}^{q-1} P_i^{12\dots i-1, i+1\dots q-1}, \quad (2.4)$$

где $P_i^{12\dots i-1, i+1\dots q-1}$ - свернутое выражение для i -го подмножества слагаемых определителя, составленное из весов деревьев, которые содержат путь от исходного узла по ветви i к узлу q , не проходящий через оставшиеся ведущие ветви. На это указывают верхние индексы у символа P .

При достижении некоторым путем q -го узла выполняется стягивание ветвей, по которым проходит путь. После этого к производной схеме вновь применяется формула (2.4) и т.д. до получения простейшей схемы в виде мультиветви. Эффект свертки обеспечивается вынесением параметров ветвей (мультиветвей) за скобки по мере подсоединения к пути и преобразованием параллельных ветвей в мультиветви. Например, для ПС с четырьмя узлами (см. рис. 2.2) получаем следующее выражение определителя

$$\Delta = P_1^{23} + P_2^{13} + P_3^{12} = 1[46 + 5(2+4+6)] + 2[45 + 6(1+4+5)] + 3[(1+5)4 + (2+6)(1+4+5)].$$

Формулу (2.4) удобно представить в виде ветвящегося из исходного узла дерева, которое имеет $q-1$ ярус. В первом ярусе из исходного узла ответвляется $q-1$ ветвей. Во втором ярусе каждая ветвь первого яруса разветвляется на $q-2$ ветвей и мультиветвей. На третьем ярусе каждая ветвь или мультиветвь второго яруса порождает $q-3$ ветвей и мультиветвей. Аналогичный процесс ветвления продолжается до $(q-1)$ -го яруса, где каждая ветвь или мультиветвь порождается единственной ветвью или мультиветвью $(q-2)$ -го яруса. Таким образом, в последнем ярусе дерева формулы определителя ПС содержится $(q-1)!$ ветвей и мультиветвей.

Достижение q -го узла одной из ведущих ветвей ПС соответствует образованию полной мультисхемы. Для определенности в производных схемах исходным узлом считается объединенный узел стянутого пути, а конечным узлом - узел с большим номером среди оставшихся узлов. Установление такого порядка ветвления приводит к тому, что в дереве формулы каждая ветвь или мультиветвь, достигающая текущего конечного узла, порождает на следующем ярусе исключительно мультиветви. При этом наибольшая кратность мультиветвей яруса оказывается равной его порядковому номеру, а число мультиветвей в i -м ярусе ($i > 1$) обратно пропорциональным величине $q+1-i$.

Учитывая регулярность структуры дерева формулы определителя ПС, получим выражения для количества требуемых операций умножения и сложения. Очевидно, что число умножений равно количеству узлов в дереве без исходного узла ветвления и конечных узлов последнего яруса, то есть

$$B_q = \sum_{i=1}^{q-2} \{q-1 \ i\}, \quad (2.5)$$

где $\{q-1 \ i\}$ - число размещений из $q-1$ элементов по i . Левые части выражений (2.2) и (2.5) совпадают не случайно, поскольку эти выражения эквивалентны. Количество операций умножения для $q=4, 5, \dots, 10$, рассчитанные с помощью выражения (2.2), как более простого, помещены во второй столбец табл. 2.2. Таким образом, конкурентоспособность формул, получаемых на основе выражения (2.4), будут определять другие показатели сложности.

Таблица 2.2

Количество операций умножения в формулах определителей ПС

Число узлов	Учет показателей	Учет последовательных	Учет трехузловых	Развернутое

узлов	участия	мультиветвей	подсхем	выражение
4	9	8	8	32
5	40	31	29	375
6	205	138	122	5184
7	1236	728	617	84035
8	8659	4514	3710	1572864
9	69280	32335	25979	33480783
10	623529	263204	207842	800000000

Для нахождения числа сложений в формуле (2.4) разобьем такие операции на два подмножества. К первому из них отнесем операции, разделяющие подвыражения определителя. Число этих операций обозначим A_q . На первом ярусе дерева будет $q-2$ сложений, а на последующих ярусах число сложений определяется рекурсивно $(q-1) A_{q-1}$. Отсюда $A_q = (q-1) (1 + A_{q-1}) - 1$, где вычисления начинаются с $q=3$ ($A_2=0$).

Второе подмножество включает операции сложения в мультиветвях дерева формулы (для мультиветви кратности i требуется $i-1$ сложений). Число таких операций можно найти по формуле, которая учитывает наибольшую кратность и число мультиветвей в некотором ярусе. Суммируя количество элементов указанных подмножеств, получаем искомое выражение для числа операций сложения в формуле (2.4)

$$D_q = A_q + (q-1)! \left[\frac{(q-2)}{2} + \sum_{i=3}^{q-1} \frac{(q-i)}{(i^2 - 2i)} \right], \quad (2.6)$$

где вычисления начинаются с $q=3$ ($A_3=1$).

Количества операций сложения, рассчитанные с помощью выражений (2.3) и (2.6), помещены во второй и третий столбцы табл. 2.3. Приведенные данные убедительно иллюстрируют предпочтительность формулы (2.1).

Выигрыш по числу операций сложения увеличивается с одной операции при $q=4$ до трех раз при $q=10$. Это может служить доказательством того, что для формирования оптимальных формул схемных определителей, необходимо выделять параметры исходной схемы и производных схем в соответствии с правилами ПУ и кратности.

Таблица 2.3

Количество операций сложения в формулах определителей ПС

Число узлов	Частичный учет показателей участия	Учет показателей участия и кратности	Учет последовательных мультиветвей	Учет трех-узловых подсхем	Развернутое выражение
4	13	12	11	11	15
5	78	62	54	50	124
6	517	340	270	237	1295
7	3875	2102	1493	1259	16806
8	32651	14840	9405	7698	262143
9	306215	118974	67675	54165	4782968
10	3166703	1071276	551484	433863	99999999

2.4.4. Выделение последовательно соединенных ветвей и мультиветвей

Исследуем оптимальные формулы определителей ПС на минимальность. Для этого примем во внимание другие алгоритмы формирования, позволяющие

уменьшить количество операций. Прежде всего следует учесть наличие в производных схемах последовательно соединенных ветвей и мультиветвей, используя формулу Фойснера (1.5). Последовательно соединенные ветви y_{q-2} и y_{q-1} образуются уже на первом шаге разложения по формуле (2.1)

$$\Delta = \sum_{i=1}^{q-3} y_i \Delta_i^{12\dots i-1} + (y_{q-2} + y_{q-1}) \Delta_{q-1}^{12\dots q-2} + y_{q-2} y_{q-1} \Delta_{q-2,q-1}^{12\dots q-3} \quad (2.7)$$

Формула (2.7), начиная с $q=4$, обеспечивает выигрыш в числе операций умножения и сложения. Так, в случае ПС с четырьмя узлами (см. рис. 2.2) формула определителя имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 \Delta_1 + (2+3) \Delta_2 + 2 \cdot 3 \Delta_{23} \\ &= 1[(2+4)(3+5+6)+6(3+5)]+(2+3)[4(5+6)+5 \cdot 6]+2 \cdot 3(4+5) . \end{aligned}$$

Можно утверждать, что попытки получить для этой схемы более экономную формулу определителя обречены на неудачу. Такой эксперимент был проведен В. Н. Тухтаровым с помощью компьютерной программы, предусматривающей полный перебор вариантов свертки [6].

Выигрыш в числе операций при использовании формулы (2.7) вместо формулы (2.1) оказывается более существенным с увеличением числа узлов ПС, в чем можно убедиться, рассмотрев выражение определителя ПС с пятью узлами (см. рис. 2.2)

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 \Delta_1 + 2 \Delta_2 + (3+4) \Delta_4 + 3 \cdot 4 \Delta_{34} = \\ &1 \{ (2+5) [(3+6+8)(4+7+9+10) + (4+7+9)10] + \\ &\quad (4+7+3+6) [8(9+10) + 9 \cdot 10] + (4+7)(3+6)(8+9) \} + \\ &2 \{ (3+8)[(4+9+10)(5+6+7)+(5+6)7] + (4+9+5)[6(7+10) + 7 \cdot 10] + \\ &\quad (4+9)5(6+10) \} + \end{aligned}$$

$$(3+4) \{ 5 [(6+8)(7+9+10) + (7+9)10] + (6+7)[8(9+10)+ 9 \cdot 10] + 6 \cdot 7(8+9) \} + \\ 3 \cdot 4 [(6+7)(5+8+9) + (8+9)5] .$$

Рекуррентное соотношение для количества операций умножения в формуле (2.7) получается аналогично соотношению (2.2)

$$K_q = (q-2) (1 + K_{q-1}) + K_{q-2} + 2 , \quad (2.8) \text{ где}$$

вычисления начинаются с $q=4$ ($K_2 = 0, K_3 = 2$).

Применение формулы (2.7) к трехузловым полным мультисхемам нецелесообразно вследствие увеличения количества операций сложения. Это показывает непосредственная проверка на примере формулы определителя ПС с пятью узлами. Для нахождения числа сложений в общем случае необходимо учесть, что сочетание разложения по ветвям с разложением по устранимым узлам приводит к увеличению ПУ только предпоследней и последней ведущих ветвей (мультиветвей).

Отклонение значений ПУ от закона двоичного счетчика можно вычислить, рассмотрев полные мультисхемы, которые образуются в результате стягивания одной, двух и т.д. $q-4$ ведущих ветвей, а также удаления одной и стягивания другой из ведущих ветвей (мультиветвей) исходной схемы или указанных производных схем. Множество получаемых мультисхем можно подразделить на два подмножества. Исходному узлу мультисхем, принадлежащих к первому подмножеству, инцидентны только мультиветви с ведущими ветвями. Число таких мультисхем находится как функция w_1 от числа узлов $w_1(q) = q-4$.

Второе подмножество образуют мультисхемы, в которых одна и только одна из мультиветвей, инцидентных исходному узлу, не содержит ведущей ветви. В том числе $w_1(q)$ мультисхем получаются в результате преобразования исходной схемы удалением первой ведущей ветви и поочередным стягиванием оставшихся ведущих ветвей до образования мультисхемы с четырьмя узлами. Оставшиеся мультисхемы получаются аналогичными преобразованиями

мультисхем, принадлежащих к первому подмножеству. Число всех мультисхем второго подмножества находится как функция w_2 от числа узлов вида $w_2(q) = w_1(q)$

$$\sum_{i=1} i = \{w_1(q) [1 + w_1(q)]\} / 2 .$$

Количество мультисхем, также подлежащих учету в формуле (2.7) и порождаемых мультисхемой, которая образована стягиванием двух последних по порядку ведущих ветвей исходной схемы, находится как $w_1(q-2)$ и $w_2(q-2)$.

Учитывая изложенное нетрудно прийти к следующему рекуррентному соотношению для числа операций сложения в формуле (2.7)

$$\chi_q = (q-2) \chi_{q-1} + \gamma + w_1(q) + w_2(q) + \chi_{q-2} + 2^{q-3} - 1 + w_1(q-2) + w_2(q-2) + \eta + 1. \quad (2.9)$$

Последнее слагаемое - единица в формуле (2.9) обусловлено операцией сложения проводимостей последних ведущих ветвей в формуле (2.7).

Выполнив необходимые упрощения, можно привести формулу (2.9) к виду

$$\chi_q = (q-2) \chi_{q-1} + 5 \cdot 2^{q-3} + \chi_{q-2} + q(q-7) + 9, \quad (2.10) \text{ где}$$

вычисления начинаются с $q=4$ ($\chi_2 = 0, \chi_3 = 2$).

Результаты расчетов по формулам (2.8) и (2.10) сведены соответственно в третий и четвертый столбцы табл. 2.2 и 2.3. Совокупность полученных данных показывает, что использование двух установленных правил необходимо, но не достаточно для формирования оптимальных выражений схемных определителей.

2.4.5. Выделение трехузловых подсхем и правило половинного деления

В качестве первой подсхемы при использовании формулы (1.7) можно выбрать более сложную часть преобразованной ПС, если добавить ветвь u_t , смежную обоим последовательно соединенным ветвям. Удобно принять

упорядоченную нумерацию ветвей ПС [69, 80], как на рис. 2.2, при которой $t = q(q-1)/2$. Тогда совместное использование формул (2.1) и (1.5) приведет к выражению

$$\Delta = \sum_{i=1}^{q-3} y_i \Delta_i^{12\dots i-1} + (y_{q-2} + y_{q-1}) \Delta_{q-1}^{12\dots q-2,t} + [y_{q-2} (y_{q-1} + y_t) + y_{q-1} y_t] \Delta_{q-2,q-1}^{12\dots q-3} \quad (2.11)$$

Используя выражение (2.11) при $q=5$ получаем следующую формулу определителя ПС с пятью узлами

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 \Delta_1 + 2 \Delta_2 + (3+4) \Delta_4 + [3(4+10) + 4 \cdot 10] \Delta_{34} = \\ & 1 \{ (2+5) [(3+6+8)(4+7+9+10) + (4+7+9)10] + \\ & (8+9)(3+6)(4+7) + [8(9+10) + 9 \cdot 10](3+6+4+7) \} + \\ & 2 \{ (3+8) [(4+9+10)(5+6+7)+(5+6)7] + (6+10)(4+9)5 + \\ & [6(7+10)+7 \cdot 10](4+9+5) \} + \\ & (3+4) \{ (6+8)7 \cdot 9 + [6(5+8) + 5 \cdot 8](7+9) \} + \\ & [3(4+10) + 4 \cdot 10] [(6+7)(5+8+9) + 5(8+9)]. \end{aligned}$$

Анализ модификаций этой формулы показывает, что при разложении определителей производных схем с четырьмя узлами (повторное использование выражения (2.11)) следует добавлять ветвь или мультиветвь, смежную последовательно соединенным ветвям, к первой или второй подсхеме таким образом, чтобы по возможности уменьшить разность между количествами обычных ветвей в подсхемах. В противном случае возможен проигрыш в числе операций сложения.

Для оценки сложности выражения (2.11) примем во внимание, что количество вычислительных операций в сомножителе $\Delta_{q-1}^{12\dots q-2,t}$ можно найти как разность между количествами операций в определителях $\Delta_{q-2,q-1}^{12\dots q-2}$ и $\Delta_{q-1}^{12\dots q-3}$. При получении числа сложений из результата дополнительно вычитается единица. По количеству операций второй определитель - вычитаемое

тождественно равен второму сомножителю третьего слагаемого формулы (2.11), что упрощает расчеты. Таким образом, количество операций умножения в выражении (2.11) находится из соотношения

$$F_q = (q-2) (1 + F_{q-1}) + 2, \quad (2.12)$$

где вычисления начинаются с $q=4$ ($F_3 = 2$).

Для получения числа операций сложения v воспользуемся методикой, разработанной при выводе формулы (2.9). Вместе с тем, следует иметь в виду, что применение формулы (2.11) увеличивает ПУ последней ведущей ветви за счет первого сомножителя третьего слагаемого на $w_3 = q-5$. Поэтому количество сложений в первом слагаемом формулы (2.11) равно $v = (q-3) v_{q-1} + \gamma - 1 + w_1(q) + w_2(q) + w_3$.

Учитывая замечания, сделанные в предыдущем абзаце, получаем $v_q = v + v_{q-1} + w_3 + \eta$, а после необходимых упрощений

$$v_q = (q-2) v_{q-1} + 2^{q-1} + [q(q-3)-8] / 2, \quad (2.13)$$

где вычисления начинаются с $q=5$ ($v_4 = 11$).

Результаты расчетов с помощью выражений (2.12) и (2.13) сведены соответственно в четвертый и пятый столбцы табл. 2.2 и 2.3. Наименьшая сложность формул (2.11) указывает на то, что, наряду с правилами ПУ и кратности, необходимо придерживаться третьего правила, которое назовем правилом половинного деления. Это означает, что выбирая в качестве выделяемой подсхемы все более сложные части схемы (мультиветвь наибольшей кратности, пара последовательно соединенных мультиветвей, треугольник из мультиветвей), а также минимизируя разность между

количеством ветвей в выбранных подсхемах, достигаем наименьшей сложности выражения.

Эффективное формирование оптимальных выражений ССФ обеспечивается учетом связи между арифметическими преобразованиями формулы определителя схемы и топологическими преобразованиями в этой электрической схеме. Следует подчеркнуть, что использование для получения ССФ существующих систем аналитических вычислений не позволяет приблизиться к показателям сложности оптимальных выражений [137]. Дело в том, что в таких системах не учитываются топологические свойства электрических цепей и особенности их матриц. Например, выражение определителя полной матрицы узловых проводимостей четвертого порядка, полученное с помощью пакета МАТНЕМАТИСА-3, содержит 77 умножений и 110 сложений (это лучший результат среди аналогичных пакетов [137]). Вместе с тем рассмотренное выше оптимальное выражение определителя полной пятиузловой у-схемы требует соответственно 29 и 50 операций (см. табл. 2.2 и 2.3).

Чтобы не было сомнений в том, что получение развернутых выражений для определителей ПС и последующая их свертка практически нереализуемы, приведем показатели сложности таких выражений. Количество слагаемых в определителе ПС находится по формуле Фойснера q^{q-2} . Отсюда следует, что число сложений в развернутом выражении определителя равно $q^{q-2} - 1$, а число умножений получается из выражения $(q-2) q^{q-2}$. Соответствующие значения для количества операций приведены в последних столбцах табл. 2.2 и 2.3.

Таким образом, оптимальные формулы требуют на несколько порядков (в случае сложных схем) меньше операций, по сравнению с развернутыми выражениями. Тем не менее при увеличении числа узлов ПС на единицу количество операций умножения возрастает до 7 - 9 раз даже в оптимальных формулах. Предпринятые в работе попытки получить для ПС более экономные

формулы, чем формулы вида (2.11), на основе деления на части по трем и более узлам (см. выражение (1.7)) не дали положительного результата. Трудоемкость анализа ПС можно объяснить невозможностью реализовать правило половинного деления в полном объеме, то есть разделять схему или производные схемы на приблизительно одинаковые по сложности подсхемы. Для наиболее детального исследования и обоснования этого правила рассмотрим схемы с лестничной и цепной структурами.

2.5. Формирование оптимальных выражений определителей

для лестничных и цепных схем

На рис. 2.3 изображена схема, состоящая из n звеньев (контуров), которая называется лестничной схемой.

Лестничная схема

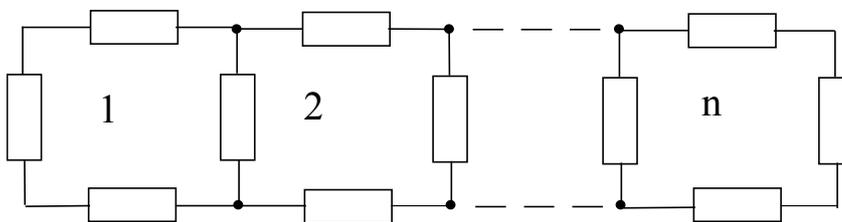


Рис. 2.3

Иерархическое деление данной схемы на две подсхемы или, более кратко, иерархическую бисекцию [100] можно выполнить двумя способами. Первый способ состоит в применении наращивания, то есть исходная схема на первом уровне иерархии делится на две подсхемы, которые несопоставимы по сложности. Так, размерность первой подсхемы соответствует минимальной размерности, а вторая подсхема, подлежащая дальнейшему делению, представляет собой оставшуюся часть схемы. Со второй подсхемой вновь

поступают как с исходной схемой и т.д. до получения на последнем уровне иерархии двух подсхем минимальной размерности. Немногим известно, что наращивание как способ разложения схемного определителя путем подсоединения к первоначальной схеме узла с инцидентными ветвями обсуждалось еще Фойснером [141]. Впоследствии способ наращивания получил преимущественное развитие в отечественных и зарубежных разработках по символьному анализу электрических цепей [13, 51, 59 - 61, 124, 125, 127, 146, 150 - 152, 169].

Второй способ бисекции основан на установленном в пункте 2.4.5. правиле половинного деления. Объективное исследование требует рассмотрения двух указанных полярных способов анализа лестничной схемы по формуле (1.5). В первом случае выполняется деление исходной схемы и производных схем по диагонали первого звена. Заметим, что наличие мультиветвей в производных подсхемах влияет только на количества сложений в формулах соответствующих определителей. Следовательно, число операций умножения в формуле определителя лестничной схемы можно найти, используя рекуррентное соотношение

$$\psi_n = 2 \psi_{n-1} + 4. \quad (2.14)$$

Во втором случае осуществляется половинное деление, то есть схема и производные подсхемы делятся на части в $(n+1) / 2$ звене (n - нечетное) или в $n / 2$ звене (n - четное). Соответствующие выражения для числа операций умножения имеют вид

$$M_n = \begin{cases} 4 (1 + M_{(n-1)/2}) & \text{для } n = 1, 3, \dots, \\ 2 (2 + M_{n/2} + M_{(n-2)/2}) & \text{для } n = 2, 4, \dots. \end{cases} \quad (2.15)$$

Данные табл. 2.4, в которую сведены расчеты по формулам (2.14) и (2.15), показывают, что следование правилу половинного деления обеспечивает

резкое сокращение вычислительных затрат. Объяснить столь высокий эффект можно минимизацией количества рекурсивных обращений при разложении определителя. Иными словами, в результате половинного деления обеспечивается получение простейших схем за меньшее число шагов разложения (улучшение “сходимости”) с одновременным резким уменьшением сложности формируемого выражения.

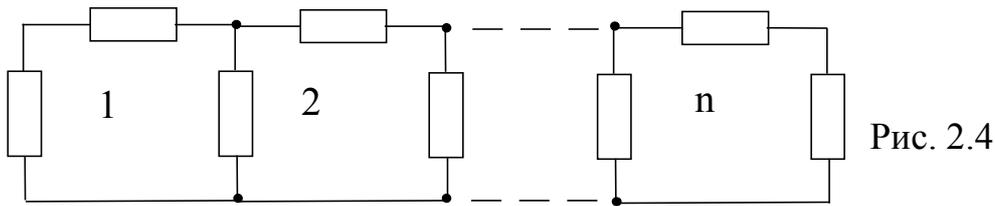
Таблица 2.4

Количество операций умножения в формулах определителей
лестничных схем

Число звеньев	Число узлов	Первое звено	Среднее звено	Развернутое выражение
1	4	4	4	8
2	6	12	12	60
3	8	28	20	336
4	10	60	36	1672
5	12	124	52	7800
6	14	252	68	34932
7	16	508	84	152096
8	18	1020	116	648720
9	20	2044	148	2723688
10	22	4092	180	11294380

Настоящее исследование не было бы полным без рассмотрения классических цепных схем, которые находят большое практическое применение [28]. Цепная схема, состоящая из n звеньев, изображена на рис. 2.4.

Цепная схема



Используя формулу (1.5), где в качестве первой подсхемы выступает первое звено (трехузловая ПС или мультисхема), получаем выражение для числа операций умножения

$$J_n = 2 J_{n-2} + 5 . \quad (2.16) \text{ В}$$

случае половинного деления цепной схемы имеем

$$T_n = \begin{cases} 3(1+T_{(n-1)/2})+T_{(n-3)/2} & \text{для } n=1,3,\dots , \\ 3(1+T_{(n-2)/2})+T_{n/2} & \text{для } n=2,4,\dots . \end{cases} \quad (2.17)$$

Результаты расчетов по формулам (2.16) и (2.17) представлены в табл. 2.5.

Для сравнения вложенных формул с развернутыми выражениями схемных определителей необходимы соотношения для числа деревьев лестничной и цепной схем. Такие соотношения нетрудно получить из формулы (1.5) при рассмотрении первых звеньев этих схем в качестве первых подсхем. Отсюда число деревьев лестничной схемы рассчитывается с помощью выражения

$$W_n = 3 W_{n-2} + 4 \left(3 + 2 \sum_{i=1}^{n-2} W_i \right) = 4 W_{n-1} - W_{n-2} . \quad (2.18)$$

Аналогичная формула для цепной схемы имеет вид

$$V_n = 2 V_{n-2} + 3 \left(2 + \sum_{i=1}^{n-2} V_i \right) = 3 V_{n-1} - V_{n-2} . \quad (2.19)$$

Таблица 2.5

Количество операций умножения в формулах

определителей цепных схем

Число звеньев	Число узлов	Первое звено	Среднее звено	Развернутое Выражение
1	3	2	2	3
2	4	5	5	16
3	5	9	9	63
4	6	15	14	220
5	7	23	20	720
6	8	35	27	2262
7	9	51	35	6909
8	10	75	44	20672
9	11	107	54	60885
10	12	155	65	177110

Окончательное выражение (2.19), полученное более сложным способом, имеется на с. 143 кандидатской диссертации Р.В.Дмитришина [13], а также других источниках.

Расчеты числа операций умножения в схемных определителях, выполненные на основе формул (2.18) и (2.19), приведены в последних столбцах табл. 2.4 и 2.5 соответственно. В целом данные, приведенные в табл. 2.2 - 2.5, показывают, что как для близких к полным, так и для сильно разреженных схем, вывод развернутых выражений ССФ, реализованный в ряде зарубежных компьютерных программ [138, 159], технически невозможен при анализе сложных электрических цепей. Вместе с тем вычислительная сложность оптимальных формул в случае электрических цепей с разреженной структурой, что на практике имеет место, вполне удовлетворяет современной компьютерной базе. Подтверждением этому служит табл. 2.6, которая содержит сведения о количестве операций в символьных определителях многозвенных лестничных и цепных схем.

Таблица 2.6

Показатели сложности оптимальных у-определителей
многозвенных схем

Число звеньев	Лестничные схемы			Цепные схемы		
	Число Узлов	Число умножений	Число сложений	Число узлов	Число умножений	Число сложений
10	22	180	133	12	65	71
20	42	660	499	22	230	259
30	62	1300	1226	32	495	572
40	82	2517	1939	42	860	987
50	102	3796	3079	52	1325	1563
60	122	5076	4763	62	1890	2225
70	142	7343	6024	72	2555	2956
80	162	9819	7662	82	3320	3851
90	182	12372	9741	92	4185	4912
100	202	14932	12125	102	5150	6128

Количество операций сложения для табл. 2.6 были найдены экспериментально с помощью счетчика, встроенного в программу формирования оптимальных выражений ССФ пассивных у-схем (автор программы Д. В. Шеин) [111]. В табл. 2.6 не помещены показатели выражений, сформированных по способу наращивания, поскольку непригодность этого способа для получения оптимальных формул убедительно иллюстрируют данные табл. 2.4 и 2.5. Вследствие того, что правило половинного деления до сих пор не было известно, у Лина и Гассона были основания критиковать форму представления ССФ в виде единого выражения, якобы в связи с невозможностью ее использования для сложных электрических цепей [150 - 152, 163].

По-видимому, Лин и Гассон обратили внимание на то, что при записи ССФ в виде последовательности выражений различные виды иерархической бисекции

приводят к не слишком различающимся по сложности формулам [102], если во всех случаях используется одно и то же деление на подсхемы. С другой стороны, Лин и Гассон справедливо заметили, что единые выражения ССФ, сформированные по способу наращивания, не могут конкурировать по сложности с последовательностями выражений, но ошибочно обобщили это свойство на все способы иерархической бисекции, включая даже те, которые им не были известны. Подчеркнем еще раз, что для формирования оптимального единого выражения ССФ необходимо осуществлять иерархическую бисекцию схемы в соответствии с правилом половинного деления [98, 100, 102]. При этом исходная схема делится на две подсхемы приблизительно одинаковой сложности. Аналогично поступают с подсхемами второго, третьего и т.д. уровней иерархии.

2.6. Формирование оптимальных выражений определителей

для z- и yz-схем

До сих пор обсуждались формулы, предусматривающие задание параметров ветвей схемы проводимостями. Однако, например, для лестничных схем число узлов более чем в два раза превышает число независимых контуров (звеньев), то есть $q = 2(n+1)$. Поэтому в качестве параметров ветвей лестничной схемы целесообразно использовать сопротивления. Напомним [56], что от y-определителя можно перейти к z-определителю по формуле

$$\Delta z = \Delta y \prod_{i=1}^m z_i, \quad (2.20)$$

где m - количество ветвей схемы.

Предлагаемая методология формирования ССФ не требует предварительного получения y-формулы с последующими применением соотношения (2.20) и трудоемкими преобразованиями. Оптимальная z-формула получается непосредственно на основе выражений (1.3), (1.4) и (1.5) с учетом правил ПУ, кратности и половинного деления. Количество операций в сформированном z-определителе лестничной схемы можно найти из выражения

$$\begin{aligned} & 2 (1 + H_{(n+1)/2} + H_{(n-1)/2}) \quad \text{для } n = 1, 3, \dots \\ & 3 (1 + H_n / 2) + H_{(n-2)/2} \quad \text{для } n = 2, 4, \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$H_n = \left\{ \right.$$

Выражение (2.21) получается аналогично выражениям (2.15) и (2.17), принимая во внимание образование макроветвей из последовательно соединенных z -ветвей. Расчеты с помощью выражения (2.21) показывают, что выигрыш в числе операций от задания параметров всех ветвей лестничной схемы сопротивлениями составляет более двух раз.

Предпочтительность задания параметров сопротивлениями не ограничивается до некоторой степени абстрактной лестничной схемой. Дело в том, что на практике традиционно [27, 141, 172] используются значения сопротивлений, а не проводимостей. Так, номиналы на резисторах указываются в Омах, в справочной литературе, монографиях, ориентированных на приложения, также используются z -формулы ССФ [7, 48]. Популярность в электротехнике y -параметров обусловлена в основном тем, что построить систему узловых уравнений оказывается существенно более просто, чем систему контурных уравнений схемы. Предлагаемая здесь универсальная методология формирования ССФ призвана устранить противоречие между ориентацией специалистов-практиков на z -формулы и возможностями, предоставляемыми существующими методиками получения ССФ.

2.6.1. Формирование оптимальных выражений yz -определителей

Число независимых узлов в цепной схеме на единицу больше числа независимых контуров. Поэтому, строго говоря, по крайней мере в случае простых схем z -формулы для определителей таких схем должны обладать несколько меньшей сложностью, чем сформированные в подразделе 2.5 y -формулы. С другой стороны, когда количества независимых узлов и контуров схемы отличаются незначительно, смешанное представление параметров ветвей открывает широкие возможности для размножения эквивалентных формул ССФ, имеющих различные показатели сложности [97].

Напомним [154], что развернутое выражение yz -определителя, также как развернутые выражения y - и z -определителей, содержит столько слагаемых,

сколько деревьев имеется в анализируемой схеме. Чтобы перейти от у-определителя к уз-определителю, можно воспользоваться формулой

$$\Delta_{yz} = \Delta_y \prod_{z \in Z} z, \quad (2.22)$$

где Z - множество z -ветвей этой схемы. Соотношение (2.22) означает, что i -е слагаемое уз-определителя равно произведению параметров y -ветвей, входящих в i -е дерево, и параметров z -ветвей, вошедших в дополнение этого дерева.

Обратим внимание на то, что если в i -е дерево входят только z -ветви, а дополнение этого дерева образуется только y -ветвями схемы, то значение i -го слагаемого определителя равно единице. Определитель схемы, имеющей такое дерево, является безразмерной величиной. При надлежащем задании параметров ветвей всегда могут быть получены безразмерные уз-формулы схемных определителей. Такие формулы потенциально более устойчивы при численных расчетах ССФ, поскольку малые значения y -параметров компенсируют при перемножениях большие значения z -параметров [62]. Однако желание получить безразмерную формулу ССФ может войти в противоречие с правилом ПУ, которое требует, чтобы ПУ ветвей схемы, задаваемых проводимостями (сопротивлениями) были по возможности меньшими (большими). Именно в этом случае обеспечивается формирование оптимальных по вычислительной сложности уз-выражений ССФ.

Таким образом, различные варианты представления параметров элементов схемы приводят к формированию существенно различающихся по сложности выражений ССФ. Важно, что всегда при необходимости могут быть получены безразмерные числители или знаменатели ССФ в сочетании с не слишком высоким проигрышем по другим их вычислительным свойствам. Следует подчеркнуть, что сформированные в соответствии с установленными правилами y - , z - и уз--формулы схемных определителей содержат одинаковое количество операций сложения, что вытекает из соотношений между y - , z - и уз-определителями (см. выражения (2.20) и (2.22)). В случае, если задание

параметров yz -схемы фиксировано, то следование правилам ПУ и кратности требует первоочередного выделения мультиветвей и макроветвей наибольшей кратности среди мультиветвей (макроветвей), имеющих наибольшие (наименьшие) ПУ.

2.6.2. Пример формирования оптимального выражения ССФ для цепной yz -схемы

Рассмотрим цепную схему с четырьмя звеньями, показанную на рис. 2.5 и 2.6.

Цепная схема с четырьмя звеньями
(неоптимальное задание параметров)

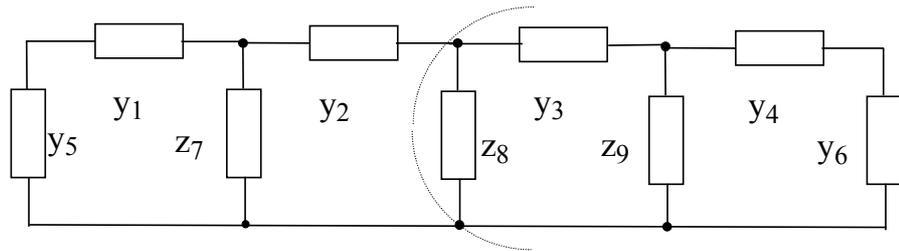


Рис. 2.5

Цепная схема с четырьмя звеньями
(оптимальное задание параметров)

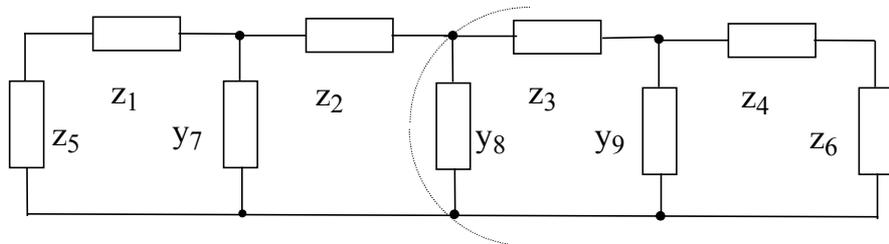


Рис. 2.6

Для

оценки ПУ ветвей применим правило минимума, рассмотренное в подразделе 2.3. Полученное распределение номеров ветвей схемы в порядке уменьшения их ПУ имеет вид: 1, 5, 4, 6, 2, 3, 7, 9, 8. Исследуем наихудший и оптимальный

случаи задания параметров схемы. В первом случае ветви с наименьшими (наибольшими) ПУ заданы сопротивлениями (проводимостями). Во втором случае, наоборот, ветви с наименьшими (наибольшими) ПУ заданы проводимостями (сопротивлениями).

Для первого случая имеем задание параметров ветвей схемы, представленное на рис. 2.5. Поделив схему на две части, как показано на этом рисунке, применяем формулу (1.5) в сочетании с формулами (1.2) и (1.3)

$$\Delta = \{ (y_1+y_5) (y_2z_7+1) + y_1y_5z_7 \} \{ (y_4+y_6) [y_3(z_8+z_9)+1] + \\ + y_4y_6z_9 (y_3z_8+1) \} + \{ y_2[y_1(z_7y_5 + 1) + y_5] \} z_8 \{ (y_4 + \\ + y_6) (y_3z_9 + 1) + y_4y_6z_9 \} . \quad (2.23)$$

Во втором случае используем схему, изображенную на рис. 2.6. Поступая аналогично первому случаю, имеем

$$\Delta = [(z_1+z_5) (z_2y_7 + 1) + z_2] \{ (z_4+z_6) [y_8 (z_3y_9 + 1) + y_9] + z_3y_8 + 1 \} + \\ + [y_7(z_1+z_5) + 1] \{ (z_4+z_6) (z_3y_9 + 1) + z_3 \} . \quad (2.24)$$

Как видно, 55 слагаемых схемного определителя (см. четвертую строку табл. 2.5) в формуле (2.24) представлены существенно более компактно. Число операций умножения и требуемых символов, по сравнению с формулой (2.23), уменьшилось соответственно с 20 и 35 до 11 и 26. Под символом здесь понимается обозначение параметра ветви или единица. В подтверждение уже сказанному в этом подразделе нетрудно убедиться, что символьный z-определитель рассматриваемой схемы требует всего 9 умножений и 24 символа. Для y-определителя указанные показатели имеют значения соответственно 14 и 29. Безразмерный yz-определитель можно получить, используя схему на рис. 2.6 и заменив в ней сопротивление z_6 на проводимость $y_6 = 1/z_6$. Обратим внимание на то, что полученная при этом схема имеет дерево $z_1z_2z_3z_4z_5$, не содержащее проводимостей, а в дополнение этого дерева - $y_6y_7y_8y_9$ входят только проводимости. Безразмерную формулу определителя такой схемы можно рассматривать как модификацию формулы (2.24), в которой изменены сомножители в фигурных скобках

$$\Delta = [(z_1+z_5) (z_2y_7 + 1) + z_2] \{ y_8(z_4y_6+1) + (z_3y_8+1) [y_9(z_4y_6+1) + 1] \} + \\ + [y_7(z_1+z_5) + 1] \{ (z_3y_9+1) (z_4y_6+1) + z_3y_6 \} .$$

Эта формула содержит 15 умножений и 30 символов, то есть незначительно уступает u -формуле. Следует отметить, что все пять упомянутых выше формул цепной схемы требуют по 14 операций сложения. Каждая из этих формул может быть использована в качестве знаменателя передаточного сопротивления (см. табл. 2.1). Необходимо помнить, что нахождение числителя ССФ требует такого же представления параметров ветвей, как в случае нахождения знаменателя.

Для получения числителя по схеме на рис. 2.5 к ней подсоединяется НУИ вида (12,13), где первая (вторая) пара цифр в скобках указывает узлы подсоединения генератора (приемника). Порядок следования номеров узлов указывает ориентацию генератора или приемника.

Ветви u_5 и u_6 , параллельные генератору и приемнику НУИ, могут быть удалены из схемы числителя, поскольку их стягивание потребовало бы объединения узлов генератора или приемника НУИ, что не допустимо по определению. Не допускается также оставлять “висячим” генератор или приемник НУИ, поэтому ветви u_1 и u_4 можно только стягивать и их значения войдут сомножителями в выражение числителя схемы на рис. 2.5.

Ветви z_7 и z_9 , параллельные генератору и приемнику НУИ во вновь образованной производной схеме, не могут быть стянуты. Следовательно, параметры z_7 и z_9 , подобно параметрам u_1 и u_4 , будут сомножителями в выражении числителя ССФ. Параметры ветвей u_2 и u_3 , соединенных последовательно с генератором и приемником НУИ очередной производной схемы также будут сомножителями выражения искомого числителя.

В результате стягивания ветвей u_2 и u_3 образуется схема в виде параллельного соединения генератора НУИ, приемника НУИ и ветви z_8 . Эту ветвь можно только удалять, поэтому ее параметр окажется сомножителем в выражении ССФ. Наконец, получается схема, состоящая из одного НУИ,

генератор и приемник которого ориентированы согласно (см. рис. 2.1), ее определитель равен 1. Таким образом, числитель схемы на рис. 2.5 будет иметь вид: $Y_1Y_2Y_3Y_4Z_7Z_8Z_9$.

В случае нахождения числителя схемы на рис. 2.6 поступаем аналогично, то есть z -ветви (y -ветви), параллельные генератору или приемнику НУИ, при удалении из схемы входят (не входят) в состав сомножителей, а z -ветви (y -ветви), соединенные последовательно с генератором или приемником НУИ, при стягивании не входят (входят) в состав сомножителей. Отсюда получаем более простое выражение числителя Z_5Z_6 , что обусловлено оптимальным заданием параметров ветвей цепной схемы.

Найденные выражения числителей соответствуют выражениям знаменателей, представленных формулами (2.23) и (2.24). Как видно, сформированные выражения для ССФ передаточного сопротивления достаточно просты, особенно в случае оптимального задания параметров, показанном на рис. 2.6, и даже могут составить конкуренцию специализированным выражениям ССФ цепных схем [28]. Это может служить дополнительным доводом в пользу состоятельности единых выражений ССФ, что оспаривается ведущими зарубежными специалистами [150 - 152, 163]. Действительно, получение более экономной последовательности выражений требует задания всех продольных (поперечных) ветвей цепной схемы сопротивлениями (проводимостями). Так, для обсуждаемой схемы на рис. 2.6 ветви 5 и 6 необходимо представить y -ветвями. Полученная при этом последовательность выражений содержит более двадцати формул.

Обработка ССФ в виде последовательности выражений требует специальных трудоемких алгоритмов [139, 163], что значительно усложняет получение приближенных выражений ССФ [131, 132, 140, 148, 149], нахождение функций чувствительности и т.д. Кроме того, наряду с операциями умножения, в последовательностях выражений обычно используются операции деления, что затрудняет аналитические исследования ССФ [28, 46, 48] и может

привести к увеличению погрешности при расчетах на основе ССФ [53]. Наконец, как в данном случае, выигрыш по числу операций не всегда бывает столь велик, чтобы мириться с перечисленными недостатками последовательностей выражений [102].

Говорить о формировании оптимальных z - и uz -формул обычно имеет смысл только в случае анализа схем, имеющих разреженную структуру. Для полных и близких к полным схем необходимо использовать задание элементов проводимостями и учитывать специфические свойства структуры [66, 72, 73, 76, 77]. Это не всегда приводит к удовлетворительным результатам, поскольку анализ ПС представляет собой сложную комбинаторную задачу (см. подраздел 2.4). Вместе с тем существует специальный класс ПС, параметры которых связаны определенными соотношениями. К таким схемам можно отнести полные уравновешенные схемы (ПУС), находящие применение в электротехнике и измерительной технике [7, 28, 172]. В следующем подразделе будет показано, что задача формирования оптимальных выражений ССФ для ПУС имеет чрезвычайно простое решение.

2.7. Формирование оптимальных выражений ССФ для ПУС

Количество операций в оптимальных формулах определителей ПС связано экспоненциальной зависимостью с числом узлов (см. подраздел 2.4). Это позволяет утверждать, что получение точных выражений ССФ для ПС в 15 - 20 узлов является весьма сложной задачей при современном уровне развития вычислительной техники. Применение приближенных выражений ССФ ограничено небольшими интервалами допустимых изменений параметров схемы и существенным снижением точности вычислений [131, 140, 149]. Исследования, проведенные в данном разделе, ставят своей целью показать, что использование соотношений между параметрами ветвей ПС (условий равновесия) приводит к предельному упрощению процедуры получения ССФ и линейной зависимости количества требуемых операций от числа узлов схемы.

Прежде всего, необходимо сделать терминологическое замечание. Для термина “полная уравновешенная схема”, который введен автором [106], в литературе существует синоним - “полный электрический многоугольник, эквивалентный звезде”. Целесообразность использования нового термина объясняется следующими причинами. Во-первых, под полным электрическим многоугольником понимается на самом деле ПС. Во-вторых, полный электрический многоугольник, эквивалентный звезде, по существу является обобщенным уравновешенным мостом Уитстона [172], так как условие равновесия четырехплечего моста выполняется для любого контура из четырех ветвей этого многоугольника [50]. Иными словами, вопрос о преобразовании полного электрического многоугольника в

эквивалентную звезду сводится к вопросу о возможности уравновешивания многоугольника таким образом, чтобы значения передаточных функций между парами различных узлов были равны нулю [28]. Наконец, термин “ПУС” более краток и в большей степени согласуется с терминологией теоретической электротехники (см. ГОСТ 19880-74).

В ПУС интерес представляют только входные ССФ и передаточные проходные ССФ, когда ПУС рассматривается как проходной четырехполюсник или 2-2-полюсник с общей стороной [23]. Обратим внимание на то, что вся информация о ССФ для ПУС заключена в параметрах эквивалентной звезды (лучевой схемы). Действительно, чтобы получить входное сопротивление ПУС достаточно сложить сопротивления соответствующих лучей звезды. Для нахождения передаточной ССФ требуется рассмотреть схему простейшего делителя напряжения или тока, содержащую три луча звезды. Таким образом, задача формирования оптимальных ССФ для ПУС сводится к нахождению оптимальных формул для параметров лучевой схемы, которая эквивалентна ПУС.

Постановка и решение задачи преобразования трехлучевой звезды в трехузловую ПУС и обратно выполнены сто лет назад и принадлежат Кенелли

[161]. Первым общее решение задачи преобразования ПУС в эквивалентную звезду или обратной задачи Росена [167] получил А.П.Новиков (г. Иваново) [50] и его результаты представляют наибольшую ценность для предпринятого здесь исследования. Им были предложены выражения для расчета проводимостей эквивалентной звезды

$$y_i = N_i N_{\Sigma}, \quad i=1, 2, \dots, q; \quad (2.25) \text{ где } N_{\Sigma} = \sum_{i=1}^q N_i.$$

Коэффициенты N_i спустя пятнадцать лет были названы постоянными узлов [45]. А.П.Новиков находил постоянную узла N_i через проводимости двух ветвей, инцидентных рассматриваемому узлу i , и проводимость ветви u_{kj} , дополняющей указанные ветви до треугольника ветвей,

$$N_i = \sqrt{u_{ij} u_{ik} / u_{kj}}. \quad (2.26)$$

Важнейшее свойство ПУС содержится в доказанном А.П.Новиковым положении о зависимости проводимости u_{kj} от проводимостей других ветвей, входящих в контур, имеющий четное количество ветвей (четный контур),

$$u_{kj} = T'_{kj} / T''_{kj}, \quad (2.27) \text{ где } T'_{kj}$$

(T''_{kj}) - произведение проводимостей нечетных (четных) по порядку ветвей в пути от узла k к узлу j . Соотношение (2.27) является условием равновесия ПС, обобщающим классическое условие равновесия Уитстона [172].

В общем случае формулам (2.25), как и другим известным формулам преобразования ПУС в звезду [11, 24, 168], присуща избыточность. Это значит, что они не позволяют выполнить переход от q каких-либо независимых проводимостей ПУС с q узлами к проводимостям q -лучевой звезды, минуя использование значений некоторых или всех из оставшихся $q(q-3)/2$ проводимостей. Замечательно, что применение безыбыточных формул по существу делает излишней трудоемкую процедуру исследования параметров ветвей ПС на предмет ее преобразования в звезду, поскольку это всегда возможно при наличии у лучевой схемы того или иного количества дополнительных элементов [45]. В наихудшем случае, когда условие

равновесия (2.27) не выполняется ни для одного четного контура ПС, она может быть преобразована к параллельному соединению ПУС меньшей размерности, что эквивалентно параллельному соединению соответствующих лучевых схем [105]. Для формирования безызбыточных выражений необходимо доказать, что вся информация о ССФ для ПУС содержится в ядре такой схемы.

2.7.1. Понятие ядра и нахождение постоянных узлов [103]

Ядром ПУС с q узлами называется ее подсхема, включающая q независимых проводимостей, то есть по А.П.Новикову в ядре должны отсутствовать четные контуры. Следовательно, в топологической интерпретации ядро может содержать один или несколько контуров, каждый из которых имеет нечетное количество ветвей. Такие контура называются нечетными контурами. При наличии нескольких контуров ядро ПУС представляет собой несколько изолированных друг от друга подсхем - компонент, в каждой из которых имеется один и только один нечетный контур. Узлы, принадлежащие таким контурам, будем называть контурными, в отличие от оставшихся неконтурных узлов ядра. Примеры одно-, двух- и трехконтурных ядер ПУС с 9 узлами изображены на рис. 2.7 - 2.10.

Ядро ПУС с девятью узлами в виде 9-контура

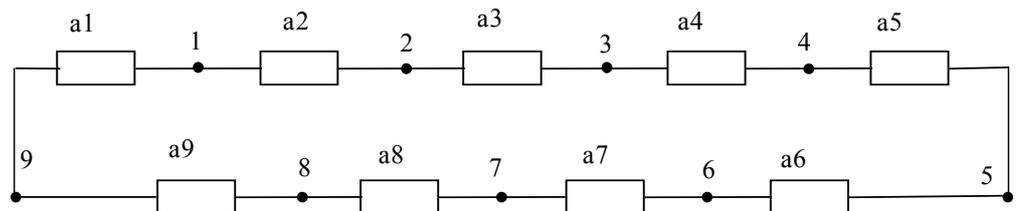


Рис. 2.7

Ядро ПУС с девятью узлами в виде 5-контура и неконтурных ветвей

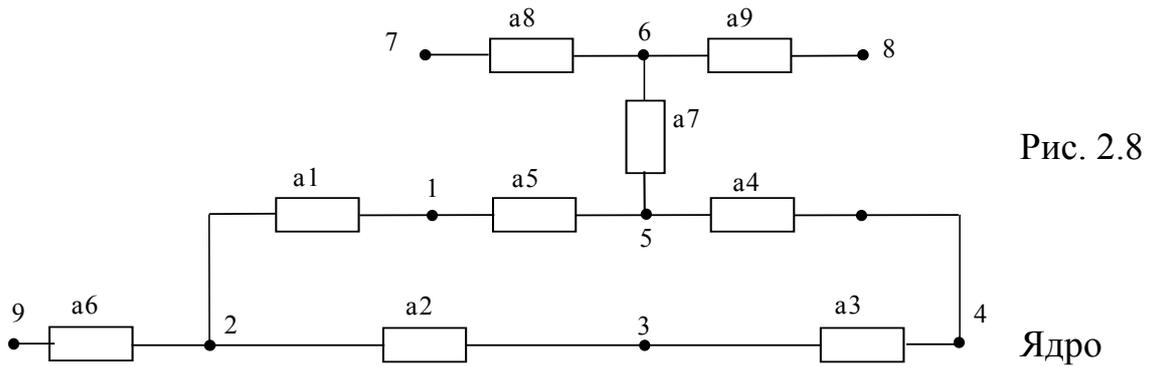


Рис. 2.8

Ядро

девятиузловой ПУС в виде двух контуров с

неконтурными ветвями

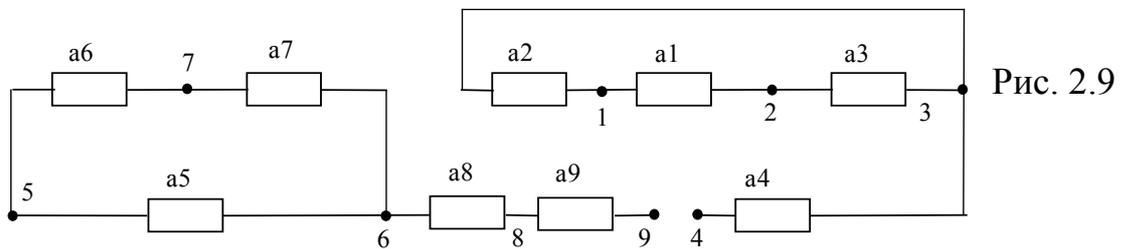


Рис. 2.9

Ядро ПУС с

девятью узлами в виде трех контуров

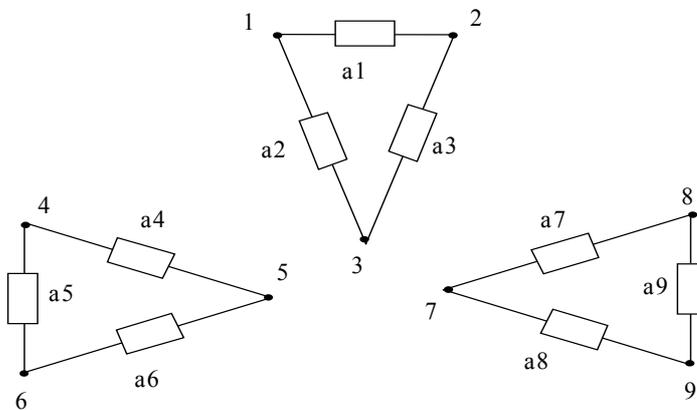


Рис. 2.10

Проводимости оставшихся 27 ветвей указанной ПУС являются зависимыми и они на рисунках не обозначены. Параметры ветвей того или иного ядра a_1, a_2, \dots, a_9 соответствуют проводимостям ветвей ПУС согласно используемой на рисунках нумерации узлов.

Как видно, относящиеся к некоторой компоненте неконтурные узлы связываются с контуром этой компоненты посредством неконтурных ветвей. Такие ветви образуют топологические объекты вида висячих ветвей, последовательностей ветвей, являющихся путями, а также древовидных конфигураций ветвей (см. рис. 2.8 и 2.9). В частном случае неконтурные ветви могут отсутствовать в одной из компонент или ядро вообще может не иметь таких ветвей (см. рис. 2.7 и 2.10).

Узлы ядра удобно классифицировать по уровням их расположения относительно контура соответствующей компоненты. Так, контурные узлы считаются находящимися на нулевом уровне. Неконтурные узлы первого, второго и т.д. уровня достижимы из узлов нулевого уровня посредством пути из одной, двух и т.д. ветвей ядра. Неконтурные узлы i -го уровня достижимы из неконтурных узлов $(i-1)$ -го уровня посредством одной неконтурной ветви. Неконтурные узлы, принадлежащие уровням с четными (нечетными) номерами будем называть четными (нечетными) узлами ядра. Например, ядро на рис. 2.8 включает два нечетных узла 6 и 9, а также два четных узла 7 и 8.

Постоянную узла i , принадлежащего любому контуру ядра, можно вычислить по формуле (2.26), предварительно получив проводимость u_{kj} из формулы (2.27). Используемый при этом четный контур содержит, кроме ветви u_{kj} , ветви рассматриваемого нечетного контура за исключением ветвей u_{ij} и u_{ik} .

Постоянную неконтурного узла i первого уровня некоторой компоненты можно вычислить через постоянную контурного узла j на основе соотношения

$$N_i = u_{ij} / N_j, \quad (2.28) \text{ где } u_{ij} -$$

проводимость ветви ядра, соединяющей узлы i и j . Тождество вида (2.28) было впервые использовано Шеном [168] для получения избыточных формул для преобразования ПУС в звезду, не требующих операций извлечения

квадратного корня. Спустя год этот результат, независимо от Шена, опубликовали А.А.Горев и М.В.Костенко [11]. Предлагаемое ниже использование тождества (2.28) отличается от его использования в указанных работах, поскольку нашей целью является получение безызыбыточных формул преобразования.

Постоянная неконтурного узла i в общем случае будет зависеть от четности его уровня по отношению к соответствующему контуру и находиться по одной из двух формул

$$N_i = B_i / N_j, \quad i \in \alpha \quad (2.29) \text{ или}$$

$$N_i = N_j / B_i, \quad i \in \beta \quad (2.30) \text{ Здесь}$$

N_j - постоянная контурного узла j , из которого достигим узел i ; α (β) - множество нечетных (четных) неконтурных узлов; B_i - вес пути от узла j к узлу i , равный отношению произведения проводимостей нечетных по порядку ветвей T'_i к произведению T''_i проводимостей ветвей, четных по порядку, этого пути

$$B_i = T'_i / T''_i. \quad (2.31) \text{ Заметим,}$$

что в случае пути, содержащего только одну ветвь u_{ij} , формула (2.31) принимает вид $B_i = u_{ij}$, а соотношение (2.29) переходит в соотношение (2.28).

Аналогично можно поступить при расчете постоянных контурных и неконтурных узлов других компонент ядра. Многообразие ядер порождает множество решений обсуждаемой задачи преобразования. Например, количество только тех ядер, которые являются связными подсхемами ПУС, сопоставимо с числом ее деревьев (q^{q-2}). Пользуясь случаем, обратим внимание на заблуждение состоящее в том, что независимые проводимости ПУС могут образовывать только такие структуры [24], то есть ядро ПУС не может быть образовано более чем одной компонентой. Математически законченное решение для конкретного ядра должно получаться каждый раз на

основе формул (2.25) в результате трудоемких преобразований, связанных с применением формул (2.26), (2.27), (2.29) - (2.31). Такой подход нельзя признать удовлетворительным, но фактически он отражает современный уровень решения задачи преобразования ПУС в эквивалентную звезду.

Стержневой задачей данного подраздела является формирование оптимальных выражений для нахождения параметров эквивалентной звезды по любым независимым параметрам ПУС. При этом полностью исключаются промежуточные выкладки, предусматривающие использование формул (2.25) и их последующие оптимизирующие преобразования. Формирование является топологическим, поскольку получение искомых выражений для проводимостей лучей звезды выполняется на основе исследования контуров и путей в структуре выбранного ядра. Под оптимальностью выражений в этом подразделе понимается отсутствие в них избыточности и наименьшая сложность по количеству требуемых вычислительных операций (прежде всего операций извлечения квадратного корня) среди ряда конкурирующих выражений. Объектом методологии формирования являются как одноконтурные, так и многоконтурные ядра, что снимает существующие ограничения в использовании преобразования “ПУС - звезда” при электротехнических расчетах [11, 24, 45, 168].

2.7.2. Топологические формулы для ядра-контур [101]

Первоначально получим формулы для проводимостей эквивалентной звезды в случае одноконтурного ядра без неконтурных узлов, которое представлено на рис. 2.11.

Общий случай ядра-контур

и его соответствие проводимостям эквивалентной звезды

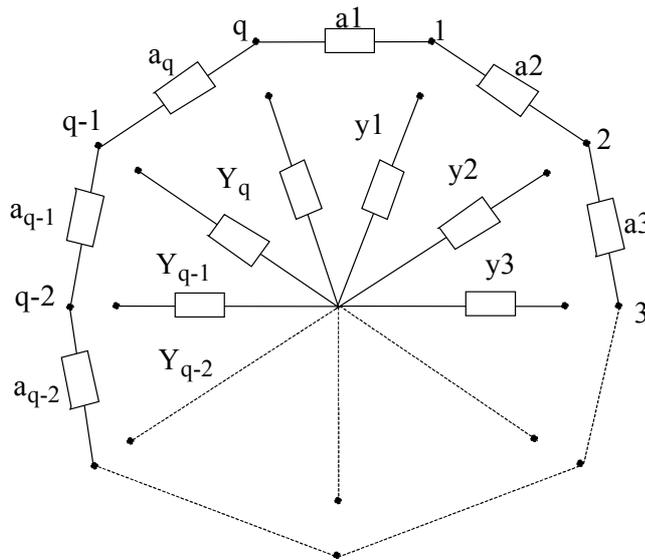


Рис. 2.11

Такое ядро будем называть q -контуром. Применяя формулу (2.26) для нахождения постоянных узлов q -контура по изложенной в пункте 2.7.1. методике, имеем

$$N_i = \sqrt{a_i a_{s_i} / x_i}, \text{ для } i = 1, 2, \dots, q; \quad (2.32) \text{ где } s_i = i$$

+ 1 для $i = 1, 2, \dots, q-1$; $s_q = 1$; x_i - проводимость ПУС, включенная между узлами с номерами $i-1$ и s_i при $i > 1$ или между узлами с номерами q и 2 при $i=1$.

Проводимость x_i является зависимой и этим объясняется избыточность формулы (2.25). Избавиться от избыточности в данном случае можно путем нахождения x_i как проводимости, входящей в четный $(q-1)$ -контур. В этот контур, кроме x_i , входят все проводимости q -контура за исключением a_i и a_{s_i} . Отсюда получаем

$$x_i = d^i / [P / (a_i a_{s_i} d^i)], \quad (2.33) \text{ где } d^i -$$

дополнение определителя i -го узла q -контура, $P = \prod_{k=1}^q a_k$.

Для получения d^i необходимо образовать новый $(q-2)$ -контур путем стягивания ветвей, инцидентных узлу i . Искомое дополнение является произведением $(q-1)/2$ сомножителей и равно определителю объединенного в

результате стягивания ветвей узла $(q-2)$ -контур. Определитель i -го узла q -контур представляет собой произведение $(q+1)/2$ сомножителей. Первые два из них являются проводимостями пары ветвей контура, инцидентных узлу i . Оставшиеся $(q-3)/2$ сомножителей соответствуют проводимостям тех ветвей контура, которые несмежны друг другу и ветвям, учитываемым в первых двух сомножителях. Зная определитель i -го узла q -контур, можно найти его дополнение по формуле

$$d^i = P / D^i . \quad (2.34)$$

При $q=3$ топологическое правило нахождения дополнения определителя узла вырождается и его значение следует принять равным проводимости ветви, превратившейся в петлю в результате стягивания смежных ветвей. Иными словами, дополнение определителя узла 3-контур равно проводимости противоположной ветви.

Введение понятий определителя узла контура и его дополнения приводит к топологическим формулам для преобразования ПУС в эквивалентную звезду

$$y_i = D / d^i , \text{ для } i=1, 2, \dots q ; \quad (2.35) \text{ где } D =$$

$\sum_{i=1}^q D^i$ - определитель q -контур. Доказательство формул (2.35) сводится к подстановке выражения (2.33) в выражение (2.32) и применению формул (2.25) с учетом тождества (2.34).

2.7.3. Пример формирования выражений для ядра в виде 9-контур

Сформируем выражения для нахождения проводимостей эквивалентной звезды в случае ПУС с 9 узлами, используя ядро, которое представляет собой 9-контур (см. рис. 2.7). Прежде всего, пользуясь рисунком ядра, записываем определители его узлов D^i для $i = 1, 2, \dots 9$. Эти определители, записанные через номера ветвей, имеют вид соответственно 12468, 23579, 34681, 45792, 56813, 67924, 78135, 89246, 91357. Используя правило ПУ и алгоритм свертки

алгебраических выражений (см. подраздел 2.2), получаем из развернутой символьной суммы оптимальное выражение для определителя 9-контура

$$D = a_1 \{ a_3 [a_6 a_8 (a_4 + a_5) + a_5 a_7 (a_8 + a_9)] + a_2 a_4 a_6 a_8 \} + a_2 a_9 \{ a_4 [a_7 (a_5 + a_6) + a_6 a_8] + a_3 a_5 a_7 \}. \quad (2.36)$$

Дополнения определителей узлов находятся через определители узлов ядра из формулы (2.34), где

$$\begin{aligned} d^1 &= a_3 a_5 a_7 a_9, \quad d^2 = a_1 a_4 a_6 a_8, \quad d^3 = a_2 a_5 a_7 a_9, \\ d^4 &= a_1 a_3 a_6 a_8, \quad d^5 = a_2 a_4 a_7 a_9, \quad d^6 = a_1 a_3 a_5 a_8, \\ d^7 &= a_2 a_4 a_6 a_9, \quad d^8 = a_1 a_3 a_5 a_7, \quad d^9 = a_2 a_4 a_6 a_8. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Подстановка выражений (2.36) и (2.37) в формулы (2.35) приводит к формулам преобразования ПУС с 9 узлами в эквивалентную 9-лучевую звезду. В качестве численного примера рассчитаем параметры звезды, если проводимости, образующие 9-контур (см. рис. 2.7), имеют следующие значения (в См): 1,12; 0,56; 0,72; 0,9; 1,1; 1,32; 1,56; 1,82; 2,24. По формулам (2.35) - (2.37) вычисляем $D = 19,3729536 \text{ См}^5$ и искомые значения проводимостей звезды (в См): 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 16. Данные выше числовые последовательности упорядочены в соответствии с номерами индексов при символах а и у.

Итак, формулы (2.35) соединяют в себе полезные свойства формул Новикова и Шена, то есть наличие общего множителя при нахождении проводимостей лучей звезды и отсутствие радикалов. В отличие от множителя N_Σ (см. формулы (2.35)), множитель D можно представить в оптимальной форме (см. формулу (2.36)). Далее следует идти по пути обобщения оптимальных выражений (2.35) для произвольного одноконтурного ядра.

2.7.4. Общий случай одноконтурного ядра [103]

Представим такое ядро в виде нечетного p -контура (множество узлов p) и q - p неконтурных ветвей. С использованием введенных выше топологических

понятий из формул (2.26) и (2.27) получается топологическая формула для постоянной контурного узла i

$$N_i = \sqrt{D^i / d^i} . \quad (2.38)$$

Учитывая формулу (2.38) в формулах (2.29) и (2.30), можно записать топологическое выражение для общего множителя при постоянных узлах в формулах (2.25)

$$N_\Sigma = \sum_{i \in \rho} \sqrt{D^i / d^i} + \sum_{i \in \alpha} B_i \sqrt{d^i / D^i} + \sum_{i \in \beta} \sqrt{D^i} / (B_i \sqrt{d^i}) \quad (2.39) \text{ где } B_i -$$

вес пути от одного из контурных узлов к узлу i .

Отсюда с учетом соотношения (2.34) нетрудно прийти к топологическим формулам, эквивалентным формулам (2.35), но без радикалов, в виде рациональной дроби

$$y_i = \Delta / \delta^i, \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad (2.40) \text{ где}$$

$$\Delta = \sum_{i \in \rho} D^i + \sum_{i \in \alpha} d^i B_i + \sum_{i \in \beta} D^i / B_i, \quad (2.41)$$

$$\delta^i = \begin{cases} d^i & \text{для } i \in \rho, \\ D^i / B_i & \text{для } i \in \alpha, \\ d^i B_i & \text{для } i \in \beta. \end{cases} \quad (2.42)$$

Чтобы не усложнять выражения номерами контурных узлов, смысл обозначений D^i и d^i в формулах (2.41) и (2.42) несколько отличается от содержания аналогичных обозначений в формулах (2.35). Здесь D^i и d^i обозначают определитель и дополнение определителя контурного узла, в котором начинается путь к узлу i . Δ и δ^i будем называть определителем ядра q -го порядка и дополнением определителя i -го узла того же ядра. Эти новые топологические понятия обобщают ранее введенные понятия контурного определителя D и дополнения его к i -му узлу на случай произвольного одноконтурного ядра.

Топологические формулы (2.40) являются минимальными среди ряда конкурирующих формул [103]. Дальнейшая оптимизация выражения числителя Δ достигается с помощью алгоритма свертки приведенного в подразделе 2.2.

Количество операций сложения при этом не изменяется, а число умножений и делений может сократиться в несколько раз.

2.7.5. Пример формирования выражений для одноконтурного ядра с неконтурными ветвями

Получим формулы для нахождения проводимостей эквивалентной звезды в случае ПУС с 9 узлами, используя ядро, которое изображено на рис. 2.8. Применяя выражения (2.40) - (2.42), можно представить искомые формулы в виде последовательности выражений

$$\begin{aligned}
 D &= a_1[a_3(a_4+a_5) + a_2a_4] + a_2a_5(a_3+a_4), \quad d^6 = a_1a_3, \quad d^9 = a_3a_5, \\
 D^7 &= a_4a_5a_2, \quad D^8 = D^7, \quad B_6 = a_7, \quad B_9 = a_6, \quad B_7 = a_7/a_8, \quad B_8 = a_7/a_9, \\
 \Delta &= D + d^6 B_6 + d^9 B_9 + D^7/B_7 + D^8/B_8, \quad d^5 = d^6, \quad d^1 = a_2a_4, \\
 d^2 &= d^9, \quad d^3 = a_1a_4, \quad d^4 = a_2a_5, \quad \delta^i = d^i \quad \text{для } i=1, 2, \dots, 5; \\
 D^6 &= D^7, \quad D^9 = a_1a_2a_4, \quad \delta^6 = D^6/B_6, \quad \delta^9 = D^9/B_9, \quad d^7 = d^6, \\
 d^8 &= d^6, \quad \delta^7 = d^7 B_7, \quad \delta^8 = d^8 B_8, \quad y_i = \Delta/\delta^i \quad \text{для } i=1, 2, \dots, 9. \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

Рассчитаем параметры звезды, если проводимости ядра имеют следующие значения (в См): 0,56; 0,72; 0,9; 1,1; 0,77; 1,28; 1,32; 1,56; 1,68. Используя выражение (2.43), получаем проводимости искомой звезды (в См): 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 16. Данные здесь числовые последовательности упорядочены в соответствии с номерами индексов при символах a и y . Заметим, что лучевая схема с такими же параметрами (см. пункт 2.7.3.) была найдена для другого ядра (см. рис. 2.7). Это значит, что выбранные параметры ядер соответствуют одной и той же ПУС.

2.7.6. Декомпозиция ядра и обобщения топологических формул

В случае ядер, имеющих более одного контура, невозможно формирование выражений, лишенных иррациональностей [103]. Это обусловлено тем, что размыкание всех контуров, кроме одного контура,

необходимого для реализации предложенной выше методологии формирования рациональных выражений, не позволяет ограничиться формулой (2.27), а требует нахождения проводимости y_{ij} , соединяющей узлы i и j различных контуров, из соотношений (2.28) и (2.38). Следовательно, в дальнейших выкладках y_{ij} будет участвовать в виде иррациональной величины. С другой стороны, из этого вытекает, что количество операций извлечения квадратного корня может быть уменьшено, по сравнению с формулами А.П.Новикова (2.25), до числа компонент ядра ζ . Далее обусуждаются формулы преобразования ПУС в звезду с минимальным количеством радикалов.

Первоначально рассмотрим специальный случай, когда ядро представляет собой множество ζ нечетных контуров. Компонентам ядра присвоим порядковые номера от 1 до ζ . Соответствие узлов компонентам будем задавать вектором W размерности q , отображающим порядковые номера узлов ядра в номера его компонент, которым принадлежат эти узлы.

Как и ранее (см. пункт 2.7.4.), для получения оптимальных формул используем соотношения (2.25) в схемной интерпретации. Постоянные узлов каждой компоненты-контура находятся с помощью выражения (2.38). Отсюда может быть получена сумма постоянных узлов, принадлежащих j -й компоненте, в виде

$$N_{\Sigma} = D_j / \sqrt{P_j}, \quad (2.44) \text{ где } D_j \text{ и}$$

P_j - контурный определитель и произведение проводимостей ветвей j -го контура. Суммируя выражения (2.44) для всех компонент, имеем

$$N_{\Sigma} = (1/\sqrt{P_{\Pi}}) \sum_{j=1}^{\zeta} D_j \Theta_j, \quad (2.45)$$

где

$$P_{\Pi} = \prod_{j=1}^{\zeta} P_j, \quad (2.46)$$

$$\Theta_j = \sqrt{P_{\Pi} / P_j}. \quad (2.47)$$

Параметр Θ_j назовем коэффициентом связи j -го контура с остальными контурами ядра.

Представляя выражение (2.45) в виде суммы постоянных узлов, можно найти постоянную i -го узла ядра по формуле

$$N_i = D_{wi} / \sqrt{P_{wi}} . \quad (2.48) \text{ Далее}$$

используем выражения (2.45) и (2.48) в формулах (2.25), приняв во внимание соотношение (2.38). Отсюда получаем топологические формулы для проводимостей лучей эквивалентной звезды

$$y_i = \Delta / \delta^i , \quad i = 1, 2, \dots, q ; \quad (2.49) \text{ где}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^q D_j \Theta_j , \quad (2.50)$$

$$\delta^i = d_{wi}^i \Theta_{wi} . \quad (2.51) \text{ Здесь } d_{wi}$$

- дополнение контурного определителя i -го узла, принадлежащего компоненте с номером w_i .

2.7.7. Пример формирования выражений

для ядра в виде трех контуров

Рассмотрим ПУС с 9 узлами, которая служила объектом в предыдущих примерах (см. пункты 2.7.3. и 2.7.5.). Сформируем выражение для нахождения проводимостей эквивалентной звезды, используя ядро, которое представляет собой три нечетных контура-треугольника (см. рис. 2.10). Компонентам ядра присвоим слева-направо номера 1, 2 и 3. Отсюда получаем вектор $W = \{1,1,1,2,2,2,3,3,3\}$. Применяя выражения (2.49) - (2.51), получаем искомые формулы в виде последовательности выражений:

$$D_1 = a_1(a_2+a_3) + a_2a_3 , \quad P_1 = a_1a_2a_3 ,$$

$$D_2 = a_4(a_5+a_6) + a_5a_6 , \quad P_2 = a_4a_5a_6 ,$$

$$D_3 = a_7(a_8+a_9) + a_8a_9 , \quad P_3 = a_7a_8a_9 ,$$

$$\Theta_1 = \sqrt{P_2 P_3} , \quad \Theta_2 = \sqrt{P_1 P_3} , \quad \Theta_3 = \sqrt{P_1 P_2} ,$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= D_1 \Theta_1 + D_2 \Theta_2 + D_3 \Theta_3, \quad d_1 = a_3, \\
d_1^2 &= a_2, \quad d_1^3 = a_1, \quad d_2^4 = a_6, \quad d_2^5 = a_5, \\
d_2^6 &= a_4, \quad d_3^7 = a_9, \quad d_3^8 = a_8, \quad d_3^9 = a_7, \\
\delta^i &= d_{wi}^i \Theta_{wi} \text{ для } i = 1, 2, \dots, 9; \quad y_i = \Delta / \delta^i \text{ для } i = 1, 2, \dots, 9.
\end{aligned} \quad (2.52)$$

Вычислим параметры эквивалентной звезды, если параметры ядра $a_i = 1, 2, \dots, 9$ имеют соответственно следующие значения (в См): 0,56; 0,63; 0,72; 1,1; 1,2; 1,32; 1,82; 2,08; 2,24. Искомые значения проводимостей звезды, рассчитанные с помощью последовательности выражений (2.52), совпадают с полученными выше на основе одноконтурных ядер. Это означает, что во всех трех примерах была рассмотрена одна и та же ПУС.

2.7.8. Общий случай многоконтурного ядра

Сумму постоянных узлов для ядра общего вида можно рассчитать по формуле

$$N_{\Sigma} = \sum_{j=1}^j N_{\Sigma}^j, \quad (2.53)$$

где N_{Σ}^j - сумма постоянных узлов j -й компоненты, определяемая по формуле (2.39).

Если в качестве общего знаменателя j -го слагаемого формулы (2.53) использовать произведение проводимостей P_j контурных ветвей j -й компоненты, то знаменателем N_{Σ} будет P_{Π} , рассчитываемое по формуле (2.46). Далее поступаем аналогично выводу формул (2.40) и получаем формулы преобразования ПУС в эквивалентную звезду вида (2.49), в которых

$$\Delta = \sum_{j=1}^{\zeta} \Delta_j \Theta_j, \quad (2.54)$$

i

$$\delta^i = \delta_{w_i} \Theta_{w_i} . \quad (2.55) \text{ Здесь } \Delta_j \text{ и}$$

$\delta_{w_i}^i$ - определитель и дополнение определителя i -го узла соответственно j -й и w_i -й компонент, для нахождения которых применяются формулы (2.41) и (2.42).

2.7.9. Пример формирования выражений для двухконтурного ядра с неконтурными ветвями

Выбранное ядро ПУС с 9 узлами изображено на рис. 2.9.левой (правой) компоненте ядра присвоим первый (второй) номера. Отсюда $W = \{1,1,1,1,2,2,2,2,2\}$. Выражения (2.49), (2.54) и (2.55) позволяют представить искомые формулы в виде последовательности выражений:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1(a_2+a_3+a_4) + a_2a_3, \quad \Delta_2 = a_5[a_6+a_7(1+a_9/a_8)] + a_6(a_7+a_8), \\ \Theta_1 &= \sqrt{a_5a_6a_7}, \quad \Theta_2 = \sqrt{a_1a_2a_3}, \quad \Delta = \Delta_1 \Theta_1 + \Delta_2 \Theta_2, \\ \delta_1^1 &= a_3, \quad \delta_1^2 = a_2, \quad \delta_1^3 = a_1, \quad \delta_1^4 = a_2a_3/a_4, \\ \delta_2^5 &= a_7, \quad \delta_2^6 = a_6, \quad \delta_2^7 = a_5, \quad \delta_2^8 = a_5a_7/a_8, \\ \delta_2^9 &= a_6a_8/a_9; \quad \delta^i = \delta_{w_i}^i \Theta_i \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, 9; \\ y_i &= \Delta / \delta^i \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, 9. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Для численного расчета проводимостей эквивалентной звезды используем ПУС, которая рассматривалась в предыдущих примерах (см. пункты 2.7.3., 2.7.5. и 2.7.7.). Параметры ядра a_i для $i = 1, 2, \dots, 9$ имеют соответственно следующие значения (в См): 0,56; 0,63; 0,72; 0,9; 1,32; 1,43; 1,56; 1,68; 2,24. Используя последовательность выражений (2.56), получаем параметры 9-лучевой звезды, которые, как и следовало ожидать, совпадают с ранее найденными значениями.

2.7.10. Правила формирования оптимальных выражений для преобразования ПУС в звезду

Разработанный выше схемный подход обеспечил получение полного класса решений задачи преобразования ПУС в эквивалентную звезду. Выражения, формируемые по одноконтурным ядрам, лишены иррациональностей и являются наиболее пригодными для вычислений, особенно в комплексной области. Выражения, формируемые на основе многоконтурных ядер, содержат минимальное количество операций извлечения квадратного корня, но, в отличие от традиционных формул с радикалами (2.25), требуют большего числа мультипликативных операций [103].

Следующие ниже правила формирования оптимальных выражений отражают основные свойства предложенного подхода.

Правило инвариантности к ядру. Все формулы, независимо от выбранного ядра представляются в виде дроби (2.49), числителем которой является определитель ядра, а знаменателем - дополнение определителя рассматриваемого узла, соответствующего лучу звезды. При этом наблюдается удивительное сходство формируемых выражений с ССФ (см. выражение (1.1)).

Правило суперпозиции вклада узлов в определитель ядра. Определитель ядра получается как сумма определителей контурных и неконтурных узлов каждой компоненты ядра согласно формуле (2.41).

Правило дуальности топологических объектов ядра Дуальными являются прежде всего такие пары топологических объектов как множества ветвей, соответствующих определителю контурного узла и его дополнению; множества нечетных и четных ветвей в пути от контура к рассматриваемому узлу, нечетный и четный неконтурные узлы. Из этих простейших соответствий вытекают более сложные дуальные соответствия между определителем неконтурного узла ядра и его дополнением, между определителями нечетного

и четного узлов, а также их дополнениями. Основные дуальные соотношения между параметрами формул (2.31), (2.34), (2.41) и (2.42) имеют вид:

$$P \Leftrightarrow 1/P, \quad d^i \Leftrightarrow D^i, \quad T' \Leftrightarrow T'', \quad B_i \Leftrightarrow 1/B_i, \quad \delta^i \Leftrightarrow \Delta^i.$$

В силу дуальности топологических объектов ядра можно заключить, что принцип дуальности в теории электрических цепей не сводится к ранее установленным взаимным соответствиям [20], а имеет более широкую область применения.

Правило четности-нечетности уровней неконтурных узлов. Компоненты ядра ПУС, подобно Солнечной системе, имеют планетарную структуру. Центром или нулевым уровнем этой структуры является контур. Неконтурные узлы занимают первый, второй и т.д. уровни в соответствии с их очередностью в путях, исходящих из контурных узлов. Правило четности-нечетности ставит определители узлов и их дополнения в зависимость от четности уровня, на котором размещается узел (см. формулы (2.41) и (2.42)).

Правило декомпозиции многоконтурного ядра. Это правило предусматривает: 1) анализ компонент ядра на основе формул (2.41) и (2.42); 2) расчет коэффициентов связи компонент по формуле (2.47); 3) объединение результатов анализа компонент в соответствии с формулами (2.54) и (2.55); 4) применение формул (2.49) для нахождения искомым проводимостей звезды.

2.7.11. Формирование ССФ для ПУС

на основе параметров эквивалентной звезды

Для нахождения ССФ входного сопротивления между узлами i и l рассматриваемой ПУС достаточно получить проводимости i -го и l -го лучей эквивалентной звезды, используя формулу (2.49): $y_i = \Delta / \delta^i$, $y_l = \Delta / \delta^l$. Отсюда, используя соответствующее схемное уравнение из табл. 2.1, получаем

$$Z_{il} = (y_i + y_l) / (y_i y_l) = (\delta^i + \delta^l) / \Delta. \quad (2.57)$$

Нахождение передаточной ССФ по напряжению для ПУС сводится к рассмотрению простейшего делителя напряжения. Например, включив источник напряжения между узлами i и l , снимая отклик между узлами j и l (см. табл. 2.1), получаем

$$K_{ij} = y_i / (y_i + y_l) = \delta^l / (\delta^i + \delta^l). \quad (2.58)$$

При нахождении передаточного сопротивления поступаем аналогично

$$Z_{il,jl} = 1 / y_l = \delta^l / \Delta. \quad (2.59)$$

Оценим сложность формул (2.57) - (2.59) при условии формирования выражений ССФ на основе ядра в виде q -контура. Определитель такого ядра ПУС образован q слагаемыми, а каждое слагаемое содержит $(q+1)/2$ сомножителей. В дополнении определителя узла q -контура имеется $(q-1)/2$ сомножителей. Отсюда следует, что количества операций умножения и сложения в формуле (2.58) равны соответственно $(3q - 9)/2$ и 1 . Формула (2.57) требует $[q(q+1) - 6]/2$ умножений и q сложений. Аналогичные показатели для формулы (2.59) составляют $(q^2 - 3) / 2$ и $q - 1$.

Как видно, вычислительная сложность оптимальных выражений ССФ для ПУС в худшем случае связана квадратичной зависимостью с количеством узлов анализируемой схемы (без учета свертки определителя ядра). Таким образом, выполнение условий равновесия между параметрами ветвей ПС позволяет, не прибегая к аппроксимационным процедурам [140, 149], предельно упростить формирование ее ССФ.

2.8. Выводы

В данном выше разделе изложены основы универсальной методологии формирования оптимальных выражений ССФ для пассивных электрических цепей без взаимных индуктивностей. Наиболее важные результаты формулируются следующим образом.

Обоснованы преимущества прямого схемного подхода к формированию ССФ, минуя получение развернутого выражения ССФ и последующую его свертку.

Введено понятие НУИ, что позволило: 1) свести нахождение ССФ к разложению определителей двух схем - схемы числителя и схемы знаменателя; 2) избежать при разложении схемных определителей трудоемкого перечисления путей и контуров передачи. Представление ССФ в виде схемных уравнений (см. табл. 2.1) наглядно и не требует использования какого-либо математического аппарата, что выгодно с точки зрения методики преподавания соответствующего раздела теории электрических цепей в средней школе.

Установлены правила формирования оптимальных по вычислительной сложности выражений ССФ (правила ПУ, кратности и половинного деления). Предложено правило выбора ветвей с наибольшими ПУ, которое не требует трудоемкого вычисления количества деревьев в производных схемах и подсхемах, а сводится к простейшей оценке степени узлов, кратности мультиветвей или макроветвей, числа ветвей в выбираемых подсхемах.

Доказано, что способ иерархического наращивания, традиционно используемый при символьном анализе электрических цепей, непригоден для формирования ССФ в виде единого выражения. Следование правилу половинного деления опровергает утверждения зарубежных специалистов о невозможности формирования ССФ для сложных электрических цепей без применения последовательностей выражений.

Рассмотрены особенности формирования оптимальных выражений для определителей z - и yz -схем. При задании емкостей емкостными проводимостями, а индуктивностей - индуктивными сопротивлениями обеспечивается получение полиномиальных ССФ (без операций деления в числителе и знаменателе). Показано, что оптимальный выбор параметров при задании элементов приводит к выражениям ССФ меньшей вычислительной сложности, а также к ССФ, числители и знаменатели которых являются безразмерными выражениями.

Сформированы оптимальные выражения определителей для лестничных, цепных и полных схем. Получены точные рекуррентные соотношения для

числа операций умножения и сложения в оптимальных выражениях, которые можно рассматривать как сертификат качества разработанной методологии, поскольку существующие системы аналитических вычислений и компьютерной алгебры не приспособлены для формирования оптимальных выражений.

Показано, что формирование ССФ для ПС является сложной вычислительной задачей и исследован класс ПС - полные уравновешенные схемы, параметры ветвей которых удовлетворяют условиям равновесия Уитстона-Новикова. Разработана специальная методология формирования оптимальных выражений ССФ для ПУС.

3. ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ССФ ДЛЯ АКТИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Задача формирования ССФ для схемы с УИ, как и пассивной схемы, сводится к разложению двух схем, полученных в результате простейших преобразований исходной схемы (см. табл. 2.1). Схема, используемая при нахождении числителя, содержит дополнительный НУИ. В данном разделе обсуждаются топологические свойства схем с УИ и оптимальные методы разложения схемных определителей, учитывающие эти свойства для сокращения объема выкладок, а также минимизации вычислительных операций в формируемых выражениях ССФ.

3.1. Эквивалентные упрощения схем с УИ и НУИ при разложении определителей

В схеме с УИ, кроме преобразований y -ветвей в мультиветви и z -ветвей в макуроветви, возможны обобщенные преобразования для ИТУН и ИНУТ. Параллельно (последовательно) соединенные ИТУН (ИНУТ) заменяются

одним УИ, параметр которого равен сумме параметров образующих его УИ с учетом знака. Наряду с этими простейшими преобразованиями в первую очередь целесообразно выполнить проверку схемы на вырожденность, что также позволяет упростить разложение схемного определителя.

Определитель вырожденной схемы тождественно равен нулю. Пассивная схема вырождается в случае, когда ее образуют две и более подсхемы, то есть схема является несвязной [141]. Активная схема считается вырожденной, когда между ее подсхемами отсутствуют не только гальванические, но и управляющие связи. К вырождению активной схемы приводит также наличие контуров и сечений, которые содержат генераторы или приемники НУИ и УИ [108]. Эти специфические признаки вырождения активной схемы компактно отражены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Следствия расположения элементов схемы в контурах и сечениях

Элемент схемы	Инцидентность элемента			
	контур		сечению	
	из ГН и ГНУИ	из ПТ и ПНУИ	из ГТ и ГНУИ	из ПН и ПНУИ
Проводимость (у-ветвь)	Удаление		Стягивание-выделение	
Сопротивление (z-ветвь)	Удаление-выделение		Стягивание	
Генератор напряжения (ГН)	Вырождение	НУИ	Удаление	
Приемник тока (ПТ)	НУИ	Вырождение		Удаление
Генератор тока (ГТ)	Удаление		Вырождение	НУИ
Приемник напряжения (ПН)		Удаление	НУИ	Вырождение
Генератор НУИ (ГНУИ)	Вырождение		Вырождение	
Приемник НУИ (ПНУИ)		Вырождение		Вырождение

Покажем, что признаки вырожденности непосредственно следуют из законов электрического равновесия [23, 27]. Пусть схема образована двумя и более подсхемами, не имеющими управляющих связей друг с другом и совместных путей тока. Тогда система уравнений Кирхгофа, составленных для этой схемы, распадается на несколько подсистем, каждая из которых должна решаться отдельно, то есть задачу.

формирования ССФ следует решать для каждой подсхемы в отдельности. Если рассматриваемая схема является производной от исходной схемы в результате выделения ее элементов, то определитель этой схемы, как и определитель соответствующей матрицы, равен нулю.

Пусть схема содержит сечение (J-сечение), образованное исключительно генераторами тока. Тогда уравнение Кирхгофа для этого сечения оказывается тождеством и система уравнений электрического равновесия является недоопределенной, поскольку лишается одного уравнения. Подобно этому сечение, состоящее из приемников напряжения (U-сечение) не позволяет записать соответствующее уравнение, поскольку ток через приемник напряжения равен нулю и подсхемы по ту и по другую стороны сечения не связаны одна с другой. В дуальных случаях вырождения схема содержит хотя бы один контур, образованный только генераторами напряжения (E-контур) или только приемниками тока (I-контур). Из уравнения Кирхгофа для этого контура вытекает, что напряжения генераторов (в первом случае) или короткозамкнутых приемников тока (во втором случае) зависимы, а это невозможно по условиям задачи или по определению короткозамкнутой ветви.

НУИ по существу является ориентированным нуллором [157], то есть напряжение и ток генератора или приемника НУИ соответственно могут принимать любые значения или быть равными нулю [56]. Следовательно, генератор НУИ в контуре (сечении) ведет себя подобно генератору напряжения

(тока), а приемник НУИ в контуре (сечении) подобен приемнику тока (напряжения). Это свойство НУИ отражено в заголовке табл. 3.1.

Размещение пассивных элементов в контуре или сечении не может привести к вырождению схемы, поскольку y -ветвь представляет собой параллельное соединение генератора тока и приемника напряжения, а z -ветвь - последовательное соединение генератора напряжения и приемника тока. Однако стягивание пассивных ветвей в E - и I -контуре или удаление пассивных ветвей в J - и U -сечении приводит к образованию вырожденных схем (см. табл. 3.1). С другой стороны, y -ветвь, находящаяся в E - или I -контуре, и z -ветвь, принадлежащая J - или U -сечению, могут быть исключены из схемы соответственно путем удаления и стягивания (см. табл. 3.1). Это вытекает из формул (1.2) и (1.3) для выделения параметров пассивных ветвей. В простейших случаях из схемы удаляются y -ветви (в схеме стягиваются z -ветви), параллельные генераторам напряжения или приемникам тока (соединенные последовательно с генераторами тока или приемниками напряжения).

Общие случаи вырождения активной схемы и ее упрощения, инвариантные к схемному определителю, подчеркнуты в табл. 3.1. Соответствующие правила подчиняются принципу дуальности, тем самым подтверждая многообразие его применений [20]. Эти правила не требуют формального запоминания, поскольку они в полной мере согласуются с физическими представлениями о пассивных элементах и источниках напряжения и тока. Важно, что упрощения и проверка вырожденности схемы выполняются путем выявления соответствующих особенностей ее структуры и состава элементов, что невозможно или затруднено при аналогичных проверках матрицы или графа этой схемы.

3.2. Метод неудаляемого управляемого источника

Эквивалентные упрощения играют важную, но вспомогательную, роль при разложении схемных определителей. Центральное место в этом процессе занимает аппарат выделения параметров элементов схемы.

3.2.1. Выделение пассивных элементов

и преобразование УИ в квазипассивные двухполюсники

Схемный подход не требует выбора одного из узлов схемы в качестве базисного узла [129, 154], как в случае матричного [116, 162] или графового [94] подходов к формированию ССФ. Следовательно, разложение определителя схемы, полученной в результате эквивалентных упрощений, можно начать с выделения параметров пассивных элементов по формулам (1.2) и (1.3). Для экономии выкладок и получения оптимального выражения в первую очередь выделяются u -ветви (z -ветви) удаление (стягивание) которых приводит к образованию вырожденных схем (см. табл. 3.1). u -ветви, находящиеся в J - или U -сечениях, выделяются стягиванием, а z -ветви, принадлежащие E - или I -контурам, выделяются через удаление.

Общий алгоритм формирования оптимального выражения схемного определителя (см. подразделы 2.2. и 2.3.) предусматривает нахождение ПУ каждой ветви схемы как количества деревьев в производной схеме, которая образована в результате стягивания этой ветви. Однако операция стягивания не обобщена на случай УИ. Если все же предположить, что такая производная активная схема существует, то вычислить количество слагаемых в выражении ее определителя матричным способом будет нельзя, поскольку параметры УИ могут участвовать в этом выражении с отрицательными знаками. Это замечание относится и к схемам с НУИ, которые образуются при нахождении числителей передаточных ССФ (см. табл. 2.1).

Итак, в случае схем с УИ формирование оптимальных по вычислительной сложности выражений ССФ связано с существенно большими затратами,

обусловленными необходимостью анализа выражений схемных определителей и повторной свертки. В связи с этим под оптимальным выражением определителя активной схемы будем понимать не минимальное или математически оптимальное выражение, а выражение, близкое к нему по сложности, которое может быть сформировано за приемлемое процессорное время. Учитывая это, при сравнительной оценке ПУ пассивных ветвей схемы с УИ будем использовать правило минимума, предложенное в подразделе 2.3. для пассивных схем, после данного ниже обобщения.

В активной схеме рассматривается пассивная подсхема, в которой выбираются ветви с наибольшими ПУ согласно правилу минимума. При наличии более одной ветви - претендента на выделение необходимо учитывать расположение в схеме генераторов и приемников УИ. Предполагается, что наибольшим ПУ обладает та из выбранных мультиветвей, одному из узлов которой соответствует наибольшая по абсолютной величине разность между числом генераторов и числом приемников. Иными словами, принимается, что удаление именно этой ветви не позволит параметрам большего числа УИ и НУИ войти в выражение определителя второй производной схемы. Компьютерные эксперименты подтвердили, что приближенная оценка ПУ обеспечивает получение оптимальных выражений ССФ, которые по сложности уступают лишь несколько процентов минимальным выражениям. Следует иметь в виду, что вычисление самих значений ПУ для схем с УИ не только связано с существенными дополнительными затратами, как в случае пассивных схем, но и не обеспечено методически. Разработка соответствующей процедуры может рассматриваться в качестве одной из задач для дальнейших исследований.

Выделение пассивных элементов может привести к удалению УИ в производных схемах. Удаление ИТУН происходит при объединении узлов его генератора или приемника. Для удаления ИТУН достаточно объединить узлы его приемника или оставить ветвь его генератора висячей, то есть не

подключенной к схеме одним из узлов. Правило удаления ИТУТ дуально правилу удаления ИНУН, а для удаления ИНУТ требуется сделать одну из его ветвей висячей. Приведенные выше правила удаления УИ согласуются с табл. 3.1.

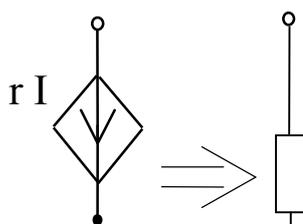
Другим следствием стягивания или удаления пассивных ветвей является образование ИТУН, у которых генератор и приемник параллельны, или ИНУТ, у которых генератор и приемник соединены последовательно. Такие УИ замещаются квазипассивными двухполюсниками с параметрами проводимости или сопротивления согласно рис. 3.1 и 3.2. Замечательно, что квазипассивные двухполюсники имеют статус пассивных y - или z -ветвей, поэтому их можно объединять с обычными y - или z -ветвями и выделять с учетом знака по формулам (1.2) и (1.3) [108]. Это является важной особенностью и достоинством излагаемого метода, поскольку квазипассивное преобразование, в отличие от обратного преобразования, использованного Коутсом [133] и Лином [162], упрощает схему.

Квазипассивное преобразование ИТУН



Рис. 3.1

Квазипассивное преобразование ИНУТ



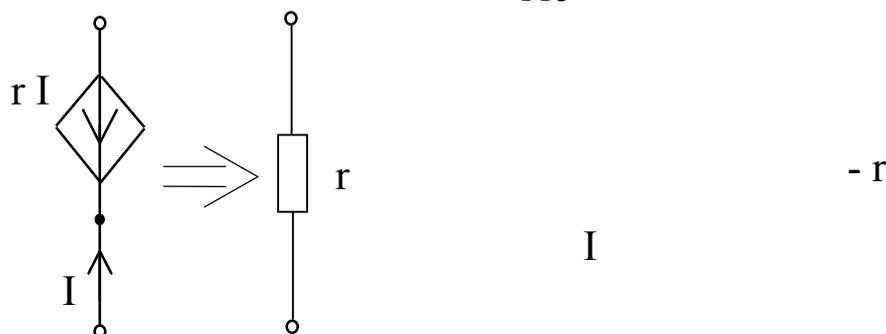


Рис. 3.2

Рекурсивного применения формул (1.2) и (1.3) в сочетании с удалением УИ и квазипассивными преобразованиями, как правило, недостаточно для полного разложения определителя активной схемы. В общем случае результатом выделения пассивных элементов являются схемы, которые содержат исключительно УИ и НУИ. Кроме того, для получения функций чувствительности к параметрам активных элементов желательно первоочередное выделение параметров УИ [48, 94]. Таким образом, необходимы формулы выделения параметров УИ, которые обобщают формулы (1.2) и (1.3).

3.2.2. Выделение параметров УИ

и понятие элементарной активной схемы

Определители схем с УИ и НУИ размещаются на последних уровнях вложенности формулы определителя исходной схемы. Важно, что производные схемы несопоставимы с ней по сложности. В этом состоит одно из основных преимуществ предлагаемого метода по сравнению с методом Хуана, который предусматривает весьма трудоемкое первоочередное выделение параметров УИ через нахождение ЦКП, используя непосредственно исходную схему.

Обратимся вновь к формулам (1.2) и (1.3), которые реализуют разложение схемного определителя в соответствии со структурой двоичного дерева. Это значит, что анализ исходной схемы на первом ярусе дерева формулы сводится

к анализу двух производных схем. Аналогично поступают с производными схемами на втором, третьем, n-ом ярусе этого дерева, где n - число выделяемых параметров. Структуру формулы схемного определителя можно наглядно представить в виде структуры диссертации, у которой два раздела, каждый раздел состоит из двух подразделов, подраздел включает два пункта, а пункт - два подпункта и т.д. В этой связи удобно нумеровать производные схемы также как структурные части диссертации, то есть первая цифра указывает номер раздела, вторая - номер подраздела, третья - номер пункта, четвертая - номер подпункта и т.д.

Например, трехярусное дерево формулы схемного определителя можно представить в виде следующего вложенного выражения $\Delta = 1.[1.1.(1.1.1. + 1.1.2.) + 1.2.(1.2.1. + 1.2.2.)] + 2.[2.1.(2.1.1. + 2.1.2.) + 2.2.(2.2.1. + 2.2.2.)]$. Здесь 1. и 2. обозначения производных схем, полученных в результате выделения одного из пассивных элементов исходной схемы. Производные схемы 1.1. и 1.2. или 2.1. и 2.2. порождены путем выделения пассивных элементов в схеме 1. или 2. и т.д.

Начиная с некоторого яруса образуются производные схемы, которые не содержат пассивных элементов. Это не является препятствием для завершения процесса формирования выражения схемного определителя. Действительно, в соответствии с формулой (1.9) множество слагаемых определителя схемы с УИ можно разбить на два подмножества относительно параметра χ некоторого УИ. Слагаемые первого из них содержат параметр χ в качестве сомножителя, а слагаемые второго подмножества не содержат этого параметра. Как указывалось в подразделе 1.5., трудности обобщения формулы (1.9) для УИ, отличных от ИТУН, объясняются ограниченностью матричного представления схемы и понятия САД. Отказавшись от использования матрицы схемы, следует подумать о том, чем можно заменить понятие САД. Предлагаемое здесь самое простое решение состоит в том, чтобы не выполнять какие-либо преобразования исходной схемы для получения первой производной схемы в

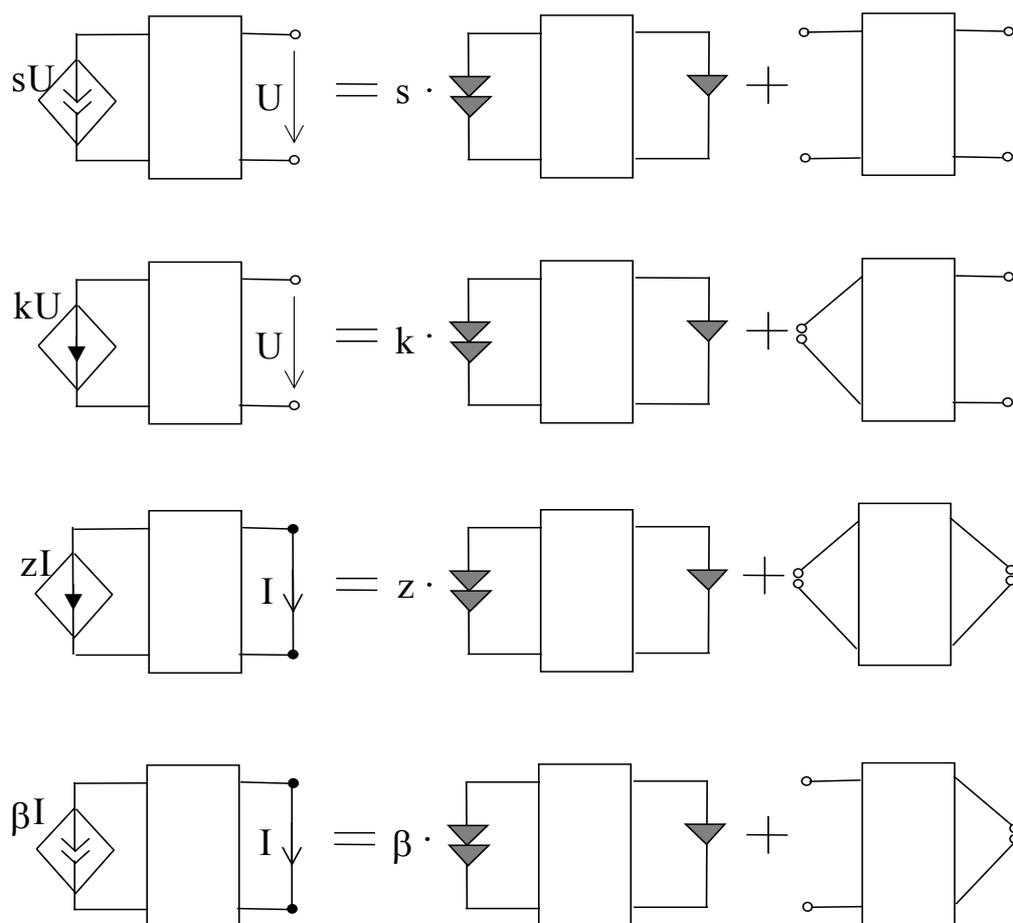
формуле (1.9), а придать выделяемому УИ статус НУИ и оставить его в схеме [107].

Запрет на удаление УИ позволяет, подобно нахождению числителя передаточной ССФ (см. табл. 2.1), найти первое слагаемое в формуле (1.9) независимо от того к какому типу он относится и каков состав элементов исходной схемы, что недоступно для матричного метода выделения параметров [46, 116, 162]. Специфика того или иного УИ будет отражена во втором слагаемом формулы (1.9) [46]. Таким образом, общую формулу для выделения параметра χ произвольного УИ можно записать в виде

$$\Delta = \chi \Delta_{\chi} + \Delta^{\chi}, \quad (3.1)$$

где Δ_{χ} - определитель первой производной схемы, полученной из исходной схемы путем придания выделяемому УИ статуса НУИ с параметром, равным единице; Δ^{χ} - определитель второй производной схемы, которая образована в результате удаления выделяемого УИ из исходной схемы. Схемные уравнения, иллюстрирующие формулу (3.1) для различных типов УИ, приводятся на рис. 3.3.

Выделение параметров УИ



$$\Delta = \chi \Delta_{\chi} + \Delta^{\chi},$$

где $\chi \in \{s, k, z, \beta\}$.

Рис. 3.3

Придание выделяемому УИ статуса нули запрещает повторное применение формулы (3.1) к одному и тому же УИ. С другой стороны, нули, подобно ориентированным нуллорам [157], не различаются по своим физическим свойствам и не имеет значения, УИ какого типа был порожден тот или иной нули. Главным отличием формулы (3.1) от формулы (1.9) является то, что ориентация УИ сохраняется в ориентации нули и выделяемый параметр всегда положителен. При необходимости параметру нули вместо значения, равного единице, можно присвоить значение χ . Тогда определитель исходной схемы представляется в виде суммы определителей первой и второй

производных схем. Это отличает НУИ от нуллора [56] и ориентированного нуллора [157], которые сами по себе не имеют параметров, а моделируют идеальный операционный усилитель (ОУ) с коэффициентом усиления, равным бесконечности.

Использование понятия НУИ, как и понятия нуллора, упрощает получение ССФ для схем с идеальными ОУ, не требуя предварительного формирования общего символьного выражения и трудоемкого выполнения предельного перехода. Параметры ОУ заведомо являются сомножителями и при числителе, и при знаменателе ССФ. Следовательно, поместив в схему НУИ вместо ОУ и придав параметрам НУИ значения, равные единице, можно избежать необходимости их последующего сокращения.

Из формулы (3.1) и рис. 3.3 непосредственно вытекают важные специальные случаи упрощения схемы путем преобразования УИ в НУИ, которые отражены в табл. 3.1. Как видно, статус НУИ получают: 1) ИНУН или ИНУТ (ИТУТ или ИНУТ), генератор (приемник) которого принадлежит I-контуре (E-контуре); 2) ИТУТ или ИТУН (ИНУН или ИТУН), генератор (приемник) которого принадлежит U-сечению (J-сечению).

Выделением параметров пассивных элементов и УИ можно свести анализ произвольной активной схемы к анализу ряда элементарных активных схем (ЭАС). ЭАС называется схема, содержащая исключительно НУИ, параметры которых равны единице. Перед нахождением определителя ЭАС необходимо исследовать ее на вырожденность согласно табл. 3.1. Генераторы НУИ обязательно образуют дерево невырожденной ЭАС, а приемники НУИ входят в дополнение этого дерева и наоборот [156]. Отсюда вытекает, что топологические свойства невырожденной ЭАС совпадают со свойствами полного дерева схемы тока-напряжения (см. подраздел 1.4.). Ни один из ИТУН, формирующих полное дерево, не может быть удален, поскольку это приведет к вырождению схемы. Следовательно, полное дерево Коутса, как и ЭАС, состоит из НУИ, но их параметры равны не единицам, а значениям проводимостей u -ветвей и передаточных проводимостей ИТУН, генераторы и

приемники которых вошли в это дерево. Таким образом, определитель ЭАС может быть найден с помощью процедуры Коутса для нахождения знака полного дерева.

Обращение к процедуре нахождения знака определителя невырожденной ЭАС является уязвимым местом разработанного метода. В следующем подразделе обсуждаются возможности, позволяющие избежать использования трудоемкой процедуры Коутса при формировании выражений ССФ.

3.2.3. Разложение определителей ЭАС через выделение НУИ

Обратим внимание на возможность рекурсивного использования формулы (1.9) для нахождения определителя полного дерева схемы тока-напряжения. Второе слагаемое этой формулы будет равно нулю, поскольку, как установлено выше, ИТУН, являющиеся элементами исходной схемы Коутса, в полном дереве этой схемы являются НУИ. Следовательно, определитель ЭАС также можно найти по формуле (1.9), приняв $s=1$ и $\Delta^s = 0$, то есть

$$\Delta = (-1)^{a+c} \Delta_{(a+b)(c+d)} . \quad (3.2)$$

Напомним, что номера узлов a , b , c , d являются узлами подсоединения выделяемого НУИ с номером n вида (ab,cd) , у которого генератор (приемник) направлен от узла a к узлу b (от узла c к узлу d).

Теперь необходимо перейти от алгебраических операций с матрицей к топологическим операциям над схемой. Предлагаемая топологическая формула для выделения параметра НУИ с номером n имеет вид

$$\Delta = \pm \Delta_n , \quad (3.3) \text{ где } \Delta_n -$$

определитель схемы, полученной из первоначальной ЭАС в результате следующих преобразований: 1) стягивание генератора (приемника) выделяемого НУИ таким образом, чтобы генераторы (приемники), которые инцидентны одному из узлов - опорному узлу этого генератора (приемника), переключились на другой его узел; 2) объединение опорных узлов выделяемого

НУИ. Положительный (отрицательный) знак перед Δ_n выбирается в случае противоположной (одинаковой) ориентации генератора и приемника НУИ в первоначальной ЭАС по отношению к его опорным узлам.

Преобразования 1 и 2, выполняемые относительно выделяемого НУИ, называются его стягиванием. Опорные узлы, относительно которых выполняется стягивание НУИ, выбираются произвольно. При наличии у генератора и приемника общего узла целесообразно использовать его в качестве опорного узла и генератора, и приемника. Для этого случая преобразование 2 в операции стягивания опускается, а данное выше правило выбора знака инвертируется, что делает его более наглядным, то есть знак перед Δ_n считается положительным (отрицательным) при одинаковой (противоположной) ориентации генератора и приемника соответствующего НУИ по отношению к общему опорному узлу в первоначальной схеме.

Доказательство формулы (3.3)

Правые части формул (3.2) и (3.3) совпадают с точностью до знака, то есть $\Delta_{(a+b)(c+d)} = \Delta_n$. Действительно, если принять узлы a и c в качестве опорных узлов НУИ, то преобразование 1 в операции стягивания НУИ на схеме оказывается изоморфным добавлению строки a и столбца c матрицы схемы, соответствующих опорным узлам, к строке b и столбцу d этой матрицы, соответствующих другим узлам b и d генератора и приемника выделяемого НУИ. Удаление строки a и столбца c в матрице изоморфно удалению общего опорного узла при $a=c$ или объединению опорных узлов a и c согласно преобразованию 2. В последнем случае один из опорных узлов считается базисным узлом матрицы схемы.

Принципиальное отличие формулы (3.2) от формулы (3.3) состоит в способе определения знака перед выделяемым параметром. Доказательство правила знаков в формуле (3.3) выполним на основе процедуры Коутса для нахождения знака полного дерева (см. подраздел 1.4.). Пусть генератор p выделяемого НУИ с номером n ориентирован в некоторый узел b . Если

приемник n этого НУИ также ориентирован в узел b ($b=d$), то знак в формуле (3.3) должен быть выбран положительным (узлы b и d - опорные). Для доказательства используем в качестве базисного узла ЭАС такой узел, при котором рассматриваемые генератор и приемник стали бы главными генератором и приемником относительно узла b . Такой выбор всегда возможен и удобен тем, что столбец b в подстановке полного дерева (или, что в данном случае то же самое, подстановке ЭАС) образуется одинаковыми элементами n , а генератор n и приемник n имеют одинаковые знаки. Отсюда вытекает, что на знак полного дерева, совпадающий со знаком определителя ЭАС, выделяемый НУИ не повлияет и это отражается в формуле (3.3) положительным знаком перед Δ_n .

Очевидно, при изменении ориентации как генератора n , так и приемника n , знак перед Δ_n останется положительным. Если указанные генератор и приемник имеют противоположную ориентацию по отношению к опорному узлу $b=d$, то знак перед Δ_n будет отрицательным, поскольку генератор и приемник выделяемого НУИ с номером n будут иметь противоположные знаки в подстановке ЭАС.

В случае, когда генератор n и приемник n не имеют общего опорного узла ($b < d$ или $b > d$), можно свести задачу определения знака перед Δ_n к рассмотренным выше вариантам. Для этого потребуется единственная перестановка в упорядоченной последовательности приемников, а именно, элемент под номером b поменяется местами с элементом c или d , в котором содержится приемник n . Эта перестановка изменит знак перед Δ_n на противоположный, что доказывает правило знаков в формуле (3.3).

Итак, рекурсивное применение простейшей формулы (3.3) избавляет от необходимости назначать базисный узел в ЭАС, образовывать подстановку из главных генераторов и приемников, определять их знаки и число инверсий в подстановке. Ниже обсуждаются некоторые специальные случаи использования формулы (3.3), для которых операция стягивания НУИ предельно упрощается.

Прежде всего еще раз отметим, что в качестве опорного узла целесообразно выбирать общий узел генератора и приемника выделяемого НУИ. Если такой узел отсутствует у всех НУИ в ЭАС, то можно воспользоваться общим узлом у генератора n и приемника k различных НУИ. Это требует взаимной замены номеров k и n у приемника k и приемника n рассматриваемой ЭАС соответственно на n и k , а также умножения полученного значения определителя ЭАС на -1 . В первую очередь следует выделять тот НУИ, к общему опорному узлу которого не подсоединены другие генераторы и приемники. При этом получается производная ЭАС, структура которой совпадает со структурой первоначальной ЭАС, отсутствуют только генератор и приемник выделенного НУИ. Немногим сложнее получение производной ЭАС, соответствующей Δ , в случае, когда генератор n и приемник n параллельны. Это имеет место, например, в простейших ЭАС, изображенных на рис. 2.1. Применение формулы (3.3) к этим схемам влечет образование схемы, не содержащей элементов и имеющей один узел. Определитель такой схемы считается равным единице.

Более общие специальные случаи расположения НУИ, учет которых позволяет уменьшить объем выкладок при разложении определителей ЭАС, представлены в виде схемных уравнений на рис. 3.4 и 3.5 [108]. Как видно, правило знаков, используемое в формуле (3.3), по отношению к разноименным генератору и приемнику инвертируется, что вытекает из доказательства этой формулы. Опорными узлами на рис. 3.4 и 3.5 являются пары узлов, принадлежащие одновременно или левой, или правой подсхеме. Согласно схемному уравнению на рис. 3.5 выделяемым считается тот НУИ, генератор которого находится вне этих подсхем. В частном случае разноименные генератор и приемник, находящиеся вне выделенных подсхем, могут быть параллельными друг другу.

Выделение НУИ, расположенного в сечении

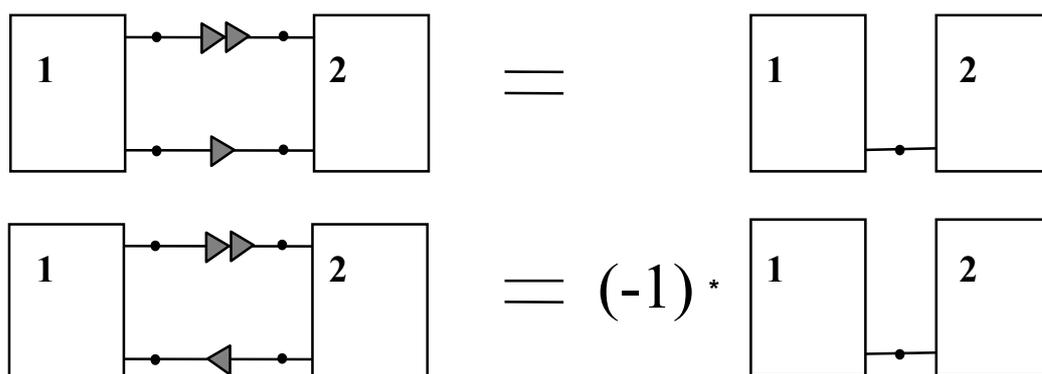


Рис. 3.4

Выделение НУИ, приемник которого находится вне сечения

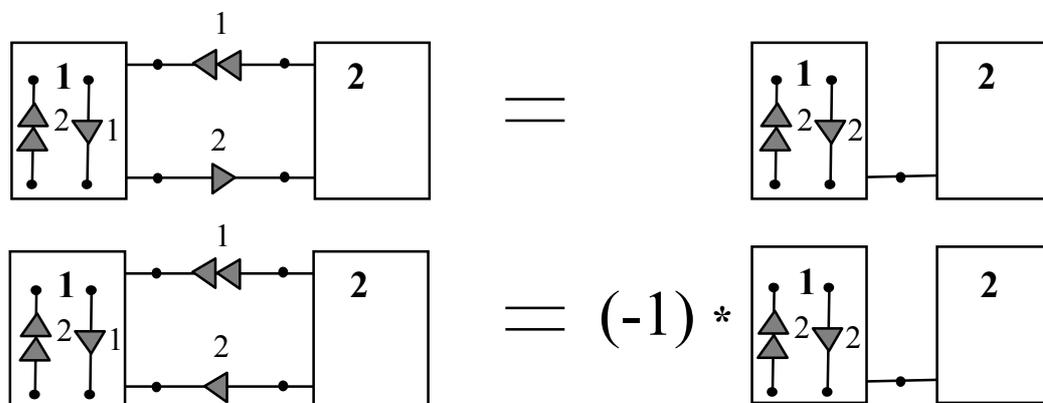


Рис. 3.5

Учет специальных случаев выделения НУИ целесообразен не только при формировании ССФ на компьютере, но и без его помощи, поскольку позволяет использовать формулу (3.3), не прибегая к построению производных ЭАС и выполняя суммирование числа НУИ, выделенных с отрицательным знаком, в уме. Этого достаточно, поскольку параметры НУИ при использовании

предложенного в данном подразделе метода НУИ считаются равными единице. Параметры УИ согласно формуле (3.1) заносятся в выражение схемного определителя после придания этому УИ статуса НУИ. В зависимости от знака перед Δ_n для краткости будем говорить о выделении НУИ “с плюсом” или “с минусом”. Метод НУИ иллюстрируется ниже на примерах формирования ССФ.

3.2.4. Пример анализа уз-схемы с ИТУН

Рассмотрим схему замещения операционного преобразователя [7], изображенную на рис. 3.6. Искомая ССФ представляется в виде отношения $U/E = \Delta N/\Delta D$ согласно схемному уравнению из табл. 2.1. Схема числителя получается из исходной схемы преобразованием независимого источника напряжения и отклика напряжения в НУИ, которому присвоен порядковый номер 1 или, кратко, НУИ-1. Эта схема согласно табл. 3.1 подлежит следующим эквивалентным упрощениям: 1) стягивание z-ветви pL , как включенной последовательно с генератором НУИ-1; 2) удаление y-ветви pC , параллельной приемнику НУИ-1; 3) выделение z-ветви R_1 , параллельной генератору НУИ-1. В результате последнего преобразования ΔN может быть найден как произведение R_1 на определитель схемы, изображенной на рис. 3.7.

Схема замещения операционного преобразователя на базе ИТУН

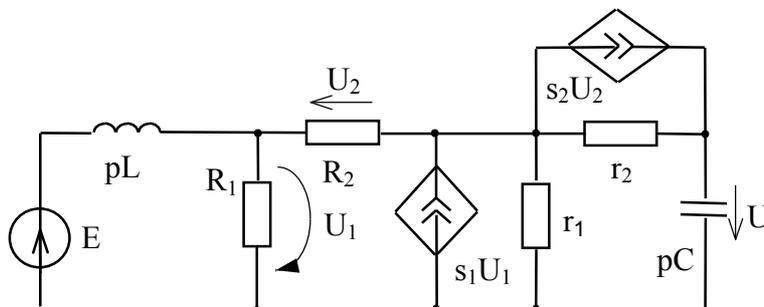


Рис. 3.6

Схема числителя ССФ для схемы на рис. 3.6

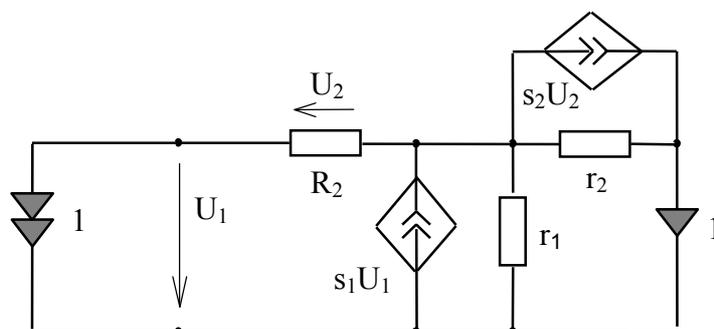


Рис. 3.7

Определитель схемы на рис. 3.7 раскрывается по формулам (1.3) и (3.1) с использованием табл. 3.1 и рис. 3.4, 3.5 в следующей последовательности.

1. Удаление R_2 .

1.1. Удаление r_1 .

1.1.1. Удаление r_2 . Преобразование s_2U_2 в НУИ-2. Выделение НУИ-2 с плюсом. Преобразование s_1U_1 в НУИ-3. Выделение НУИ-3 с плюсом. Выделение НУИ-1 с плюсом.

1.1.2. Стягивание r_2 . Удаление s_2U_2 . Преобразование s_1U_1 в НУИ-2. Выделение НУИ-2 с плюсом. Выделение НУИ-1 с плюсом.

1.2. Стягивание r_1 . Удаление s_1U_1 . Удаление r_2 . Преобразование s_2U_2 в НУИ-2. Выделение НУИ-2 с плюсом. Выделение НУИ-1 с минусом.

2. Стягивание R_2 . Удаление s_1U_1 и s_2U_2 . Удаление r_1 . Стягивание r_2 . Выделение НУИ-1 с плюсом.

Таким образом, определитель схемы на рис. 3.7 включает в себя определители производных схем 1., 1.1., 1.1.1., 1.1.2, 1.2. и 2. Удаление z -ветвей и преобразование ИТУН в НУИ при разложении определителей этих производных схем сопровождается выделением параметров в следующем порядке.

1. R_2 . 1.1. r_1 . 1.1.1 r_2, s_2, s_1 . 1.1.2. s_1 . 1.2. $r_2, s_2, -1$. 2. r_1 .

Параметры НУИ, выделяемые с плюсом, можно не учитывать в формуле схемного определителя. Учитывая ранее выделенный параметр R_1 и отделяя структурные части формируемого выражения скобками, получаем

$$\Delta N = R_1 \{ R_2 [r_1 (r_2 s_2 s_1 + s_1) - r_2 s_2] + r_1 \}.$$

Знаменатель ССФ ΔD находится как определитель схемы, образованной из исходной схемы на рис. 3.6 путем стягивания независимого источника напряжения и удаления ветви выходного напряжения (см. табл. 2.1). В результате получается схема знаменателя, изображенная на рис. 3.8.

Схема знаменателя ССФ для схемы на рис. 3.6

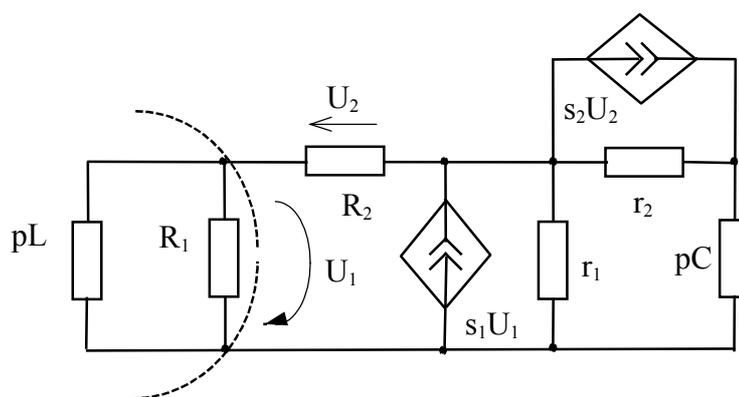


Рис. 3.8

Ее можно представить в виде двух подсхем, как показано на этом рисунке, и применить формулу (1.5), поскольку первая (левая) и вторая (правая) подсхемы не имеют одна с другой управляющих связей. Аналогично следует поступить с производной схемой, образованной из второй подсхемы в результате объединения внешних узлов а и б, выделив параллельное соединение элементов r_1 и R_2 .

Кроме двух обращений к формуле (1.5), при разложении определителя схемы на рис. 3.8 требуются формулы (1.2), (1.3) и (1.4), оба квазипассивных преобразования на рис. 3.1, а также учет расположения элемента R_2 в U-сечении. Следует обратить внимание на то, что объединение узлов z-ветви, то есть z-петля, соответствует помещению z-ветви в I-контур и приводит согласно табл. 3.1 к удалению этой ветви с выделением ее параметра в формулу

схемного определителя. С другой стороны, объединение узлов y -ветви, то есть y -петля, соответствует помещению y -ветви в I -контур, что требует удаления этой ветви без выделения ее параметра. Отсюда получаем

$$\Delta D = (pL+R_1) [r_1 R_2 pC(s_2 r_2 + 1) + (r_1+R_2)(pCr_2 + 1)] + pLR_1 [(r_2 pC+1)(1-s_1 r_1)+pCr_1] .$$

Как видно, раскрытие ΔD , в отличие от раскрытия ΔN , не привело к образованию ЭАС и подобно раскрытию определителя пассивной схемы. С точки зрения эффективности формирования ССФ без помощи компьютера предложенное решение является весьма экономным, поскольку все выкладки проводятся на основе рисунков только двух схем: схемы числителя и схемы знаменателя. Построения вспомогательных производных схем можно избежать, как в рассматриваемом случае, при анализе не слишком сложных электрических цепей, мысленно выполняя необходимые схемные преобразования. Наличие в схеме УИ, отличных от ИТУН, не делает решение задачи формирования ССФ более сложным, что имеет место в традиционных методах анализа электрических цепей.

3.2.5. Пример анализа uz -схемы с ИТУТ и ИНУН

Сформируем ССФ коэффициента передачи по напряжению $U/E = \Delta N/\Delta D$ для схемы замещения операционного преобразователя [7], изображенной на рис. 3.9. Для краткости опустим подробные пояснения к расчету, которые были даны в пункте 3.2.4. На рис. 3.10 представлена схема, образованная из схемы числителя искомой ССФ (см. табл. 2.1) в результате стягивания ветви pC , удаления ветви pL и стягивания ветви r_2 . В соответствии с табл. 3.1 определитель этой схемы, умноженный на коэффициент $p^2 CL$, является искомым числителем.

Схема замещения операционного преобразователя
на базе ИТУТ и ИНУН

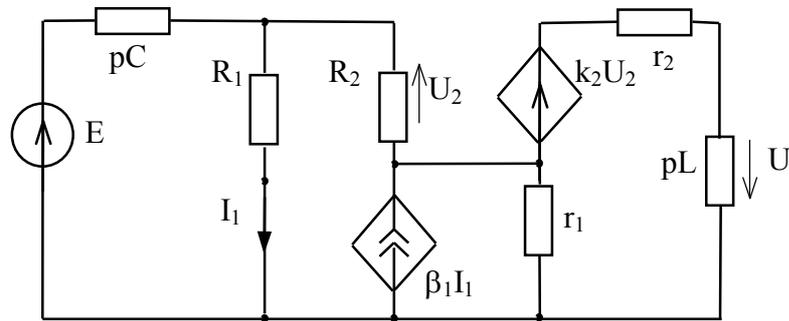


Рис. 3.9

Схема числителя ССФ для схемы на рис. 3.9

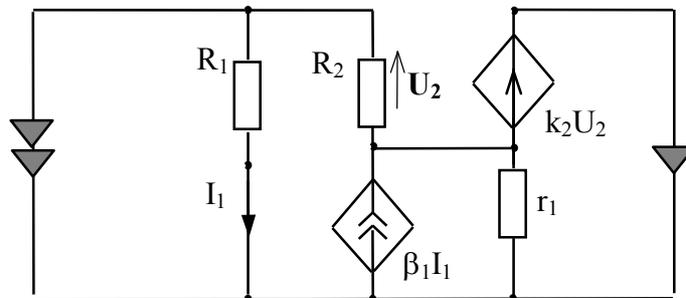


Рис. 3.10

Разложение определителя схемы на рис. 3.10 выполняется в следующем порядке.

1. Удаление R_2 .

1.1. Удаление R_1 . Удаление $\beta_1 I_1$. Преобразование $k_2 U_2$ в НУИ-2.

Выделение НУИ-1 с плюсом. Выделение НУИ-2 с минусом. Стягивание r_1 .

1.2. Стягивание R_1 . Преобразование $\beta_1 I_2$ в НУИ-2. Удаление r_1 .

1.2.1. Преобразование $k_2 U_2$ в НУИ-3. Выделение НУИ-3 с плюсом. Выделение НУИ-2 с плюсом. Выделение НУИ-1 с плюсом.

1.2.2. Удаление $k_2 U_2$. Выделение НУИ-1 с минусом. Выделение НУИ-2 с минусом.

2. Стягивание R_2 . Удаление r_1 . Удаление $\beta_1 I_1$. Удаление R_1 . Выделение НУИ-1 с плюсом.

Отсюда с учетом множителя $p^2 CL$ получаем

$$\Delta N = p^2 CL \{ R_2 [-R_1 k_2 + \beta_1 r_1 (k_2 + 1)] + r_1 R_1 \} .$$

Знаменатель ССФ находится как определитель схемы, изображенной на рис.3.11.

Схема знаменателя ССФ для схемы на рис. 3.9

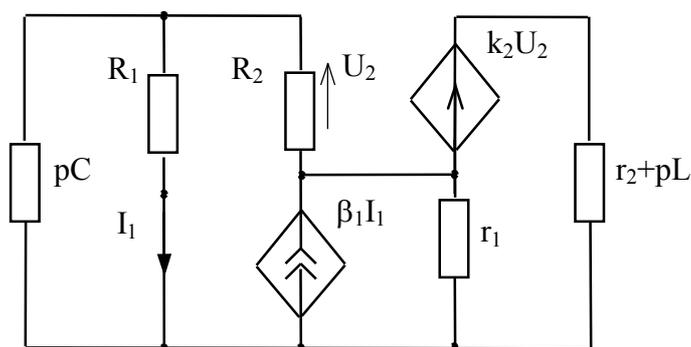


Рис. 3.11

Разложение определителя этой схемы выполняется следующим образом.

1. Удаление r_2+pL . Удаление $k_2 U_2$.

1.1. Удаление R_2 . Стягивание r_1 . Удаление $\beta_1 I_1$. $\Delta' = pCR_1 + 1$.

1.2. Стягивание R_2 . Используя формулу (1.5), получаем

$$\Delta'' = (pCr_1 + 1)R_1 + r_1(1 - \beta_1).$$

2. Стягивание r_2+pL . Удаление r_1 . Удаление $\beta_1 I_1$. По формуле (1.5)

$$\Delta''' = (pCR_1 + 1) R_2 (k_2 + 1) + R_1 .$$

Итак,

$$\Delta D = (r_2+pL) (R_2 \Delta' + \Delta'') + r_1 \Delta''' .$$

Нетрудно убедиться, что сформированная ССФ $\Delta N / \Delta D$ эквивалентна ССФ, полученной в пункте 3.2.4., при взаимной замене элементов pC и pL , а также выполнении условий $\beta_1 = s_1 R_1$ и $k_2 = s_2 r_2$. Как показывает сравнение, формирование ССФ для схемы с ИТУТ и ИНУН (см. рис. 3.9) задача даже несколько более простая, чем формирование ССФ для аналогичной по структуре схемы с двумя ИТУН (см. рис. 3.6). Это вполне объяснимо,

поскольку нерегулярные для узлового базиса УИ в большей степени влияют на режим схемы, что способствует ее упрощению. В то же время использование для анализа схем с n нерегулярными УИ метода обобщенного унисторного графа [96] требует рассмотрения 2^n производных схем, сопоставимых по сложности с исходной схемой. Например, ССФ, полученная в работе [96] для схемы рис. 3.9 с заданием пассивных элементов проводимостями, эквивалентна сформированной выше при замене знаков у параметров β_1 и k_2 на противоположные. Однако получение ССФ методом обобщенного унисторного графа было связано с существенно большим объемом промежуточных построений, операций и выкладок. Сложность соответствующего выражения после исключения дубликаций составляет 25 умножений и 15 сложений. При использовании метода НУИ, реализующего схемный подход, не приходится заботиться об исключении дубликаций, а соответствующие показатели в приведенном здесь выражении $\Delta N/\Delta D$ составляют 17 и 13.

Теперь рассмотрим случай, когда параметр k_2 имеет бесконечно большое значение. Для этого достаточно на схеме рис. 3.9 преобразовать $k_2 U_2$ в НУИ-2, что повлечет удаление R_2 . Поэтому изображение этого элемента на рис. 3.10 и 3.11 не будем принимать во внимание.

Разложение определителя модифицированной схемы на рис. 3.10 выполняется в следующем порядке.

1. Выделение НУИ-2 с плюсом.

1.1. Преобразование $\beta_1 I_1$ в НУИ-3. Удаление r_1 . Выделение НУИ-3 с плюсом. Стягивание R_1 . Выделение НУИ-1 с плюсом.

1.2. Удаление $\beta_1 I_1$. Стягивание r_1 . Удаление R_1 . Выделение НУИ-1 с минусом.

Отсюда с учетом множителя $p^2 CL$ получаем

$$\Delta N = p^2 CL (\beta_1 r_1 - R_1).$$

Для нахождения знаменателя ССФ используется модифицированная схема на рис. 3.11, в которой, кроме удаления R_2 , стягивается $r_2 + pL$, удаляются r_1 и

$\beta_1 I_1$. После выделения НУИ-2 с плюсом определитель этой схемы равен $pCR_1 + 1$. Таким образом,

$$\Delta D = r_1 (pCR_1 + 1).$$

Сформированная ССФ $\Delta N/\Delta D$ эквивалентна полученной выше при условии $k_2 = \infty$. Достоинством предложенной методики учета бесконечно больших значений параметров (см. пункт 3.2.2.) является то, что перед анализом схемы выполняется ее упрощение согласно табл. 3.1, исходя из физических соображений. В рассмотренном примере такими упрощениями являются преобразование ИНУН в НУИ и удаление элемента R_2 . Заметим, что этот элемент удаляется без выделения в формулу схемного определителя, поскольку модифицированная таким образом схема используется далее при построении схемы и числителя, и знаменателя.

3.2.6. Сравнение метода НУИ

с известными методами выделения параметров

В отличие от матричного [116, 162] и графового [94] методов выделения параметров метод НУИ обеспечивает получение прямого схемного решения задачи формирования ССФ при отсутствии каких-либо ограничений на тип используемых линейных элементов. Как показывают рассмотренные выше примеры анализа схем (см. пункты 2.6.2., 3.2.4. и 3.2.5.), управляя выделением параметров можно формировать выражения ССФ желаемого вида и вычислительной сложности. В случае активной схемы результатом выделения параметров пассивных элементов и УИ на некотором шаге разложения определителя является ЭАС. Далее выполняется выделение НУИ. Однако параметры НУИ не являются параметрами исходной схемы и равны единице, что требует дополнительных упрощений выражения схемного определителя путем изъятия из формулы параметров НУИ с положительными знаками и переноса знака “минус”, если параметр НУИ с отрицательным знаком не

является первым сомножителем в слагаемом некоторого подвыражения (см. пункты 3.2.4. и 3.2.5.). Без проведения этих упрощений выражение схемного определителя будет содержать избыточные операции умножения и сложения.

Отмеченные трудности формирования оптимальных выражений ССФ методом НУИ обусловлены тем, что знак перед параметром χ в формуле (3.1) всегда положителен, а ориентация выделяемого УИ учитывается в ориентации соответствующего ему НУИ. Фиксация положительного знака перед параметрами выделяемых УИ не позволяет минимизировать число операций вычитания в выражении схемного определителя. Действительно, если генератор и приемник выделяемого УИ смежны, то параметр этого УИ всегда имеет отрицательный знак при противоположной ориентации генератора и приемника по отношению к их общему узлу (см. рис. 2.1 и формулу (3.3)). Следовательно, знак “минус” приобретут определители ЭАС, которые будут порождены в результате последующего разложения с участием соответствующего НУИ.

Сокращение числа вычитаний можно достичь вынесением знака “минус” за скобку, то есть учетом фактической ориентации УИ в схеме с помощью знака перед выделяемым параметром, что не предусмотрено в формуле (3.1). Уменьшение числа вычитаний и унарных минусов может быть значительным, поскольку в моделях активных компонентов, как правило, используются УИ, генератор и приемник у которых имеют общий узел [13, 46, 47, 115, 116, 124]. Кроме того, такие УИ появляются в результате выделения пассивных элементов по формулам (1.2) и (1.3).

Другим недостатком формулы (3.1) является то, что образование первой производной схемы (путем придания УИ статуса НУИ) не связано с уменьшением числа узлов и элементов по сравнению с первоначальной схемой. В этом смысле более эффективной оказывается формула (1.9), реализующая матричный метод выделения параметров. Знак при параметре s в формуле (1.9) зависит от нумерации узлов схемы через нумерацию строк и столбцов в

соответствующей матрице узловых проводимостей. Алгебраическое правило нахождения знака не только не учитывает ориентацию в схеме генератора и приемника выделяемого ИТУН, но и вводит в выражение схемного определителя дополнительные операции вычитания. При этом число операций вычитания может составить половину от числа всех аддитивных операций. Таким образом, формула (1.9) оказывается еще менее пригодной для получения выражений ССФ с минимальным числом операций вычитания, чем формула (3.1) с фиксированным положительным знаком перед выделяемым параметром.

Наряду с отмеченным недостатком традиционное алгебраическое правило нахождения знака обуславливает методическую погрешность матричной модели при нулляторно-нораторном представлении активной схемы [115, 157]. Эта погрешность не сказывается на формировании ССФ (решении систем линейных алгебраических уравнений), а может проявиться в искажении знаков числителя и знаменателя ССФ, что препятствует, например, оценке устойчивости схемы с идеальными УИ по величине матричного определителя [157].

Нерегулярные для узлового базиса ИНУН, ИТУТ и ИНУТ, удаление которых приводит к объединению на схеме одной или двух пар узлов, а также z-ветви (частный случай ИНУТ), не могут быть учтены в матрице узловых проводимостей таким образом, чтобы оказалось возможным применение формулы (1.9) [43, 162]. Вместе с тем формула (1.9) может быть использована для получения определителя матрицы схемы в общем случае, если выполнять первоочередное разложение по всем возможным сочетаниям параметров, отличных от параметров u-ветвей, ИТУН и идеальных ОУ [46, 96]. Как следствие, в такой процедуре не осуществляется выделение параметров ИТУТ, ИНУН и ИНУТ, а значит, невозможно реализовать правила ПУ и половинного деления, то есть она оказывается неэффективной по сравнению с рекурсивным применением формулы (3.1).

Проведенное выше исследование показывает, что ни формула (1.9), ни формула (3.1) в оригинальном виде не могут быть использованы для эффективного формирования оптимальных по вычислительной сложности и количеству операций вычитания выражений ССФ активных электрических цепей. Удовлетворительный результат может быть получен при объединении полезных свойств указанных формул путем устранения зависимости знака перед выделяемым параметром от нумерации узлов схемы и определения этого знака из ориентации генератора и приемника соответствующего УИ.

3.3. Метод стягивания и удаления ветвей

Для совместного применения формул (3.1) и (1.9) необходимо дать последней формуле схемную интерпретацию и разработать топологическое правило нахождения знака, не требующее нумерации узлов схемы и позволяющее минимизировать число операций вычитания в формируемых выражениях ССФ. В данном подразделе предлагается модификация формулы (3.1), не приводящая к образованию нового НУИ взамен УИ в первой производной схеме. Это достигается путем введения операции стягивания для УИ, подобно случаям выделения у-ветви по формуле (1.2) и выделения НУИ по формуле (3.3).

3.3.1. Формула выделения параметра УИ

Предлагаемая формула имеет вид

$$\Delta = \pm \chi \Delta_{\chi} + \Delta^{\chi}, \quad (3.4) \text{ где } \Delta_{\chi} -$$

определитель схемы, полученной из первоначальной схемы в результате

следующих преобразований: 1) стягивание генератора (приемника) выделяемого УИ таким образом, чтобы генераторы (приемники), которые инцидентны одному из узлов - опорному узлу этого генератора (приемника), переключились на другой его узел; 2) объединение опорных узлов выделяемого УИ. Положительный (отрицательный) знак перед Δ_χ выбирается в случае противоположной (одинаковой) ориентации генератора и приемника УИ в первоначальной схеме по отношению к его опорным узлам.

Преобразования 1 и 2, выполняемые относительно выделяемого УИ, называются его стягиванием. Стягиванию УИ должна предшествовать проверка схемы на вырожденность (см. подраздел 3.1.).

В противном случае из вырожденной схемы может получиться невырожденная схема, что приведет к неверному результату.

Опорные узлы, относительно которых выполняется стягивание УИ, выбираются произвольно. При наличии у генератора и приемника общего узла целесообразно использовать его в качестве опорного узла и генератора, и приемника. Для этого случая преобразование 2 в операции стягивания опускается, а данное выше правило выбора знака инвертируется, что делает его более наглядным, то есть знак перед Δ_χ считается положительным (отрицательным) при одинаковой (противоположной) ориентации генератора и приемника соответствующего УИ по отношению к общему опорному узлу в первоначальной схеме.

Формула (3.4) является обобщением формулы (3.3) с учетом формулы (3.1). Принципиальным отличием формулы (3.4) от формулы (3.1) состоит в способе определения знака перед выделяемым параметром. Формула (3.4), в отличие от формул (1.9) и (3.1), учитывает ориентацию в схеме выделяемого УИ непосредственно перед его параметром. Топологическое правило нахождения знака использует ориентацию генератора и приемника выделяемого УИ по отношению к выбираемым произвольно опорным узлам. При этом не требуется сложения номеров узлов и их перенумерация после выделения из схемы или ее матрицы очередного параметра [162]. Последнее

связано с необходимостью списочного хранения элементов матриц, которым свойственна высокая разреженность.

Предложенное топологическое правило знаков может быть использовано для пересмотра в направлении оптимизации вычислений классической теории определителей, которая базируется на нумерации строк и столбцов матрицы [10]. Например, использование этого правила в формуле (1.9) позволяет как повысить эффективность матричного метода выделения параметров, так и обеспечить минимизацию операций вычитания в формируемых выражениях ССФ. Предлагаемая здесь модифицированная формула имеет вид

$$\Delta = \pm s \Delta_{(a+b)(c+d)} + \Delta^s, \quad (3.5) \text{ где}$$

знак перед параметром выделяемого ИТУН берется положительным или отрицательным соответственно при $a=c$ или $a \neq c$.

Для доказательства этого простейшего правила нахождения знака достаточно заметить, что ориентация генератора и приемника ИТУН по отношению к узлам a и c , выбранных в качестве опорных, одинаковая по определению САД [58]. Важно, что в формуле (3.5), наряду с номерами узлов схемы, можно использовать их буквенные обозначения. Сравнение формул (3.4) и (3.5) с формулой (1.9) показывает, что метод стягивания и удаления ветвей предоставляет новые возможности и его нельзя рассматривать только как схемную интерпретацию традиционного матричного метода выделения параметров [46, 116].

Математическое понятие САД ограничивает возможности для минимизации числа операций вычитания. Действительно, в общем случае можно образовать четыре пары опорных узлов и, следовательно, четыре варианта реализации формулы (3.4): два с положительным и два с отрицательным знаком перед χ . Это создает условия для минимизации операций вычитания в формируемых выражениях, когда генератор и приемник выделяемого УИ не имеют общего узла. Единственный вариант реализации этой формулы (с положительным или отрицательным знаком перед χ) имеется

в случае двух общих узлов у генератора и приемника, что соответствует вырожденному УИ или НУИ. Заметим, что при выделении вырожденного ИТУН из формулы (3.4) непосредственно, то есть минуя понятия НУИ или САД, следует формула Фойснера (1.2). Поэтому нельзя согласиться с Лином [162] и считать, что формула (1.9) является обобщением формулы (1.2). Прямое обобщение появилось здесь (см. формулу (3.4)), спустя тридцать лет после матричного результата Лина.

Если опорным узлам инцидентны u -ветви, то для выполнения стягивания УИ они должны быть замещены вырожденными ИТУН. Поскольку удаление генераторов напряжения и приемников тока приводит к объединению узлов схемы, не допускается инцидентность соответствующих ветвей невыделяемых УИ хотя бы одному из опорных узлов выделяемого УИ. Это ограничение всегда можно обойти надлежащим выбором опорных узлов, первоочередным выделением z -ветвей и УИ с генераторами напряжения и (или) приемниками тока, а также заменой в необходимых случаях операции стягивания операцией преобразования в НУИ. Следовательно, на основе формулы (3.4) может быть решена задача формирования ССФ для схем с линейными, сосредоточенными, инвариантными во времени элементами различных типов.

Использование формул (3.1) и (3.4) без надлежащего выбора элементов, выделяемых в первую очередь, может привести к значительному увеличению числа производных схем и объема выкладок. В частности, нецелесообразно выделять по формуле (3.4) элемент схемы, если в ней имеется хотя бы один другой элемент, который можно выделить на основе следствия этой формулы, приводящему к одной, а не двум, производным схемам. Таким образом, реализуется правило первоочередного выделения параметров, имеющих максимальный ПУ в схемном определителе для активных электрических цепей. Учет указанных следствий многократно повышает эффективность применения формул (3.1) и (3.4), сокращая сложность формируемых выражений ССФ. Необходимо отметить, что некоторые из полезных следствий формулы (3.4)

доказаны в [108] как разрозненные результаты. Ниже эти и другие результаты систематизируются и преподносятся как прямые следствия формулы (3.4).

3.3.2. Выделение параметров вырожденных и висячих УИ

В силу дуальности с ИТУН вырожденным считается ИНУТ, генератор и приемник которого соединены последовательно. Аналогично ИТУН вырожденными называются ИНУН и ИТУТ, когда их генератор и приемник оказываются соединенными параллельно. Параметры ИНУН и ИТУТ не имеют размерности, поэтому вырождение таких УИ не сводится к квазипассивному преобразованию (см. рис. 3.1 и 3.2. Очевидно, что стягивание и удаление вырожденных ИНУН и ИТУТ приводит к образованию из первоначальной схемы одной и той же производной схемы с определителем Δ^k и Δ^β . Отсюда, учитывая правило знаков для формулы (3.4) или рис. 2.1, получаем

$$\Delta = (1 \pm k) \Delta^k \quad (3.6) \text{ и}$$

$$\Delta = (1 \pm \beta) \Delta^\beta . \quad (3.7)$$

ИТУН называется висячим, когда одному из узлов схемы, кроме генератора и приемника этого ИТУН, инцидентны только генераторы тока, как показано на рис. 3.12 (слева), или только приемники напряжения согласно рис. 3.13 (слева). Положение висячего ИТУН в схеме подобно положению висячей у-ветви, поскольку его удаление также приводит к образованию вырожденной схемы (см. табл. 3.1), то есть висячий ИТУН имеет статус НУИ. Для выделения параметра s висячего ИТУН используется формула

$$\Delta = \pm s \Delta_s , \quad (3.8) \text{ где } \Delta_s -$$

определитель схемы, образованной из схемы с висячим ИТУН в результате удаления его приемника и стягивания его генератора (см. рис. 3.12 справа) или, наоборот, удаления его генератора и стягивания его приемника (см. рис. 3.13 справа). Положительный (отрицательный) знак при параметре s соответствует

одинаковой (противоположной) ориентации генератора и приемника висячего ИТУН по отношению к рассматриваемому узлу. Заметим, что на рис. 3.12 и 3.13 показаны случаи соответственно положительного и отрицательного знаков.

Преобразование висячего ИТУН с генераторами

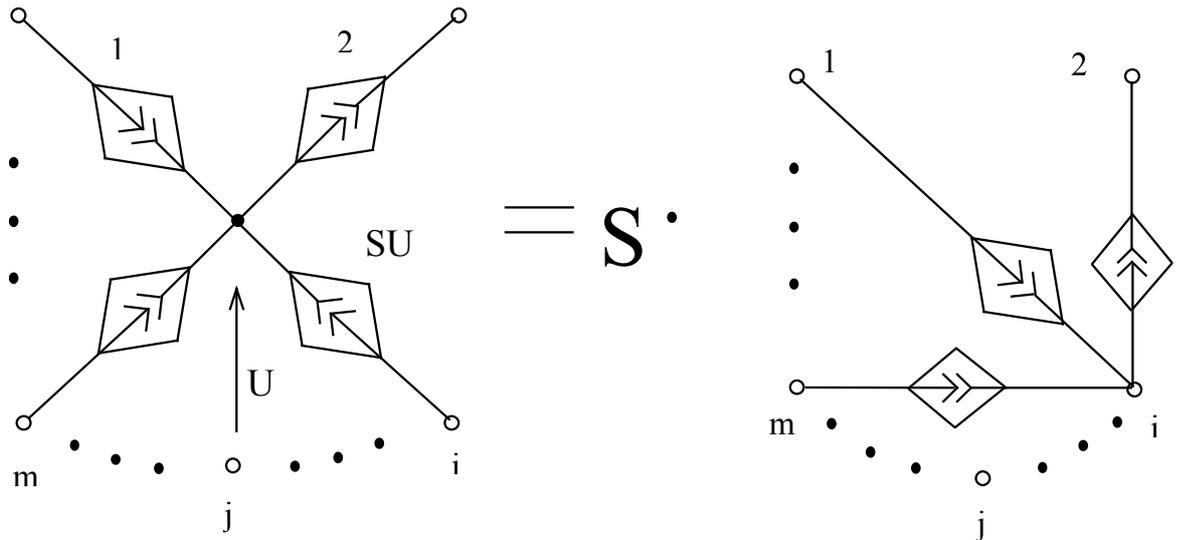


Рис. 3.12

Преобразование висячего ИТУН с приемниками

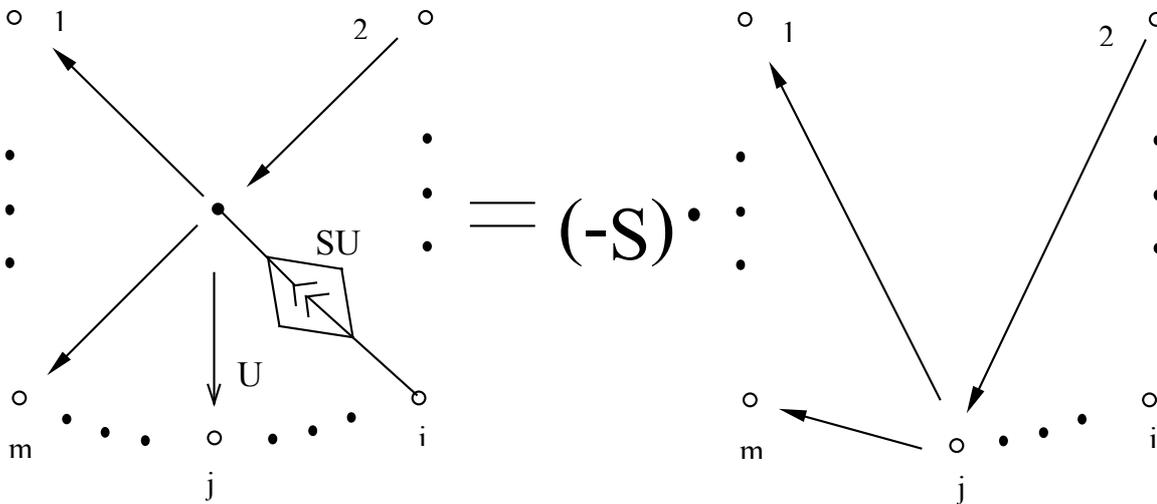


Рис. 3.13

Практический интерес представляют также случаи, когда параллельно генератору или приемнику висячего ИТУН подсоединена проводимость y , как показано на рис. 3.14 и 3.15 слева.

Преобразование параллельного соединения генератора ИТУН и y -ветви

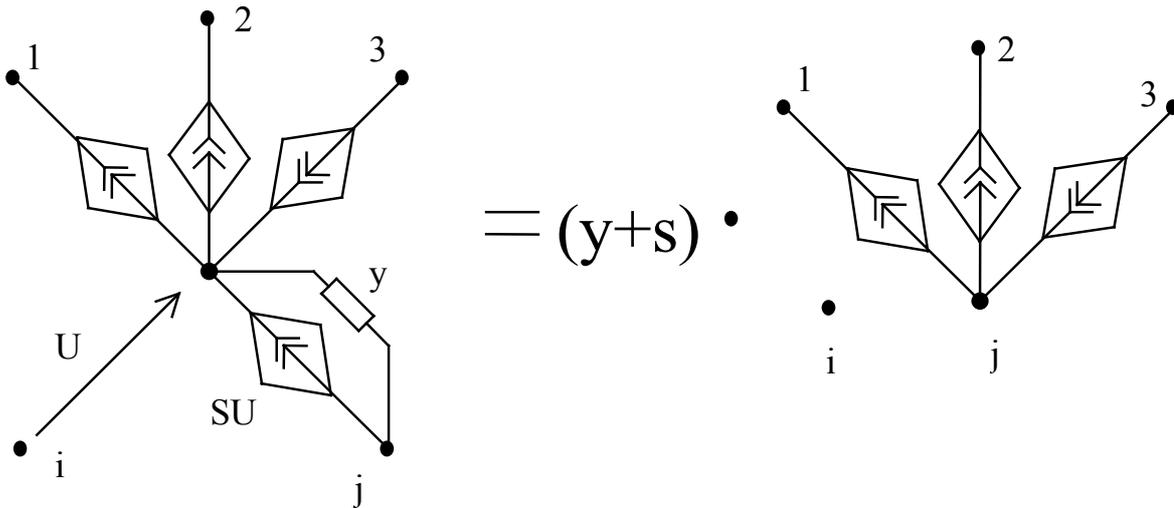


Рис. 3.14

Преобразование параллельного соединения приемника ИТУН и y -ветви

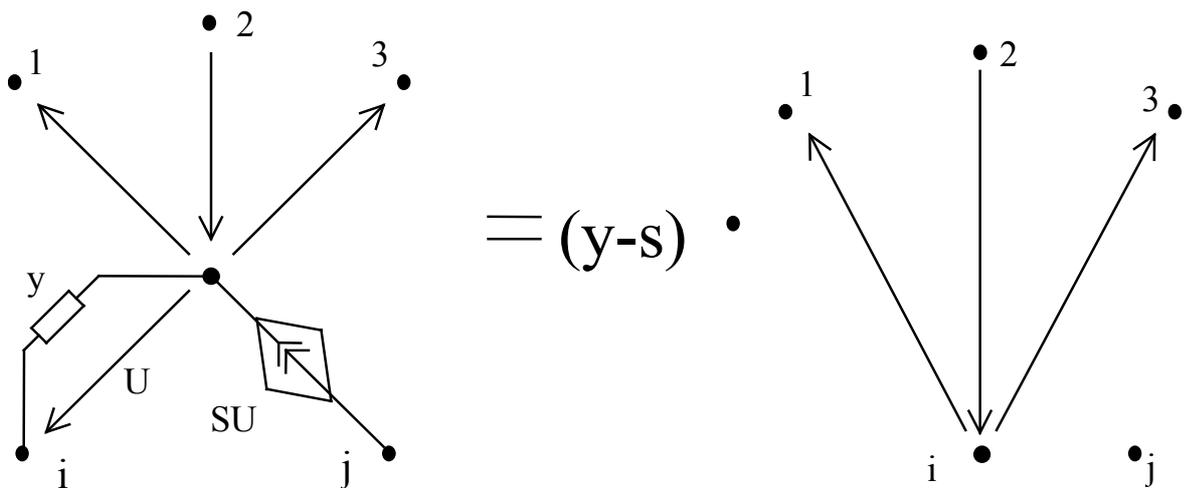


Рис. 3.15

Преобразования на рис. 3.14 и 3.15 обобщают преобразования на рис. 3.12 и 3.13, для которых $u=0$ [108]. Для их доказательства выполняется стягивание ИТУН с параметром s согласно формулы (3.4). Это приводит к упрощению соответствующих схем, как показано на рис. 3.14 и 3.15 справа. Удаление ИТУН влечет образование схем с висячей u -ветвью. Поскольку и стягивание ИТУН, и стягивание u -ветви приводит к образованию одинаковых схем (см. рис. 3.14 и 3.15 справа), то параметры s и u можно сложить и вынести за скобку в схемном определителе. Знак перед параметром s является следствием ориентации генератора и приемника ИТУН по отношению к их общему узлу.

ИНУН называется висячим, когда одному из узлов схемы, кроме генератора и приемника этого ИНУН, инцидентны только генераторы тока, как показано на рис. 3.16 (слева). Для выделения параметра k висячего ИНУН применяется формула (3.6), где Δ^k - определитель схемы, образованной из первоначальной схемы в результате удаления висячего ИНУН (см. рис. 3.16 справа). В силу дуальности висячим назван ИТУТ, одному из узлов которого, кроме генератора и приемника этого ИТУТ, инцидентны только приемники напряжения, как показано на рис. 3.17 (слева). Для выделения параметра β висячего ИТУТ применяется формула (3.7), где Δ^β - определитель схемы, образованной из первоначальной схемы в результате удаления висячего ИТУТ (см. рис. 3.17 справа). Преобразования на рис. 3.16 и 3.17, как и рассмотренные выше преобразования, являются прямыми следствиями формулы (3.4). Естественно, что знаки при параметрах k и β в формулах (3.6) и (3.7) выбираются аналогично знаку при параметре s в формуле (3.8). На рис. 3.16 и 3.17 показаны соответственно случаи положительного и отрицательного знаков.

Преобразование висячего ИНУН

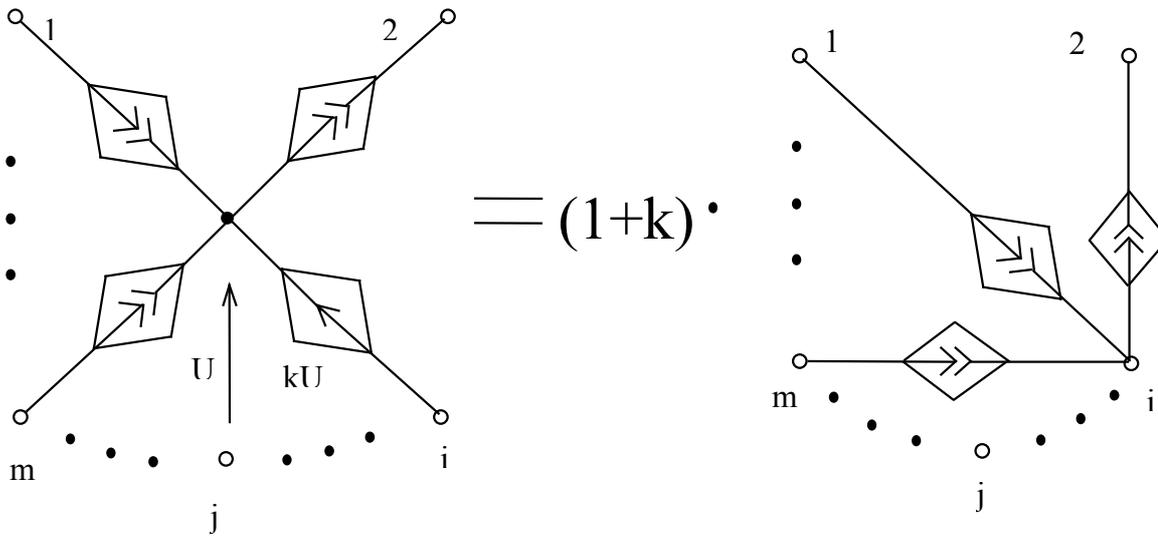


Рис. 3.16

Преобразование висячего ИТУТ

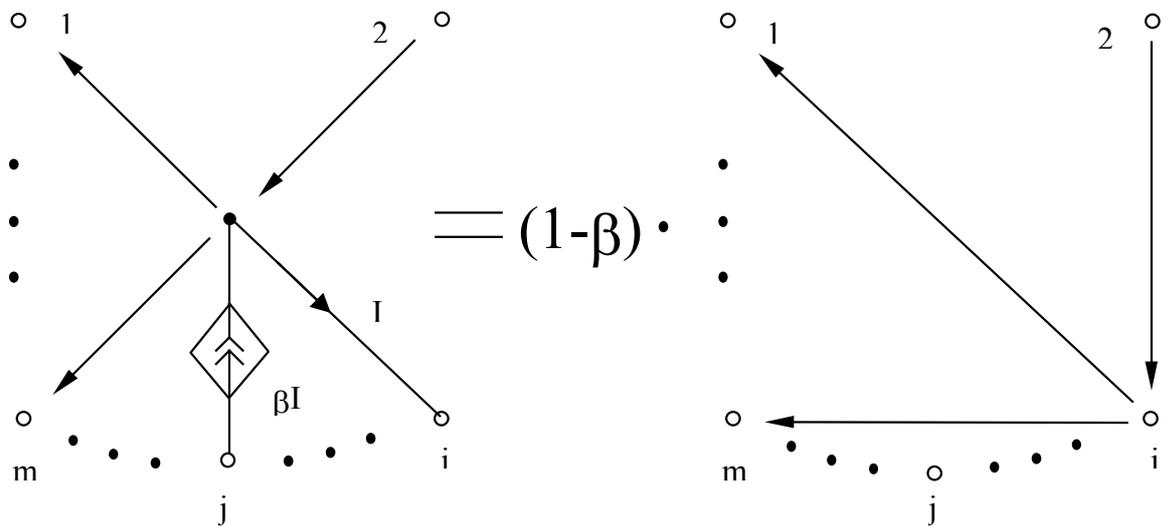


Рис. 3.17

Среди генераторов тока (приемников напряжения) на рис. 3.12 - 3.17 допускаются генераторы нули (приемники нули). Такая возможность

объясняется тем (см. табл. 3.1), что генераторы и приемники НУИ, подобно генераторам тока и приемникам напряжения, не могут привести к объединению узлов в схеме. Напомним также, что висячий ИТУН по существу является НУИ с параметром s , поэтому формула (3.8) является частным случаем формулы (3.3).

Рассмотренные в этом пункте и пункте 3.2.3. схемные преобразования и упрощения не исчерпывают множество модификаций формул (3.3) и (3.4), весьма полезных при формировании оптимальных выражений ССФ. Например, за рамками рассмотрения остались дуальные случаи, когда НУИ находится в контуре с генераторами напряжения или приемниками тока. Для выделения таких НУИ используются соответственно следующие формулы

$$\Delta = \pm \Delta_{\Gamma}^{\Pi} \quad (3.9)$$

или

$$\Delta = \pm \Delta_{\Pi}^{\Gamma}, \quad (3.10) \text{ где "Г"}$$

и "П" - обозначения генератора и приемника выделяемого НУИ. Положительный (отрицательный) знак перед определителем производной схемы выбирается при встречной (согласной) ориентации в контуре генератора и приемника выделяемого НУИ.

Для порождения и доказательства новых преобразований схемных определителей может быть использован принцип взаимосоответствия (обобщенный принцип дуальности), предложенный А.М.Иваницким [20].

3.3.3. Пример анализа у-схемы с ИТУН

Рассмотрим схему замещения, анализ которой был выполнен в работе [63]. На рис. 3.18 изображена схема, образованная из исходной схемы в результате преобразования независимого источника напряжения (ветви с искомым напряжением) в генератор (приемник) НУИ. Полученную схему можно

упростить путем удаления проводимостей g_1 и g_5 , параллельных генератору и приемнику НУИ (см. табл. 3.1).

Схема числителя передаточной ССФ по напряжению

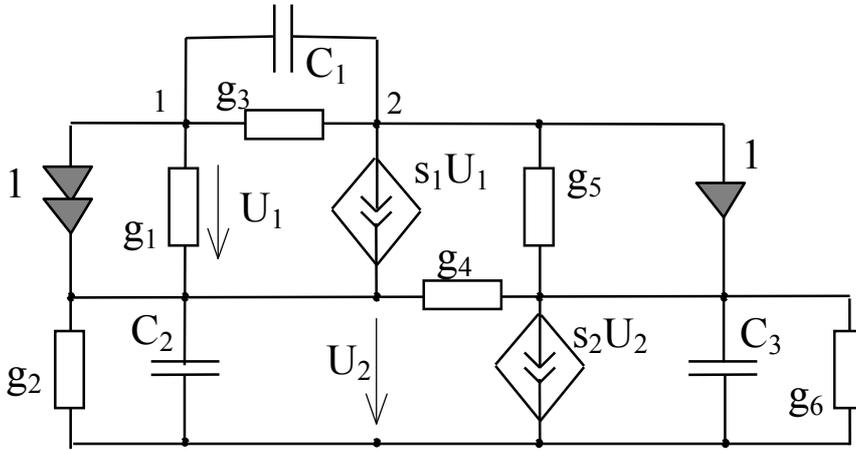


Рис. 3.18

Для выделения НУИ используем формулу (3.4) без второго слагаемого. В качестве опорных узлов выберем узлы 1 и 2, которым инцидентно наименьшее количество элементов. Такой выбор упрощает операцию стягивания НУИ, после которого получается схема, изображенная на рис. 3.19. Обратим внимание на то, что вместо s_1U_1 на этой схеме появляется у-ветвь s_1 , а параллельное соединение у-ветвей g_3 и pC_1 преобразуется в новый ИТУН. Знак перед параметром НУИ в данном случае отрицателен, поскольку опорные узлы генератора и приемника различные, а ориентация генератора и приемника по отношению к узлам 1 и 2 одинаковая. Таким образом, числитель искомой ССФ равен определителю схемы на рис. 3.19, взятому с отрицательным знаком.

Схема рис. 3.18 после стягивания НУИ

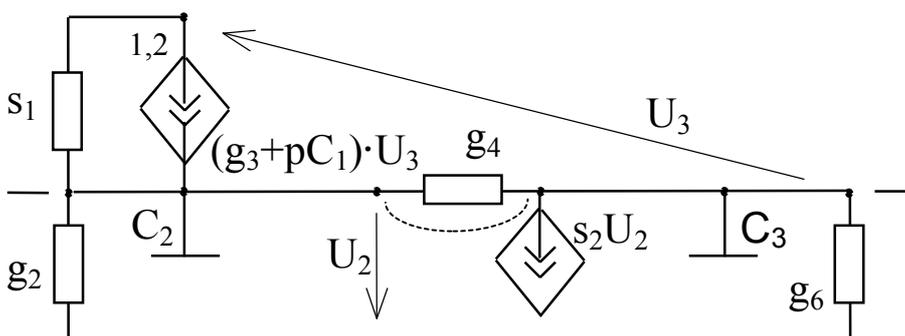




Рис. 3.19

Разделив схему на две подсхемы, не имеющие одна с другой управляющих связей, как показано на рис. 3.19, и применив формулу (1.5), получаем

$$\Delta N = - \{ [g_4(s_1 - g_3 - pC_1)] (g_2 + pC_2 + g_6 + pC_3 + s_2) + (s_1 - g_3 - pC_1) (g_2 + pC_2) (g_6 + pC_3) \} .$$

Знаменатель ССФ является определителем схемы, представленной на рис. 3.20, отличия которой от схемы на рис. 3.18 вытекают из строки табл. 3.1 для U/E. Объединение входных узлов привело к удалению $s_1 U_1$. Выделим параметр s_2 в явном виде. Для этого необходимо в соответствии с формулой (3.4) рассмотреть две производные схемы, изображенные на рис. 3.21 и 3.22.

Схема знаменателя передаточной ССФ по напряжению

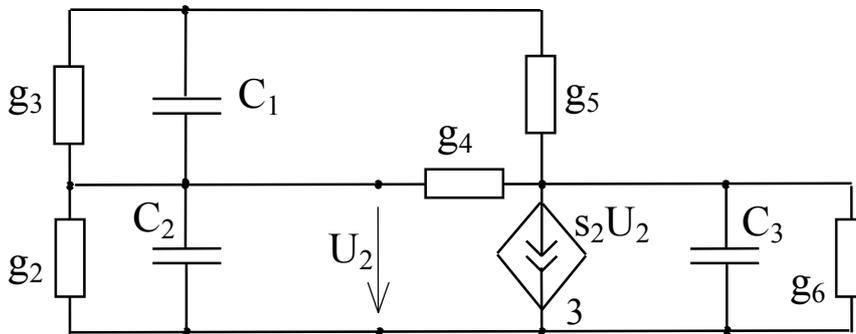


Рис. 3.20

Схема рис. 3.20 после стягивания $s_2 U_2$

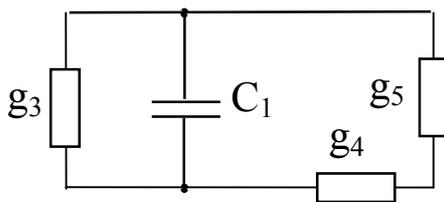


Рис. 3.21

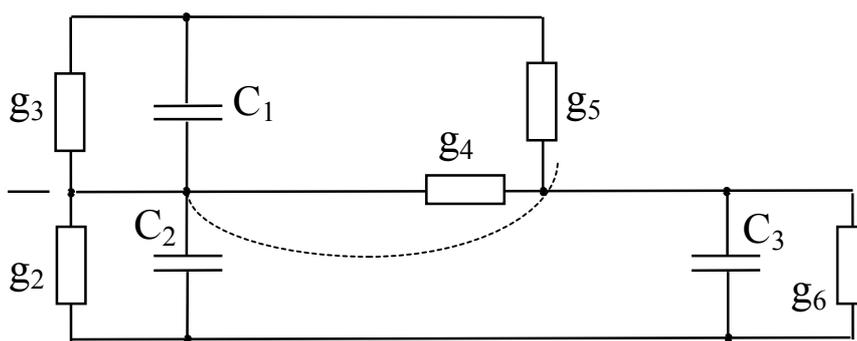
Схема рис. 3.20 после удаления s_2U_2 

Рис. 3.22

Первая схема является результатом стягивания s_2U_2 относительно опорного узла с номером 3. Вторая схема образована путем удаления этого УИ. Ее целесообразно разделить на две подсхемы, как указано на рис. 3.22. Отсюда получается знаменатель искомой ССФ в виде

$$\begin{aligned} \Delta D = & s_2 [(g_3+pC_1)(g_4+g_5) + g_4g_5] + \\ & + [(g_3+pC_1)(g_4+g_5) + g_4g_5] (g_2+pC_2+g_6+pC_3) + \\ & + (g_3+g_5+pC_1) (g_2+pC_2) (g_6+pC_3) . \end{aligned}$$

Поскольку рассмотренная методика свободна от излишних построений и выкладок, формирование ССФ для практических схем с двумя-тремя УИ является весьма несложным делом. Сомнения относительно ее наглядности и эффективности можно развеять, сравнив полученное решение $\Delta N/\Delta D$ с решением на основе метода обобщенных чисел [63].

Если необходимо получить символьно-численное выражение схемной функции [63, 116], то коэффициенты при произведениях варьируемых параметров можно найти одним из численных методов как определители матриц соответствующих схем. Такая возможность облегчается, когда не требуется расширять базис матричного метода для учета НУИ, который в отличие от нуллора [56, 115], содержит информацию о знаке. Следовательно, применение формулы (3.4) оказывается предпочтительным. Например, для исследования влияния изменений проводимостей g_4 , s_1 и s_2 (см. рис. 3.19) вовсе

необязательно выполнять группировку слагаемых ΔN , как в [63]. Коэффициентам при параметрах g_4 , s_1 , s_2 , g_4s_1 , g_4s_2 , s_1s_2 , $g_4s_1s_2$ соответствуют схемные отображения. Так, для получения коэффициента при g_4s_2 требуется стянуть проводимость g_4 и ИТУН s_2U_2 , а также удалить квазипассивный двухполюсник s_1 в схеме на рис. 3.19.

Анализ схем с УИ, нерегулярными для узлового базиса, на основе формулы (3.4) имеет некоторые особенности, которые обсуждаются при рассмотрении другого примера.

3.3.4. Пример анализа у-схемы с ИТУТ и ИНУН

Рассмотрим схему замещения операционного преобразователя [7], анализ которой был выполнен в работе [96]. На рис. 3.23 изображена схема, образованная из исходной схемы в результате преобразования независимого источника напряжения (ветви искомого напряжения) в генератор (приемник) НУИ. Определитель этой схемы является числителем передаточной ССФ по напряжению, которая подлежит нахождению согласно табл. 2.1. Схему на рис. 3.23 можно упростить путем удаления ветви Y_2 , как включенной параллельно приемнику НУИ, а также стягивания ветвей Y_1 и G_2 , которые включены последовательно с генератором и приемником НУИ соответственно (см. табл. 3.1). В результате получается схема, изображенная на рис. 3.24, определитель которой, умноженный на Y_1G_2 , является искомым числителем ССФ.

Схема числителя передаточной ССФ по напряжению

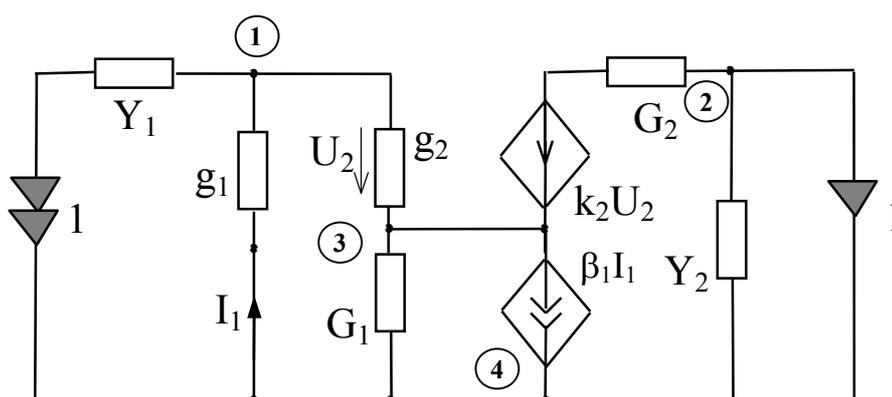


Рис. 3.23

Схема рис. 3.23 после эквивалентных упрощений

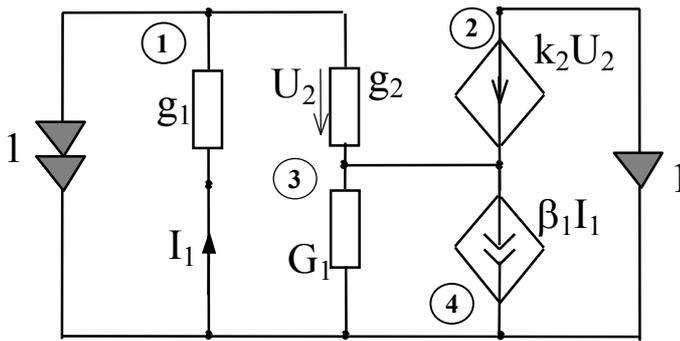
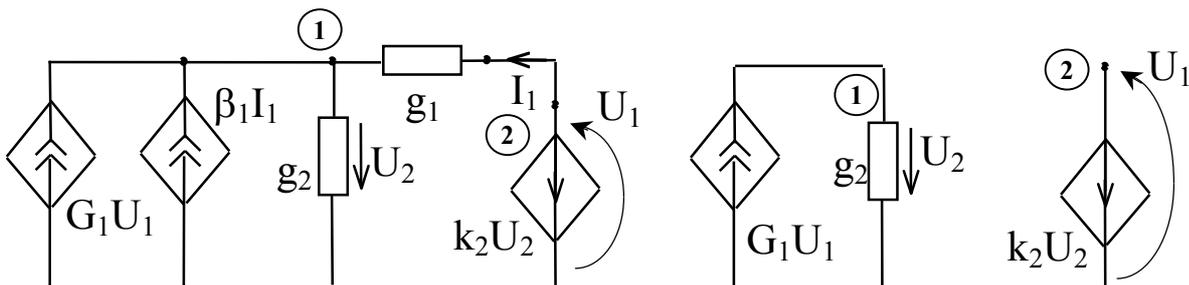


Рис. 3.24

Для разложения определителя схемы на рис. 3.24 выполним стягивание НУИ (второе слагаемое в формуле (3.4) равно нулю). В качестве опорного узла генератора и приемника НУИ удобно выбрать узел с номером 4. При этом знак перед параметром выделяемого НУИ будет положительным. Поскольку опорному узлу НУИ инцидентен приемник тока I_1 , то операция стягивания применяется к двум производным схемам, которые получены в результате преобразования ИТУТ $\beta_1 I_1$ в НУИ-2 с параметром β_1 и удаления этого ИТУТ (см. формулу (3.1)). Соответствующие производные схемы изображены на рис. 3.25 слева и справа.

Выделение ИТУТ $\beta_1 I_1$ в ходе операции стягивания



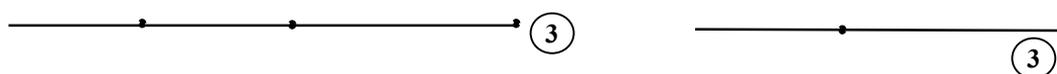


Рис. 3.25

Первая производная схема упрощается путем стягивания g_1 . После чего стягивается НУИ-2 относительно опорного узла 1, что приводит к образованию вырожденного ИНУН, определитель которого находится по формуле (3.6) при $\Delta^k = 1$ и равен $1+k_2$. На второй производной схеме выполняется выделение ИНУН k_2U_2 по формуле (3.4) относительно опорного узла 3. Стягивание ИНУН приводит к получению квазипассивного двухполюсника с параметром $-G_1$. Удаление ИНУН влечет за собой удаление ИТУН G_1U_1 и получение у-ветви g_2 . Таким образом, числитель искомой ССФ находится по формуле

$$\Delta N = Y_1 G_2 [g_1 \beta_1 (1 + k_2) - k_2 G_1 + g_2] .$$

Знаменатель ССФ является определителем схемы, представленной на рис. 3.26, отличия которой от схемы на рис. 3.23 вытекают из строки табл. 3.1 для У/Е. Разложение схемного определителя начнем с выделения ИТУТ $\beta_1 I_1$ по формуле (3.4). На рис. 3.27 изображена схема, полученная путем стягивания ИТУТ относительно узла 4. Ветвь g_1 на этом рисунке образует сечение с приемниками напряжения U_1 и U_3 , что требует ее стягивания (см. табл. 3.1). Это влечет за собой удаление ИТУН $Y_1 U_1$. В упрощенной схеме ветвь g_2 образует сечение с приемниками напряжения U_2 и U_3 . После ее стягивания удаляется ИНУН $k_2 U_2$ и получается схема, состоящая из параллельного соединения ветви G_2 и вырожденного ИТУН $Y_2 U_3$. Определитель такой схемы равен $G_2 + Y_2$.

Схема, образованная в результате удаления ИТУТ изображена на рис. 3.28. Выделение ИНУН $k_2 U_2$ на этой схеме также выполняется по формуле (3.4). В качестве опорного узла используем узел 3.

Схема знаменателя передаточной ССФ по напряжению

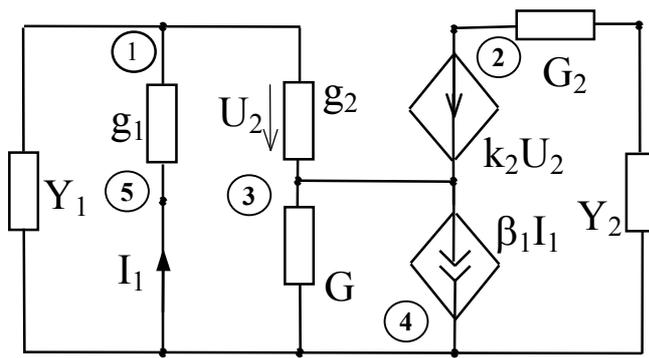


Рис. 3.26

Схема рис. 3.26 после стягивания ИТУТ

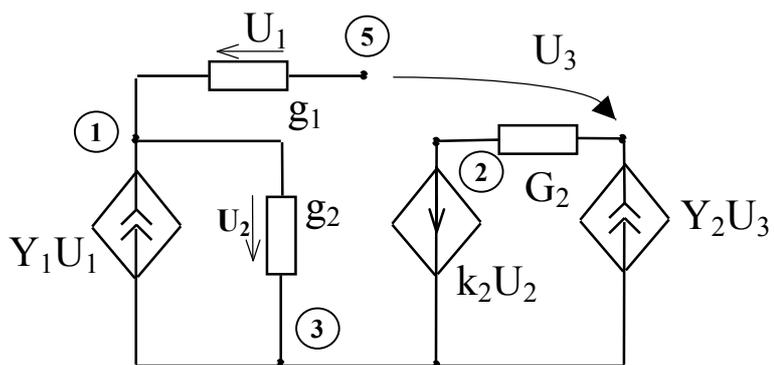


Рис. 3.27

Схема рис. 3.26 после удаления ИТУТ

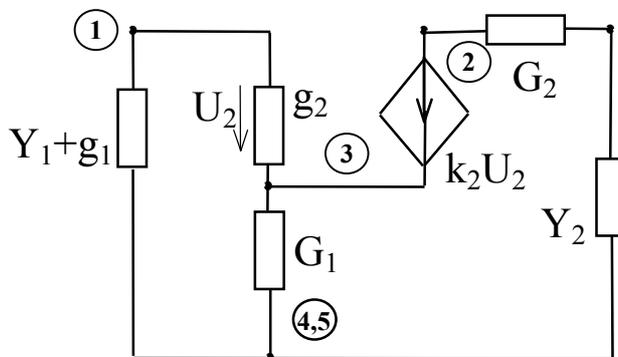


Рис. 3.28

После стягивания ИНУН у-ветвь G_1 преобразуется в ИТУН, генератор которого соединен последовательно с у-ветвями G_2 и Y_2 , что требует их стягивания и удаления самого ИТУН. Полученная схема представляет собой ветвь Y_1+g_1 . Удаление ИНУН в схеме на рис. 3.28 приводит к пассивной схеме, разложение определителя которой не имеет особенностей. Таким образом, знаменатель искомой ССФ находится по формуле

$$\Delta D = -\beta_1 g_1 g_2 (G_2+Y_2) + k_2 G_2 Y_2 (Y_1+g_1) + (Y_1+g_1) g_2 (G_2+Y_2) + (Y_1+g_1+g_2) [G_1(G_2+Y_2) + G_2 Y_2].$$

Знак “минус” в этой формуле обусловлен выделением параметра с отрицательным знаком, поскольку генератор и приемник ИТУТ имеют противоположную ориентацию по отношению к опорному узлу 4. Сформированная выше ССФ $\Delta N/\Delta D$ соответствует ССФ, полученной при задании всех пассивных ветвей схемы, кроме ветви Y_1 , сопротивлениями (см. пункт 3.2.5., а также работу [108]).

3.4. Минимизация операций вычитания в схемных определителях

Для исследования формул (3.1) и (3.4) сопоставим предыдущее решение примера с решением, данным в [108]. Формула (3.1) приводит задачу формирования ССФ к разложению определителей ЭАС. Чтобы избежать использования трудоемкой процедуры нахождения соответствующих знаков (см. подраздел 1.4.), необходимо выделять пассивные элементы до образования специальных случаев включения УИ и НУИ, что позволило бы вынести их параметры за скобки по формуле (3.3). Напротив, разложение числителя по формуле (3.4) не требует учета каких-либо схемных особенностей, а разложение знаменателя ССФ (см. рис. 3.26) выполняется по этой формуле достаточно просто без использования неудобной для расчета вручную формулы трехузловой бисекции.

Применение формулы (3.1) требует, в отличие от формулы (3.4), рассмотрения значительно большего количества производных схем, содержащих НУИ. Однако вообще отказаться от использования НУИ нельзя, поскольку они не только обеспечивают учет элементов, наличие которых не позволяет стянуть тот или иной УИ (см. пункт 3.3.4.), но и появляются в производных схемах как результат применения диакоптических формул для трех и более узлов бисекции [108], а также являются схемными моделями идеальных ОУ. Кроме того, использование метода НУИ, в отличие от метода стягивания и удаления ветвей, не сопряжено со сложными преобразованиями схем, в чем можно убедиться, рассмотрев решения упомянутого выше примера указанными методами в пунктах 3.2.5 и 3.3.4. Наибольший эффект достигается в случае, когда стягивание некоторого УИ или НУИ откладывается до тех пор, пока это не повлечет за собой упрощение разложения схемного определителя и, как следствие, уменьшения его вычислительной сложности.

Следует обратить внимание на то, что повышение эффективности метода НУИ за счет первоочередного выделения параметров пассивных элементов препятствует минимизации операций вычитания в формируемых выражениях ССФ. Действительно, при выделении некоторого пассивного элемента до выделения УИ с параметром χ появляются два подвыражения, все слагаемые которых содержат параметр χ . Если этот параметр выделяется после параметров двух пассивных элементов, то количество подвыражений, слагаемые которых содержат в качестве сомножителя параметр χ в общем случае удвоится и т.д. Следовательно, для формирования ССФ с минимальным числом операций вычитания необходимо первоочередное выделение параметров УИ.

Такую возможность предоставляет формула (3.4), в которой вклад в знак коэффициента при параметре выделяемого УИ учитывается непосредственно перед этим параметром. Например, если при выделении НУИ в ходе разложения определителя схемы на рис 3.18 вместо узла 1 использовать в

качестве опорных узлы 1 и 5, то получается выражение, содержащее не 5 операций вычитания, а одну

$$\Delta N = (g_3 + pC_1 - s_1) [g_4 (g_2 + pC_2 + g_6 + pC_3 + s_2) + (g_2 + pC_2) (g_6 + pC_3)] .$$

В случаях, когда формирование полного символьного выражения невыполнимо или нецелесообразно, метод стягивания и удаления ветвей может быть использован не только для получения символьно-численных, но и упрощенных, выражений ССФ. Важно, что при формировании упрощенных выражений не требуется предварительная оценка значений отдельных слагаемых развернутого выражения определителя, получение которого практически невыполнимо для сложных интегральных схем [170]. Достаточно выделять параметры элементов в порядке уменьшения их численных значений, которыми являются центральные величины диапазонов изменения соответствующих параметров. При наличии реактивных элементов их параметры локализуются в начало соответствующих выражений [94], а упрощения проводятся на уровне подвыражений с резистивными параметрами. Процесс выделения параметров прекращается после достижения необходимой степени приближения приближенной ССФ к ССФ, подлежащей аппроксимации.

Упрощение выражений ССФ на основе вложенных выражений, содержащих дубликации, значительно снижает эффективность и надежность современных программ символьного моделирования сложных интегральных схем [140, 148, 149]. В этой связи весьма важно, что реализация схемного подхода на основе метода стягивания и удаления ветвей не только избавляет от избыточных вычитаний, но и позволяет минимизировать необходимые операции вычитания. Ниже приводится описание алгоритма, использующего полезные свойства предложенного метода.

3.5. Алгоритм формирования оптимальных выражений ССФ

Нахождение ССФ сводится к разложению определителей двух схем: схемы числителя и схемы знаменателя (см. табл. 2.1). Схемный определитель тождественно равен нулю в случае вырожденной схемы. Поэтому перед выделением параметров выполняется проверка наличия простейших признаков вырождения [108]: 1) схема несвязна; 2) в схеме имеется хотя бы одно сечение, образованное только генераторами тока и генераторами НУИ или только приемниками напряжения и приемниками НУИ; 3) в схеме имеется хотя бы один контур, образованный только генераторами напряжения и генераторами НУИ или только приемниками тока и приемниками НУИ. При проверке вырождения удобно пользоваться табл. 3.1.

Убедившись в невырожденности схемы, следует исследовать ее на возможность проведения эквивалентных упрощений путем: 1) объединения параллельно (последовательно) включенных u -ветвей и ИТУН (z -ветвей и ИНУТ); 2) преобразования вырожденных ИТУН и ИНУТ в u -ветви и z -ветви; 3) придания элементу статуса НУИ, то есть преобразования в НУИ, или удаления согласно табл. 3.1.

Проверка на вырожденность и эквивалентные упрощения безусловно выполняются для всех схем и подсхем, полученных в результате преобразований исходной схемы. Поэтому эти важные операции, приводящие к существенной экономии выкладок, предусматриваются на каждом шаге алгоритма формирования оптимального выражения схемного определителя. Предлагаемый алгоритм заключается в рекурсивном исполнении следующих шагов для исходной схемы, а также производных от нее схем и подсхем.

1. Выделение параметров с максимальными ПУ.

1.1. Выделение вырожденных НУИ по формуле (3.4) - второе слагаемое равно нулю. Если генератор и приемник, соединенные параллельно, принадлежат различным НУИ, то знак перед выделяемым параметром изменяется на противоположный. Оставшиеся в производной схеме

разноименные генератор и приемник заменяются одним НУИ с оставшимся параметром.

1.2. Выделение параметров ИТУН и у-ветви согласно рис. 3.14 и 3.15.

1.3. Выделение параметров висячих ИНУН и ИТУТ согласно рис. 3.16 и 3.17.

1.4. Выделение НУИ, генератор и приемник которых образуют сечение только с генераторами тока и генераторами НУИ или только приемниками напряжения и приемниками НУИ относительно одного из узлов схемы. Этот узел используется в качестве опорного узла (см. формулу (3.4)).

1.5. Выделение по формуле (1.4) определителей подсхем, имеющих с оставшейся частью схемы - второй подсхемой единственный общий узел. Не допускается размещение разноименных генератора и приемника в различных подсхемах.

1.6. Выделение по формуле (1.5) параметра подсхемы [108], имеющей с оставшейся частью схемы - второй подсхемой два общих узла. Вторая подсхема при этом является вырожденной или становится вырожденной в случае объединения внешних узлов.

2. Выделение НУИ, для которых существует операция стягивания.

2.1. Выделение параметров НУИ, генератор и приемник которых имеют общий узел. Этот узел используется в качестве опорного узла.

2.2. Выделение параметров НУИ, генератор и приемник которых не имеют общего узла. В качестве опорных узлов используются узлы, параллельно которым не подсоединены у-ветви, или узлы, по отношению к которым генератор и приемник выделяемого НУИ имеют противоположную ориентацию.

3. Применение диакоптических формул [108].

Рассматриваются возможности деления схемы на подсхемы по двум, трем или более узлам с учетом правила половинного деления и наличия у подсхем

параметров, которым соответствуют вырожденные схемы. В случае утвердительного ответа схемный определитель раскрывается по соответствующей формуле.

4. Выделение параметров УИ, для которых существует операция стягивания.

Среди названных УИ выбирается тот, который имеет наибольший ПУ. Если имеется более одного УИ с таким же ПУ (или его оценкой по правилу минимума), то в первую очередь выделяется тот, который имеет большую кратность, являясь результатом объединения большего числа УИ. Для уменьшения количества операций вычитания необходимо, чтобы в первую очередь выделялся УИ, генератор и приемник которого имеют общий узел и ориентированы противоположно по отношению к нему. Этот узел должен использоваться в качестве общего опорного узла.

5. Выделение параметров УИ, для которых не существует операции стягивания.

Для этого выбирается УИ с учетом требований шага 4. Далее применяется формула (3.4), но вместо стягивания выделяемого УИ выполняется его преобразование в НУИ с соответствующим параметром.

6. Выделение параметров пассивных элементов.

К этому времени в схеме не остается НУИ и УИ, то есть отсутствуют препятствия для последовательной реализации правил ПУ, кратности и половинного деления.

В результате работы алгоритма формируется вложенное выражение схемного определителя или обнаруживается вырожденность схемы. Изменяя взаимно порядок следования шагов 3 и 4, 3 и 5 или выполняя шаг 6 перед

шагами 3 - 5, можно получить выражение с первоочередным выделением параметров выбранных элементов. Таким образом удастся управлять процессом формирования ССФ за счет увеличения числа вычитаний и изменения сложности выражения. Это полезно, например, в случае нахождения функций чувствительности к изменениям заданных параметров. В следующем подразделе будет показано, что формируемые на основе предложенного алгоритма выражения ССФ требуют наименьшего числа вычитаний по сравнению с выражениями, полученными в результате применения известных алгоритмов.

3.6. Формирование ССФ на компьютере

Рассмотренный выше алгоритм реализован в очередной версии программы SYMBOL [91, 92] на языке ТурбоСи для IBM PC-совместимых персональных компьютеров. Текстовый файл программы составляет 85 кбайт. Ниже представлены результаты анализа с помощью программы SYMBOL сложных схем с ИТУН и идеальными ОУ.

3.6.1. Формирование определителей полных схем с ИТУН

В качестве пассивной подсхемы использовалась ПС с восемью узлами, изображенная на рис. 3.29. К этой подсхеме поочередно подсоединяется одна из четырех активных подсхем, образованных ИТУН: 1) (12,34), (34,12), (56,78), (78,56); 2) (12,23), (13,34), (14,45), (15,56), (16,67), (17,78), (18,12); 3) (12,34), (34,56), (56,78), (78,12); 4) (12,34), (12,56), (12,78), (34,56), (34,78), (56,78). В частности, активная подсхема под номером 2, является модификацией схемы операционного преобразователя с последовательным включением выходов усилителей [7] и показана на рис. 3.30. Схемы, полученные в результате соединения пассивной подсхемы с первой, второй, третьей и четвертой

активными подсхемами, будем обозначать соответственно test1, test2, test3 и test4. Эти схемы изображены на рис. 3.31 - 3.34.

Пассивная подсхема

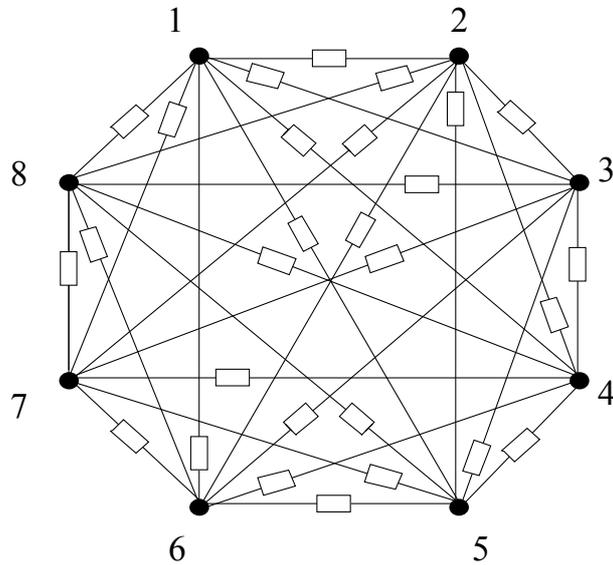


Рис. 3.29

Активная подсхема для схемы test2

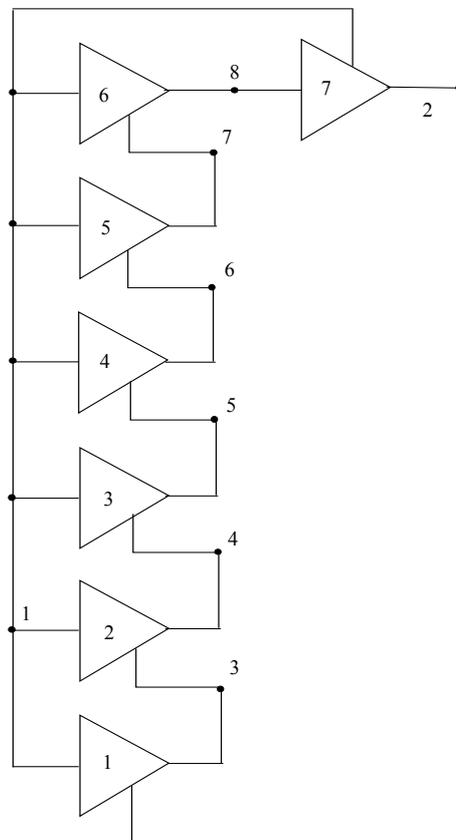


Рис. 3.30

Полная активная схема test1

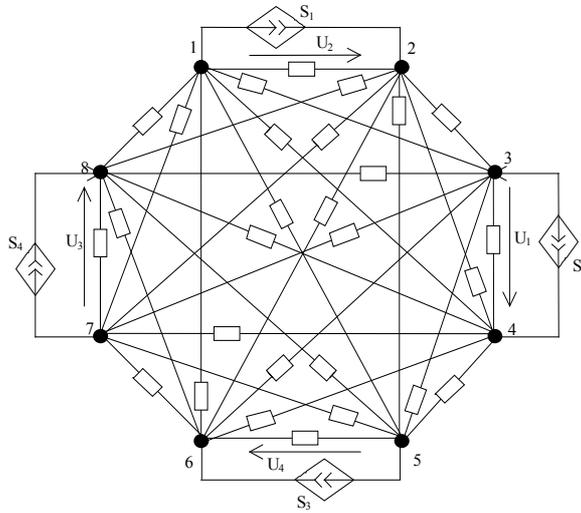


Рис. 3.31

Полная активная схема test2

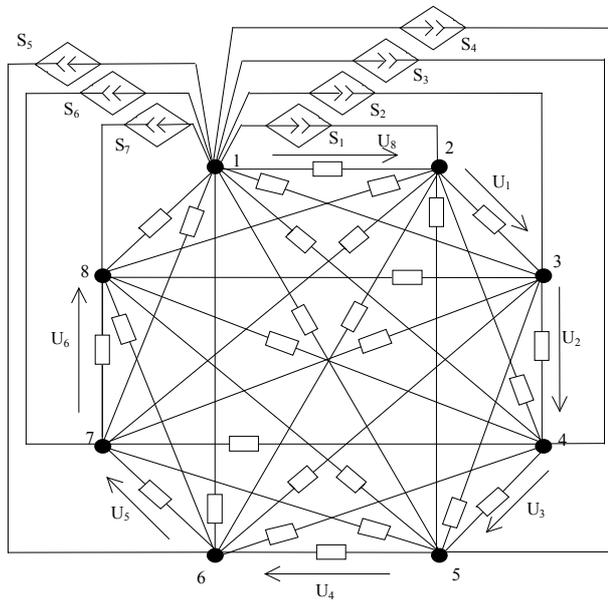


Рис. 3.32

Полная активная схема test3

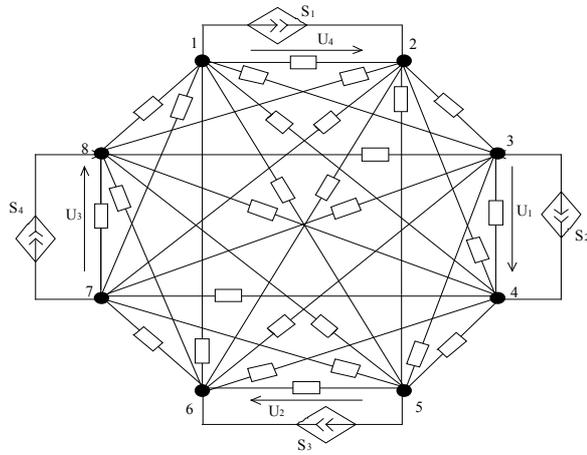


Рис. 3.33

Полная активная схема test4

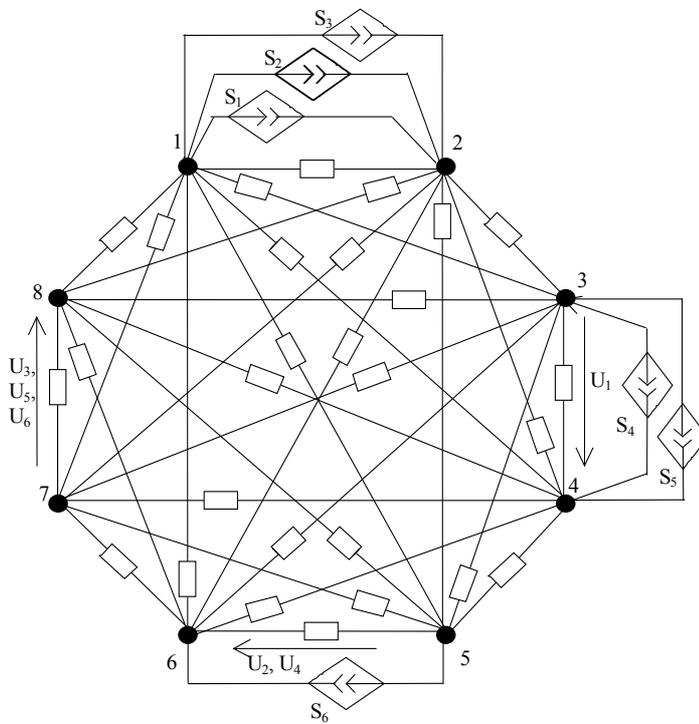


Рис. 3.34

В строках табл. 3.2 приведены количества операций, требуемых в выражениях определителей ПС с соответствующими активными подсхемами. Во втором, третьем и четвертом столбцах табл. 3.2 помещены показатели вложенных выражений схемных определителей, сформированных с помощью программы SYMBOL. Для сравнения в пятом и шестом столбцах этой таблицы указаны количества операций в развернутых выражениях при отображении рассматриваемых схем унисторными графами. Причем дубликации в этих выражениях сохранены, а в качестве базисного узла использован узел с номером 1.

Таблица 3.2

Сравнение показателей вложенных и развернутых выражений определителей ПС с ИТУН

Тип схемы	Вложенное выражение			Развернутое выражение	
	Умножения	Сложения	Вычитания	Умножения	Сложения и вычитания
test1	15559	26381	686	10080000	1439999
test2	18164	44442	63	5173245	739034
test3	15775	27480	595	10920000	1559999
test4	20537	33942	773	11289600	1612799

Необходимо отметить, что минимум операций вычитания достигается за счет некоторого увеличения сложности выражений. Чтобы убедиться в этом, достаточно получить выражение определителя схемы test2 с помощью модификации предложенного алгоритма, когда шаг 6 выполняется перед шагами 4 и 5. Для этого случая соответствующие показатели сложности выражения принимают значения: 10181, 17977 и 3339. Однако в определителях

оставшихся трех схем такое большое различие показателей конкурирующих выражений отмечается только для операций вычитания.

В табл. 3.3 приведены показатели сложности вложенных выражений определителей обсуждаемых четырех схем при их отображении унисторными графами и матрицами узловых проводимостей. В первом случае использовалась программа, реализующая разложение унисторного графа по ветвям и дугам [94], которую разработал Д.В.Шейн [113]. Для многократного сокращения числа дубликаций выполнялось первоочередное выделение параметров пассивных элементов [98]. Во втором случае была специально разработана программа на основе рекурсивного разложения Лапласа по строкам матрицы узловых проводимостей. Следует отметить, что такое разложение часто применяется за рубежом для формирования вложенных выражений ССФ сложных электрических цепей [131, 165, 166, 170]. Полученные выражения графовых и матричных определителей содержат дубликации, устранение которых весьма трудоемко [112, 170] и приводит, как правило, к увеличению количества операций умножения и сложения, что подтверждает сравнение табл. 3.2 и 3.3. Это та цена, которую приходится платить за безызбыточность выражений ССФ и их вычислительную устойчивость.

Таблица 3.3

Показатели различных вложенных выражений определителей ПС с ИТУН

Тип схе- мы	Вложенные выражения					
	на основе унисторного графа			на основе матрицы проводимостей		
	Умножения	Сложения	Вычитания	Умножения	Сложения	Вычитания
test1	6941	22327	2443	8659	14130	17227
test2	6399	21426	6193	8659	14136	17592
test3	13219	39582	6317	8659	14130	17227
test4	12382	46136	7563	8659	13448	16640

Данные табл. 3.2 и 3.3 в сочетании с данными табл. 2.2 и 2.3 убеждают в том, что достижение близкой к линейному закону зависимости числа операций от сложности схемы невозможно для пассивных и активных схем, имеющих полную топологическую структуру. Однако, как и в случае пассивных схем (см. табл. 2.6), ССФ для сложных активных схем, имеющих разреженную структуру, получают вполне обозримую форму.

3.6.2. Анализ схемы полосового фильтра на базе идеальных ОУ

Схема активного фильтра, изображенная на рис. 3.35, содержит 13 идеальных ОУ, 36 резисторов и 8 конденсаторов [169]. Полтора десятилетия эта схема служит “пробным камнем” для алгоритмов формирования ССФ [13, 102, 137, 150 - 152, 160, 163, 165]. При этом в качестве объекта оптимизации выступает передаточная ССФ по напряжению указанной схемы. Применение промежуточной модели в виде унисторного графа не позволило выполнить анализ схемы рис. 3.35 без ее деления на подсхемы с тремя внешними узлами, как показано на рис. 3.36, и использования правила половинного деления [102].

Объединение подсхем по способу наращивания слева-направо или справа-налево (см. рис. 3.36) было использовано во всех других упомянутых работах. В качестве методов формирования ССФ применялись: иерархические реализации сигнально-потокowego графа Коутса [169], сигнального графа Мэйсона [150]; символьные варианты метода 2 2-полюсника [160] и модифицированного узлового базиса [151, 152, 163], алгебраический метод декомпозиции матрицы узловых проводимостей [165]. Показатели сложности выражений ССФ полосового фильтра сведены в табл. 3.4 с указанием ссылок на соответствующие источники.

Таблица 3.4

Показатели сложности различных выражений передаточной ССФ по напряжению для тестовой схемы Старжика-Кончиковской

Вид операций	Порядковый номер выражения и ссылка на источник									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	[169]	[150]	[152]	[165]	[165]	[102]	[102]	[102]	[102]	[102]
Умножения	61	34	29	129	21	140	84	60	45	30
Вычитания	11	31	26	1	7	13	2	2	8	8
Деления	1	36	18	1	18	1	1	1	1	9
Сложения	27	18	18	67	25	66	41	41	26	22
Присваивания	26	56	52	1	26	1	1	1	26	23

Компьютерная реализация метода стягивания и удаления ветвей в программе SYMBOL обеспечила формирование передаточной ССФ по напряжению в виде единого выражения, то есть с единственной операцией присваивания, без деления схемы рис. 3.35 на подсхемы. Показатели сложности сгенерированного программой SYMBOL выражения, которое представлено на рис. 3.37, составили: 104 умножения, 11 вычитаний, 1 деление и 53 сложения. Таким образом, выражение на рис. 3.37 лишь незначительно уступает выражениям, сформированным на основе диакоптических формул (см. табл. 3.4).

Деление схемы полосового фильтра на подсхемы

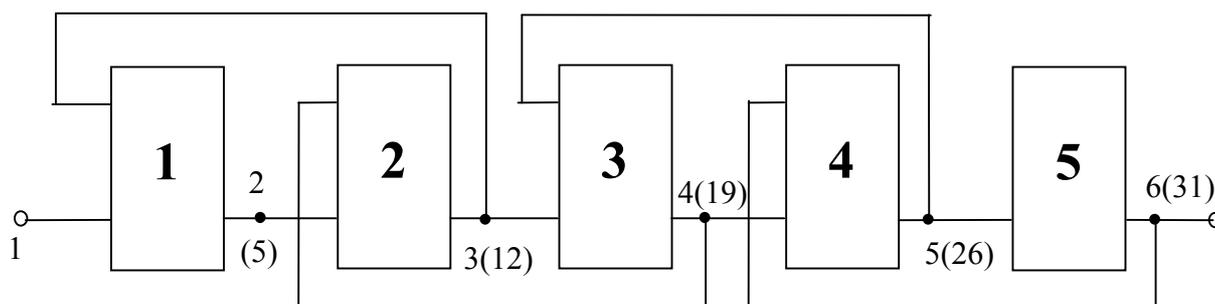


Рис. 3.36

Передаточная ССФ по напряжению для схемы на рис. 3.35

$$\Delta N / \Delta D = \frac{G1*(G34+G36)*G33*G29*C8*(G26+G28+G32)*G25*G21*C6*(G18+G20+G24)*G17*G13*C4*(G10+G12+G16)*G9*G5*C2*(G2+G4+G8)}{(G1+G3)*(((G11+G9)*(((G19+G17)*(((G27+G25)*((-G29*C8)*(G26*(G36+$$

$$\begin{aligned}
& (G34)*G33)+(G32*G29*G31+G28*C8*(G30+C7))*(G36*(G33+G35))))* \\
& (G24*G21*G23+G20*C6*(G22+C5))+(-G18*G36*(G33+G35)*G25*G29* \\
& (G26+G32+G28)*C8)*(-G21*C6)))*(G16*G13*G15+G12*C4*(G14+C3))+ \\
& (-G10*G17*G21*C6*(G24+G20+G18)*(G27+G25)*((-G29*C8)*(G26* \\
& (G36 + G34)*G33)+(G32*G29*G31+G28*C8*(G30+C7))*(G36*(G33+ \\
& G35))))*(-G13*C4)))*(G8*G5*G7+G4*C2*(G6+C1))+(-G2*G9*G13* \\
& C4*(G16+G12+G10)*(G19+G17)*(((G27+G25)*((-G29*C8)*(G26* \\
& (G36+G34)*G33)+(G32*G29*G31+G28*C8*(G30+C7))*(G36*(G33+ \\
& G35))))*(G24*G21*G23+G20*C6*(G22+C5))+(-G18*G36*(G33+G35)* \\
& G25* G29*(G26+G32+G28)*C8)*(-G21*C6)))*(-G5*C2))
\end{aligned}$$

Рис. 3.37

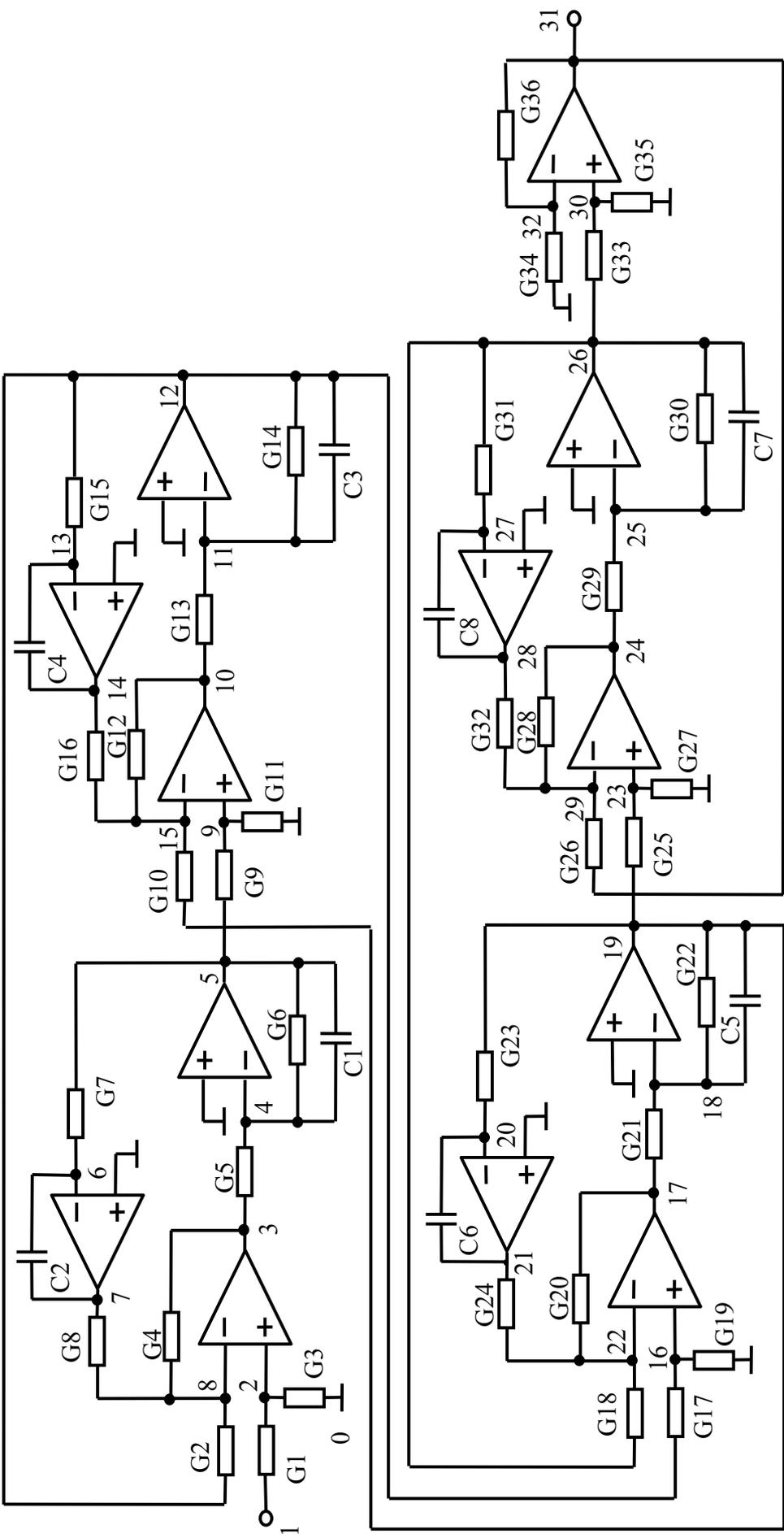


Рис. 3.35

Сравнение выражения, приведенного на рис. 3.37, с известными последовательностями выражений (ПВ), опубликованными в работах [150, 152, 163, 169], выявило опечатки и неточности, которые перечислены ниже:

1) в работе [169] (см. ПВ № 1 в табл. 3.4) пропущены знаки перед выражениями 17, 18, 21 и 24;

2) в работе [150] (см. ПВ № 2 в табл. 3.4) недостает одной проводимости в первых выражениях для подсхем 1 - 4 (см. рис. 3.36); опущены промежуточные выражения $H1(1,5)$, $H2(5,12)$ и т.д., что привело к существенному занижению показателей сложности ССФ по сравнению с показателями, приведенными в табл. 3.4;

3) в работе [163] (см. ПВ № 3 в табл. 3.4) пропущены знаки “минус” перед выражениями $f26$ и $f43$; выражения $f32$ и $f33$ - лишние; ошибочная ССФ была использована для вычисления чувствительности схемы, что привело к неверному результату;

4) в работе [152] (см. ПВ № 3 в табл. 3.4) содержатся избыточные выражения $P8(1)$ и $T8(1,1)$.

Для решения примеров, рассмотренных в подразделах 3.6.1. и 3.6.2., с помощью программы SYMBOL достаточно компьютера IBM PC/AT-386 с тактовой частотой 40 МГц. Затраты времени при получении символьного выражения определителя каждой из четырех полных схем с ИТУН (см. рис. 3.31 - 3.34) не превышали двух минут. Формирование ССФ полосового фильтра (см. рис. 3.35 и 3.37) потребовало 8 секунд. Следует отметить, что в случае анализа указанных схем использование на шаге 3 алгоритма (см. подраздел (3.5)) бисекции по трем и более узлам не только требует дополнительных затрат времени на поиск оптимального деления на подсхемы [31], но и приводит к избыточным операциям вычитания. Однако, если попытаться вместо идеальных ОУ на схеме рис. 3.35 включить ИТУН, то для получения ССФ этой схемы без применения одной из формул трехузловой бисекции [102, 108] не хватит ресурсов даже современных персональных компьютеров.

3.7. Выводы

В изложенном выше разделе универсальная методология формирования оптимальных выражений ССФ обобщена для схем с различными типами УИ и идеальными ОУ. К числу наиболее важных результатов относятся следующие.

Сформулированы топологические признаки вырождения схем с УИ и НУИ. Предложен комплекс топологических преобразований и упрощений, инвариантных к схемному определителю (см. табл. 3.1).

Разработаны топологические методы выделения параметров УИ, не требующие порядковой нумерации узлов схемы: 1) метод НУИ; 2) метод стягивания и удаления ветвей. В первом методе (см. формулу (3.1) и рис. 3.3) знак перед параметром выделяемого УИ всегда положителен, а ориентация выделенного УИ учитывается в ориентации замещающего его НУИ. Вторым методом (см. формулу (3.4)) предусматривается учет фактической ориентации УИ в схеме непосредственно в знаке перед его параметром, что создает условия для минимизации операций вычитания в формуле схемного определителя.

Предложены инженерные методики формирования ССФ, которые в отличие от известных решений используют минимальный набор базовых понятий, опираются на физические схемные представления и не нуждаются в каком-либо математическом аппарате. Данные методики применены для анализа ряда схем операционных преобразователей, содержащих 6 - 9 пассивных элементов и два УИ одинаковых или различных типов.

Показано, что формирование ССФ для схем указанной сложности требует рассмотрения, кроме исходной схемы, еще двух схем, полученных из нее простейшими преобразованиями согласно табл. 2.1: схемы числителя и схемы знаменателя. При некотором навыке построения более простых производных схем можно избежать и символьный анализ одной из схем указанной сложности занимает несколько минут. Это позволяет рекомендовать разработанные методики в качестве одного из обязательных компонентов

электротехнического образования, который необходим, в частности, для критического отношения к компьютерным экспериментам и к справочной литературе по проектированию электрических цепей [114].

Показано, что минимизация операций вычитания невозможна в традиционном матричном методе выделения параметров при зависимости знака от нумерации узлов схемы (см. табл. 3.3). Предложен матрично-топологический метод выделения параметров (см. формулу (3.5)), в котором для получения САД используются матричные операции, а нахождение знака выполняется путем сравнения указателей удаляемых строки и столбца, то есть по существу топологически, без операций сложения порядковых номеров строк и столбцов.

Введено понятие ЭАС, которая состоит из НУИ. Доказано, что знак определителя невырожденной ЭАС равен знаку определителя полного дерева Коутса. Предложена общая формула выделения НУИ и рассмотрены специальные случаи ее применения с учетом топологических особенностей ЭАС, позволяющие избежать использования трудоемкой процедуры нахождения знака определителя ЭАС.

Исследованы случаи вырождения УИ. Показано, что использование преобразования вырожденных ИТУН и ИНУТ в квазипассивные двухполюсники, имеющие статус y - и z -ветвей, преобразования выделением висячих ИТУН, ИНУН и ИТУТ, а также вырожденных ИНУН и ИТУТ, значительно упрощает формирование схемного определителя.

Обосновано применение правил формирования оптимальных по вычислительной сложности выражений ССФ для схем с УИ. Решена задача минимизации операций вычитания в выражениях определителей активных схем. Рассмотрены алгоритм и программа формирования ССФ (имя SYMBOL), рабочей информацией для которой является непосредственно исходная схема и производные от нее схемы. Выполнение всех операций на схемном уровне и

возможность выделять параметры любого типа облегчают получение оптимальных, символьно-численных и приближенных выражений ССФ.

Сформированы оптимальные выражения для определителей полных восьмиузловых схем с ИТУН. Показано, что оптимальные выражения требуют во много раз меньше операций вычитания по сравнению с выражениями, полученными традиционными матричными и графовыми методами (см. табл. 3.2 и 3.3). Приведено безызыточное выражение ССФ для схемы полосового фильтра на базе 13 идеальных ОУ (см. рис. 3.35). Показано, что это выражение приближается по сложности к выражениям, полученным на основе диакоптических методов (см. табл. 3.4). Выявлены и устранены неточности в некоторых из ранее опубликованных (1986 - 1998 гг.) выражениях ССФ указанной тестовой схемы.

Дальнейшее развитие универсальной методологии символьного анализа заключается в детализации третьего шага алгоритма формирования оптимальных выражений ССФ (см. подраздел 3.5). Необходимость этого объясняется тем, что наличие в схеме неидеальных УИ многократно усложняет ее анализ по сравнению со схемой на базе идеальных ОУ. Символьный анализ сложных электрических цепей по частям обсуждается в следующем разделе.

4. ФОРМИРОВАНИЕ ССФ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ДЕЛЕНИЕМ ИХ НА ЧАСТИ

Отправной точкой предлагаемого здесь исследования являются формулы Фойснера (1.4) и (1.5). Эти формулы являются частными случаями многоузловой бисекции [108]. Напомним, что i -бисекция оказывается возможной, когда схема i -разделимая, то есть удаление по меньшей мере i узлов с инцидентными ветвями делает ее несвязной. При этом предполагается,

что между подсхемами отсутствуют управляющие связи. Получение параметров подсхемы, являющихся сомножителями формул бисекции, в случае $i > 2$ через схемные определители позволило бы дать схемное решение задаче формирования ССФ, избежав применения матриц, графов или теоретико-множественных объектов, служащих промежуточными математическими моделями и традиционно используемых для анализа схем по частям [13, 14, 18, 102, 124, 125, 127, 131, 132, 150 - 152, 160, 165, 169].

4.1. Формула трехузловой бисекции

Обратимся к формуле бисекции пассивной схемы по трем узлам a , b и c , которую предложил Ю.П.Галямичев (см. формулу (1.7)). В этой формуле веса путевых 2-деревьев с кодом вида (ab,c) являются слагаемыми числителя передаточной ССФ [96]. При этом независимый источник подсоединяется между узлами a и c , а отклик снимается между узлами b и c (см. табл. 2.1). Следовательно, сомножитель вида (ab,c) в формуле (1.7) может быть найден как определитель схемы, которая образована из соответствующей подсхемы путем подсоединения НУИ (ac,bc) . Параметр НУИ, как и в случае нахождения числителя ССФ, принимается равным единице (см. подраздел 2.1.).

Таким образом, все сомножители для формулы (1.7), также как для формул (1.4) и (1.5), теперь можно получать через схемные определители. Подключение НУИ позволяет представить внешние характеристики подсхем в виде производных схем, избежав применения в диакопнике объектов, имеющих математическую природу, и порождаемых вычислительных трудностей (см. подраздел 1.2.). В этом состоит схемный подход в диакопнике. Следует подчеркнуть, что обозначения внешних характеристик вида (ab,c) в формуле (1.7) теперь рассматриваются как указатели на способ подсоединения НУИ.

Применять формулу (1.7), в отличие от формул (1.4) и (1.5), для анализа схем с УИ нельзя, поскольку существенен порядок узлов (ориентация НУИ) в

обозначениях внешних характеристик. Обобщение формулы (1.7) требует согласования характеристик подсхем путем выбора одного из внешних узлов в качестве базисного узла. Обозначение базисного узла для определенности указывается первым в паре номеров до запятой. Пусть таким узлом будет узел c . При этом последнее слагаемое формулы (1.7) необходимо представить в виде двух слагаемых с учетом тождества [9]

$$\Delta(a,b) = \Delta(ca,b) + \Delta(cb,a) . \quad (4.1) \text{ Это}$$

влечет за собой получение обобщенной формулы

$$\begin{aligned} \Delta = & \Delta_1(a,b,c) \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_2(a,b,c) + \Delta_1(cb,a) \Delta_2(b,c) + \\ & + \Delta_1(ca,b) \Delta_2(a,c) + \Delta_1(ab,c) \Delta_2(ca,b) + \Delta_1(ba,c) \Delta_2(cb,a). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поскольку обозначение полученной формулы вида (ab,c) , как и модифицированной формулы (1.7), также предполагает не выявление путевых 2-деревьев, а подсоединение НУИ, то формула (4.2) оказывается более общей, чем аналогичная формула бисекции унисторного графа [112]. Действительно, теперь каждая из подсхем может содержать не только u -ветви и ИТУН, но и линейные элементы любого другого типа. Обратим внимание на то, что формулы бисекции унисторного графа существенно усложняются, если его базисный узел не является одним из внешних узлов [18]. Схемный подход всегда позволяет выбрать один из узлов бисекции в качестве базисного узла. Главным достоинством этого подхода является то, что при получении внешних характеристик подсхем топологическими методами выделения параметров (см. подразделы 3.2. и 3.3.) исключается образование дубликаций, что неизбежно в случае других подходов.

Нахождение определителей производных схем, содержащих дополнительный невырожденный НУИ, является обычно более сложной задачей, чем нахождение определителей схем, образованных объединением двух или трех узлов подсхемы (см. пункты 3.2.4., 3.2.5., 3.3.3. и 3.3.4.). Это имеет существенное значение при формировании ССФ без помощи компьютера. Уменьшить количество производных схем, содержащих

дополнительный НУИ, с шести до четырех можно путем модификации формулы (4.2) с учетом тождества (4.1). Получаемая при этом формула избыточна на уровне объединения внешних характеристик подсхем и имеет вид [102]

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2(a,b,c) + \Delta_1(b,c) \Delta_2(a,c) - \Delta_1(ba,c) \Delta_2(ab,c) - \\ - \Delta_1(ab,c) \Delta_2(ba,c) + \Delta_1(a,c) \Delta_2(b,c) + \Delta_1(a,b,c) \Delta_2, \quad (4.3)$$

Иерархическая бисекция схемы предусматривает повторную бисекцию каждой подсхемы с применением формул (1.4), (1.5), (1.7), (4.2) или (4.3). Единственным ограничением к применению этих формул (далее, формул схемной бисекции) является размещение одноименных генератора и приемника в различных подсхемах. Формулы схемной бисекции не содержат операций деления, то есть оказываются более предпочтительными для символического анализа сложных схем по сравнению с методами схемной диакоптики [117, 119], которые предусматривают преобразование подсхем в эквивалентный многомерный генератор без использования матриц или графов, но требуют операций деления в формулах схемных преобразований.

Опыт показывает, что формулы схемной бисекции легко программируются на любом алгоритмическом языке, допускающим рекурсивные вызовы подпрограмм [102, 131]. Вместе с тем такое непосредственное использование этих формул приводит к необходимости многократной обработки подсхем второго, третьего и т.д. уровней иерархии. Как показано в подразделе 2.5., наибольший объем излишних выкладок приходится на подсхемы минимальной (для данной схемы) размерности, параметры которых определяются на последнем (самом нижнем) уровне иерархии. Исключить избыточные вычисления удастся более сложной организацией иерархического анализа, благодаря представлению ССФ в виде последовательности выражений (ПВ). При этом достигается существенное уменьшение вычислительной сложности ССФ по сравнению с использованием единого выражения [102].

Процессы анализа схемы с помощью рекурсивной бисекции и попарного объединения подсхем до получения параметров исходной схемы взаимно обратны. Поэтому иерархический анализ в первом случае называется нисходящим, а во втором случае - восходящим [169]. В методах схемной диакоптики М.А.Шакирова [117, 119] реализуется восходящий анализ, поскольку каждая подсхема обрабатывается однократно и далее приходится иметь дело только с эквивалентными многомерными генераторами подсхем. Целью данного раздела является обобщение формул (1.4), (1.5) и (4.3) для иерархического нисходящего и восходящего формирования ССФ сложных электрических цепей.

4.2. Понятие двоичного вектора подсхемы и обобщение матричного метода бисекции

Для обоснования топологического метода бисекции схемы используем матричный подход. Случай деления схемы по трем узлам рассмотрен в работе [131], где определитель матрицы узловых проводимостей схемы получается через миноры матриц подсхем. Соответствующая диакоптическая формула, как и формула (4.3), содержит шесть слагаемых, но сомножителями в них являются определители матриц проводимостей, которые образованы из матриц проводимостей подсхем путем удаления строк и столбцов, относящихся к общим узлам этих подсхем. Использование матричного метода обуславливает появление дубликаций не только на уровне слагаемых формулы, но и внутри ее сомножителей, что, в частности, затрудняет формирование упрощенных выражений ССФ [140].

Вывод матричной формулы бисекции строится на разложении определителя матрицы по строкам и столбцам. Это позволяет, хотя и ценой трудоемких выкладок, получать формулы бисекции схемы по четырем и более узлам [132]. Вместе с тем в задачах формирования ССФ сложных

интегральных схем необходим общий алгоритм построения диакоптических формул для произвольного числа узлов бисекции. Здесь предлагается более простое решение, которое основано на теореме об определителе суммы двух матриц, доказанной В.П.Сигорским [57, 58].

Определитель суммы двух матриц α и β порядка m находится по формуле

$$\Delta = \sum_{k=0}^m \sum M_k^\alpha A_k^\beta, \quad (4.4) \text{ где } M_k^\alpha$$

- минор k -го порядка определителя матрицы α , A_k^β - алгебраическое дополнение (АД) соответствующего минора k -го порядка определителя матрицы β . В этой формуле $\sum M_k^\alpha A_k^\beta$ - сумма произведений всех возможных миноров и АД соответствующих миноров k -го порядка. Знак A_k^β положителен (отрицателен) при четной (нечетной) сумме номеров строк и столбцов, удаленных для образования этого АД.

Структура матрицы схемы, подлежащей бисекции, изображена на рис. 4.1. Заштрихованные части матриц α и β , отображающие подсхемы, содержат параметры элементов этих подсхем. Заштрихованная дважды часть матрицы $\alpha+\beta$, отображающей объединенную схему, находится на пересечении строк и столбцов, соответствующих общим узлам подсхем. Следует подчеркнуть, что базисный узел схемы здесь и далее считается принадлежащим обоим подсхемам. Сопоставление формулы (4.4) и рис. 4.1 показывает, что при нахождении определителя матрицы схемы достаточно учитывать миноры и АД, соответствующие общим узлам подсхем, поскольку остальные миноры и АД равны нулю. Это обусловлено наличием строк и столбцов в матрицах α и β , которые состоят из элементов, равных нулю (см. незаштрихованные части этих матриц на рис. 4.1).

Значение (ненулевые) миноры и АД удобно задавать двоичными векторами (ДВ) размерности $2n$, где n - число общих узлов подсхем, не считая базисного узла. Первая (вторая) половина ДВ, содержащая n элементов, соответствует строкам (столбцам) матрицы подсхемы

Бисекция матрицы

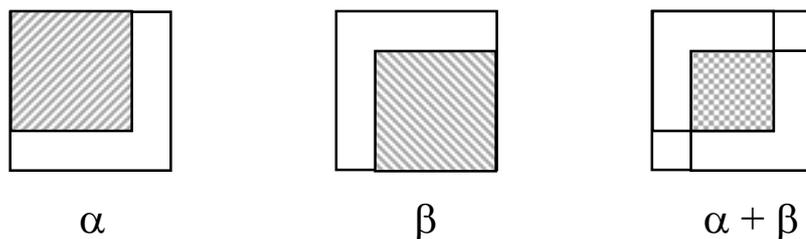


Рис. 4.1

α или β в заштрихованной дважды части матрицы схемы $\alpha + \beta$ (см. рис. 4.1). Причем удаление строки или столбца отмечается в ДВ единицей. Если данные строка или столбец сохраняются в матрице подсхемы, то это отображается в соответствующей позиции ДВ нулем. Положение или позиции элементов в каждой из половин ДВ задается упорядоченным множеством внешних узлов подсхемы, исключая базисный узел. Обозначениями позиций ДВ служат обозначения узлов схемы.

Ниже приведено двоичное отображение упомянутой выше [131] формулы матричной бисекции для трех узлов:

$$\begin{array}{cccccc}
 1) & 0000 & ; & 2) & 0101 & ; & 3) & 0110 & ; & 4) & 1001 & ; & 5) & 1010 & ; & 6) & 1111 . \\
 & 1111 & & & 1010 & & & 1001 & & & 0110 & & & 0101 & & & 0000
 \end{array}$$

Таким образом, слагаемые этой формулы представлены шестью парами ДВ. Векторы каждой пары взаимно дополняют друг друга (как минор и соответствующий минор), отображая сомножители диакоптической формулы. Упорядоченное множество общих (или внешних) узлов подсхем, являющееся обозначением позиций ДВ, имеет вид: (a, b, a, b) или кратко $abab$. Здесь, также как в формулах 4.2 и 4.3, предполагается, что узлы a и b являются общими узлами подсхем.

В силу одинаковой четности номеров строк и столбцов взаимно дополнительных миноров [58] информацию о знаке слагаемого можно получить из расположения единиц в одном из векторов пары. Принимается во

внимание порядковый номер единицы в той или иной половине ДВ. Положительный (отрицательный) знак выбирается в случае четной (нечетной) суммы порядковых номеров позиций, содержащих единицы, в ДВ.

Формирование множества ДВ подсхемы не встречает затруднений. Самое простое решение состоит в том, чтобы перебирать $2n$ -разрядные двоичные числа (от $2n$ нулей до $2n$ единиц) и выбирать те из них, которые содержат одинаковое количество единиц в первой и второй половинах разрядов. Это свойство, вытекающее из формулы (4.4) и определения ДВ, позволяет получить число ДВ подсхемы в виде

$$l = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2, \quad (4.5) \text{ где } \binom{n}{i}$$

- число сочетаний из n элементов по i .

Имея множество ДВ для одной из подсхем, можно легко получить ДВ второй подсхемы, применив операцию дополнения двоичного числа. Это значит, что единицы в позициях ДВ заменяются нулями и наоборот. Следовательно, общая формула бисекции может быть представлена в виде

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (-1)^{\sigma_i} \Delta_1(b_i) \Delta_2(\bar{b}_i), \quad (4.6) \text{ где } \sigma_i -$$

знак i -го слагаемого, определяемый по ДВ b_i , $\Delta_1(b_i)$ - минор, соответствующий b_i , матрицы первой подсхемы; $\Delta_2(\bar{b}_i)$ - минор, соответствующий дополнению ДВ b_i , матрицы второй подсхемы.

4.3. Понятие минора подсхемы и топологический метод бисекции

Формула (4.6), в отличие от формулы (4.4), учитывает структуру матрицы схемы, подлежащей бисекции, что исключает рассмотрение слагаемых, у которых один или оба сомножителя равны нулю. Удаление строк и столбцов в матрице наглядно отображается подсоединением нораторов и нуллаторов к соответствующим узлам схемы [131]. Это позволяет выполнить бисекцию на схемном уровне и свести раскрытие миноров определителей матриц к

разложению определителей нораторно-нулляторных схем [132]. Однако такие схемы не могут быть проанализированы топологическим методом, поскольку при использовании нуллора утрачивается информация о знаке. Вместе с тем это не мешает применить матричный метод, для которого существенна нумерация узлов схемы [157].

С другой стороны, НУИ можно рассматривать как ориентированный нуллок [108, 157]. Следовательно, операция удаления строки и столбца в матрице эквивалентна операции подсоединения НУИ на схеме. При использовании НУИ для анализа схем по частям в понятие ДВ подсхемы вкладывается новое содержание. Единицы в первой (второй) половине элементов ДВ соответствуют конечным узлам подключения генераторов (приемников) НУИ. Базисный узел схемы, который не отражается в ДВ, является начальным узлом всех без исключения генераторов и приемников НУИ. Очевидно, двоичное отображение формулы (4.3) совпадает с приведенным выше отображением формулы (4.6) при $n=2$.

Обобщение матричного метода бисекции в случае $n>2$ позволяет обобщить формулу (4.3) путем схемной интерпретации формулы (4.6). Так называемые параметры подсхемы, используемые в формуле (4.3), соответствуют минорам определителя матрицы этой подсхемы в формуле (4.6). Отсюда по аналогии с минором определителя матрицы можно ввести понятие “минор определителя схемы” или просто “минор схемы”. Использование термина “минор подсхемы” более предпочтительно, поскольку этот термин отражает связь топологического метода с матричным методом в отличие от более общего понятия “параметр подсхемы”.

Для обозначения миноров схемы или подсхемы может применяться символика, принятая для обозначения миноров матрицы [58]. Нетрудно перейти от обозначений миноров подсхемы с десятичными индексами к ДВ и обратно. Важно, что множество ДВ является унифицированным отображением миноров подсхем с одним и тем же числом узлов. С учетом изложенного выше

минор подсхемы, заданный некоторым ДВ, равен определителю схемы, которая получена из этой подсхемы в результате подсоединения НУИ согласно ее ДВ. При использовании матричной бисекции ССФ не зависит от пар нораторов и нуллаторов в нуллорах, то есть любые два норатора и любые два нуллатора могут чередоваться [157]. В отличие от нуллоров НУИ должны быть пронумерованы в соответствии с их очередностью в ДВ, а именно, i -я по порядку единица в первой (второй) половине ДВ соответствует генератору i (приемнику i) i -го НУИ. Все шесть миноров подсхемы с тремя внешними узлами ($n=2, l=6$) изображены на рис. 4.2.

Подобно определителям миноры схемы и матрицы эквивалентны. Однако выражения определителя и миноров матрицы схемы, представленные в развернутом виде, избыточны (см. подраздел 1.2.). Применение одного из топологических методов выделения параметров (см. подразделы 3.2. и 3.3.) позволяет не только избежать построения матриц, но и исключить появление дубликаций в выражениях

Миноры подсхемы с тремя внешними узлами

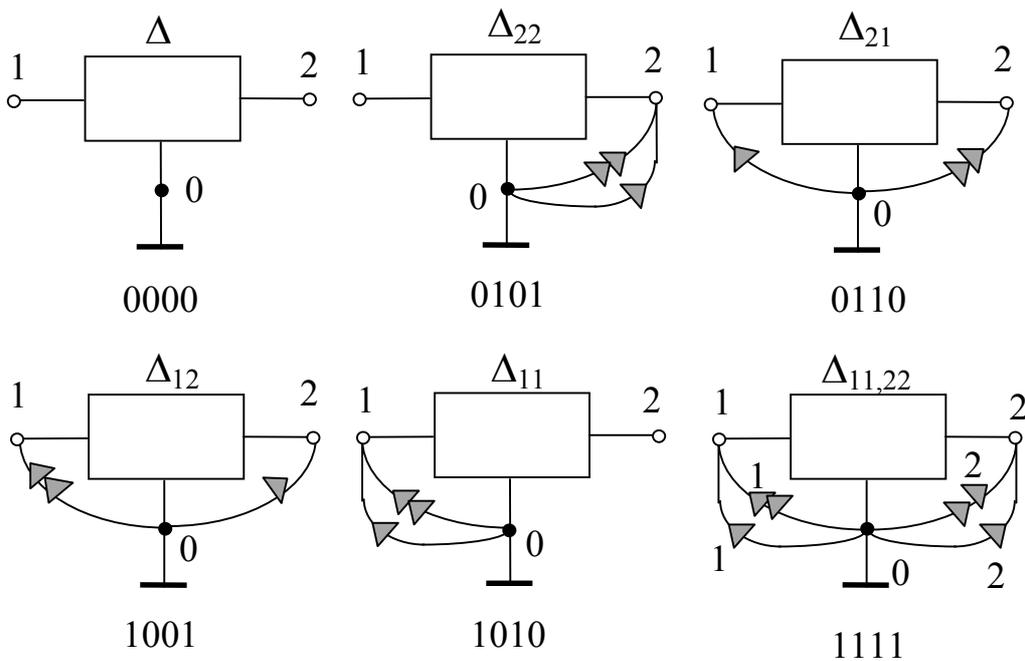


Рис. 4.2

определителя и миноров подсхемы, являющихся сомножителями диакоптических формул. Для нахождения знака слагаемых этих формул может быть использовано, как в формулах (4.4) и (4.6), алгебраическое правило, предусматривающее порядковую нумерацию общих узлов подсхем. Недостатки этого правила уже обсуждались в подразделах 1.5. и пункте 3.3.1.

4.4. Топологическое правило нахождения знака при объединении подсхем

В первую очередь следует объяснить, почему слагаемые формулы (4.6) при $n > 1$ имеют как положительные, так и отрицательные знаки. Дело в том, что результатом удаления строк и столбцов в матрицах α и β , а также последующего сложения этих матриц (см. рис. 4.1), может быть матрица $\alpha + \beta$, не являющаяся квазидиагональной матрицей [10]. Для того, чтобы представить определитель матрицы $\alpha + \beta$ в виде произведения двух сомножителей, каждый из которых содержит элементы только одной из матриц, необходимо выполнить перестановку некоторых строк и столбцов.

Нетрудно убедиться, что число перестановок строк и столбцов, требуемое для такого преобразования матрицы схемы после удаления i -й строки и j -го столбца в матрице α или β , находится по формулам соответственно $r' = n - i$ и $r'' = n - j$. Отсюда следует, что сумма $i + j$ оказывает на знак соответствующего слагаемого формулы (4.6) такое же влияние как сумма $r' + r''$, поскольку число $2n$ всегда четное. Преобразования матрицы α (согласно ДВ) или β (согласно дополнению ДВ) требуют суммирования $r' + r''$ для каждой пары номеров строк и столбцов. В силу одинаковой четности номеров строк и столбцов взаимно дополнительных миноров [58] количества перестановок в одной из матриц α или β достаточно для приведения матрицы $\alpha + \beta$ к квазидиагональному виду. Это доказывает алгебраическое правило нахождения знака, которое используется в формуле (4.6).

С другой стороны, знак слагаемого при классическом разложении определителя матрицы обусловлен четностью числа инверсий в подстановке, образованной номерами строк и столбцов, на пересечении которых находятся выбранные элементы [58]. Следует подчеркнуть, что четность числа инверсий соответствует четности числа перестановок строк и столбцов, необходимому для приведения матрицы этого слагаемого, которая содержит только выбранные элементы, к диагональной форме. Таким образом, вместо установления четности числа перестановок строк и столбцов в матрице $\alpha + \beta$, полученной путем удаления строк и столбцов в матрицах α и β , достаточно установить четность числа инверсий в подстановке, первая (вторая) строка которой образована номерами удаленных строк (столбцов). Условимся считать, что формирование подстановки начинается с номеров строк и столбцов, соответствующих матрице β второй подсхемы.

Нахождение числа инверсий σ_i в подстановке и вычисление знака i -го слагаемого как $(-1)^{\sigma_i}$ предлагается заменить разложением определителя ЭАС, которая образована в результате объединения НУИ, соответствующих ДВ сомножителей этого слагаемого. Для образования ЭАС нумерация НУИ, соответствующих первой подсхеме, должна продолжать нумерацию НУИ второй подсхемы так, что генератор i и приемник i НУИ с номером i занимают i -ю пару из незаполненных очередных позиций в подстановке, образованной генераторами и приемниками. Такое требование вытекает из определения минора подсхемы, для получения которого используется порядковая нумерация подсоединяемых НУИ.

Имеет место изоморфное соответствие между номерами строк (столбцов) и узлами подсоединения генераторов (приемников) НУИ в ЭАС. Как следствие, число инверсий в подстановке, образованной из номеров узлов, равно числу инверсий в подстановке из номеров генераторов и приемников НУИ. Это доказывает топологическое правило, согласно которому определитель ЭАС, равный 1 или -1 в зависимости от четности или нечетности

числа инверсий в подстановке, будет соответствовать положительному или отрицательному слагаемому в формуле (4.6). Используя понятие минора подсхемы, схемный определитель можно найти по топологической формуле

$$\Delta = \sum_{i=1} \delta_i \Delta_1(b_i) \Delta_2(\bar{b}_i), \quad (4.7) \text{ где } \delta_i -$$

опредетитель ЭАС, которая образована в результате объединения НУИ, соответствующих ДВ b_i и его дополнению \bar{b}_i ; $\Delta_1(b_i)$ - минор первой подсхемы, соответствующий b_i ; $\Delta_2(\bar{b}_i)$ - минор второй подсхемы, соответствующий \bar{b}_i .

4.5. Формула четырехузловой бисекции

Применим выражение (4.7) для получения формулы бисекции по четырем узлам ($n=3$). Схема, представленная в виде двух подсхем, изображена на рис. 4.3.

Схема, образованная двумя подсхемами с четырьмя внешними узлами

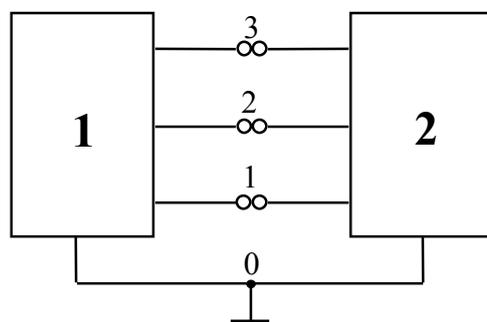


Рис. 4.3

Размерность ДВ подсхем в этом случае будет равна $2n=6$. Перебирая двоичные числа от 000000 до 111111, пропускаем те из них, у которых количество единиц в первых трех позициях (первой триаде) отличается от числа единиц в четвертой, пятой и шестой позициях вместе взятых (второй триаде). Отсюда получается двадцать ДВ подсхемы с четырьмя внешними узлами ($l=20$): 1) 000000; 2) 001001; 3) 001010; 4) 001100; 5) 010001; 6) 010010; 7) 010100; 8) 011011; 9) 011101; 10) 011110; 11) 100001; 12) 100010; 13) 100100;

14) 101011; 15) 101101; 16) 101110; 17) 110011; 18) 110101; 19) 110110; 20) 111111. Обозначения позиций этих ДВ имеют вид: 123123 (см. рис. 4.3).

Перечисленные ДВ можно рассматривать как двоичные отображения первых сомножителей в выражении (4.7), относящиеся к первой подсхеме. Следовательно, дополнения этих ДВ будут являться ДВ миноров второй подсхемы, соответствующих вторым сомножителям в выражении (4.7). Совместные пары ДВ, образующие формулу четырехузловой бисекции, перечислены ниже: 1) (1,20); 2) (2,19); 3) (3,18); 4) (4,17); 5) (5,16); 6) (6,15); 7) (7,14); 8) (8,13); 9) (9,12); 10) (10,11); 11) (11,10); 12) (12,9); 13) (13,8); 14) (14,7); 15) (15,6); 16) (16,5); 17) (17,4); 18) (18,3); 19) (19,2); 20) (20,1).

Для перехода от ДВ к минорам подсхем генераторы и приемники НУИ нумеруются согласно следованию единиц в ДВ. Например, из ДВ 011110 получаем 012120, что означает подсоединение к соответствующей подсхеме двух НУИ: НУИ-1 (02,01) и НУИ-2 (03,02) (см. рис. 4.2 и 4.3). Напомним, что генератор и приемник, образующие некоторый НУИ, имеют одинаковые номера.

Знак пары совместных ДВ определяется на основе так называемых нумерованных ДВ, которые получаются путем сквозной нумерации генераторов и приемников НУИ сначала во второй, а затем в первой подсхемах. Например, для нахождения знака слагаемого (3,18) от ДВ 001010 и 110101 переходим к нумерованным ДВ 003030 и 120102. Далее поступаем в соответствии с топологическим правилом: нумерованные ДВ складываются, образуя вектор 123132. Триады этого вектора формируют подстановку $123 / 132$, которая имеет одну инверсию, то есть является нечетной. Следовательно, знак слагаемого (3,18) в формуле четырехузловой бисекции отрицательный. Аналогично поступая в случае других слагаемых этой формулы, убеждаемся, что, кроме третьего слагаемого, отрицательные знаки имеют слагаемые с номерами 5, 7, 9, 12, 14, 16 и 18.

4.6. Сравнение формул схемной бисекции с формулами, реализующими методы k-деревьев и Д-деревьев

Предложенный выше метод схемной бисекции или, точнее, топологический метод ДВ (метод миноров подсхем) предусматривает использование диакоптических формул, число слагаемых в которых равно числу миноров подсхемы, то есть количеству ДВ. Для оценки вычислительной сложности формул бисекции важно знать, как зависит число миноров подсхемы от числа ее внешних узлов. Расчеты по формуле (4.5) для n от 2 до 9 приводятся во второй строке табл.4.1. Следует указать на то, что множество ДВ несопоставимо количественно с содержащим его множеством двоичных чисел, насчитывающим 2^{2n} элементов. Так, в случае $n=9$ последнее множество включает 262144 элемента. Поэтому, в частности, для ссылок на ДВ целесообразно применять их порядковые номера, а не десятичное представление соответствующего двоичного числа.

Таблица 4.1

Количество миноров подсхем и Д-деревьев графов подсхем

Число внешних узлов	3	4	5	6	7	8	9	10
Число миноров подсхемы	6	20	70	252	924	3432	12870	48620
Число Д-деревьев подграфа	6	23	104	537	3100	19693	136064	1013345

Бисекция схемы в случаях $n \geq 2$ требует при образовании миноров подсхем выполнять операции как объединения внешних узлов с базисным узлом, что соответствует выделению НУИ, так и подсоединения невырожденных НУИ (см. рис. 4.2). В этой связи не выдерживают критики результаты работы [51, с.

128-133] относительно выделения параметров активных трех- и четырехполюсника в составе линейной электронной схемы. Приведенные в указанной работе формулы бисекции содержат только слагаемые, обусловленные объединением внешних узлов подсхем с базисным узлом схемы. Таких слагаемых значительно меньше, чем слагаемых, подлежащих учету в правильных формулах бисекции (см. табл. 4.1 при $n=3$ и $n=4$). Для случая, изображенного на рис. 4.3 (пусть вторая подсхема - активный трехполюсник не имеет непосредственного соединения с базисным узлом) в формуле бисекции из [51, с. 128] присутствуют только 1, 2, 6, 10, 11, 15 и 19-е слагаемые. Слагаемое с номером 20 в данном случае отсутствует справедливо, поскольку вторая подсхема несвязна. При $n=4$ формула бисекции [51, с. 129] содержит 15 слагаемых из необходимых 69 слагаемых.

К числу наиболее исследованных диакоптических методов символьного анализа относится метод Д-деревьев, предусматривающий отображение схемы унисторным графом [13, 14, 18]. Этот метод был реализован в наиболее эффективных отечественных программах формирования полиномиальных коэффициентов ССФ электронных схем в сотни узлов и элементов [124, 125, 127]. Интересно отметить, что до середины 80-х годов аналогичные по эффективности программы за рубежом не были разработаны [169]. Д-деревья являются параметрами унисторного графа подсхемы. Количество Д-деревьев [13, 18] подсхем с n от 2 до 9 приведены в третьей строке табл. 4.1. Данные этой таблицы показывают, что метод Д-деревьев оказывается неконкурентоспособным с методом ДВ по крайней мере в случае сильно связанных схем.

Достоинством метода Д-деревьев является то, что знаки перед слагаемыми диакоптических формул всегда положительные. Однако наличие в унисторных графах активных схем дуг одного веса, но с разными знаками, приводит к образованию дубликаций как на уровне построения Д-деревьев подсхем, так и на уровне их объединения [108]. Диакоптика миноров подсхем отличается тем,

что минору одной подсхемы соответствует один и только один минор другой подсхемы, а каждый минор является сомножителем одного и только одного слагаемого формулы бисекции (4.7). Для Д-деревьев такая зависимость не имеет места, поскольку Д-дерево графа одной подсхемы оказывается в общем случае совместным с несколькими Д-деревьями графа другой подсхемы. Это приводит к значительному увеличению числа слагаемых в формуле бисекции по сравнению с числом Д-деревьев подсхем. Например, для $n=2$ и $n=3$ формулы бисекции содержат соответственно 7 и 50 слагаемых [13], что больше числа Д-деревьев (см. табл. 4.1). С увеличением n разрыв между числом слагаемых и числом Д-деревьев комбинаторно увеличивается, что требует использования алгоритмов свертки диакоптической формулы путем вынесения за скобки весов общих Д-деревьев [13, 14, 124, 125]. Необходимо также иметь в виду, что реальные возможности современных персональных компьютеров таковы, что максимальное количество внешних узлов подсхемы для метода Д-деревьев не может превышать семи [14].

Уменьшить число слагаемых в формуле бисекции по сравнению с методом Д-деревьев позволяет разложение определителя унисторного графа по путям между базисным узлом и одним из общих узлов подграфов [62]. Однако неформальная реализация этой идеи с помощью громоздкой символики уязвима для критики. Например, в формуле четырехузловой бисекции [62, с. 85] восемь слагаемых в третьей и четвертой строках снизу являются лишними, поскольку ранее учитывались в предыдущих слагаемых. В этом нетрудно убедиться, сопоставив каждому слагаемому формулы бисекции некоторое множество k -деревьев (см. подраздел 1.5.). Исправленная формула четырехузловой бисекции содержит 28 слагаемых вместо 44. Представление этой формулы в виде k -деревьев подграфов приводится ниже:

- 1) (03,1,2) (0,3); 2) (0,3) (03,1,2); 3) (03,12) (01,2,3);
- 4) (01,2,3) (03,12); 5) (03,12) (0,2,31); 6) (0,2,31) (03,12);
- 7) (03,21) (02,1,3); 8) (02,1,3) (03,21); 9) (03,21) (0,1,32);
- 10) (0,1,32) (03,21); 11) (013,2) (0,1,3); 12) (0,1,3) (013,2);

13) (023,1) (0,2,3); 14) (0,2,3) (023,1); 15) (0123) (0,1,2,3);
 16) (0,1,2,3) (0123); 17) (01,2,3) (0,13) ; 18) (0,13) (01,2,3);
 19) (01,3) (0,13,2); 20) (0,13,2) (01,3); 21) (02,1,3) (0,23);
 22) (0,23) (02,1,3); 23) (02,3) (0,1,23); 24) (0,1,23) (02,3);
 25) (01,23) (0,12,3); 26) (0,12,3) (01,23); 27) (02,13) (0,21,3);
 28) (0,21,3) (02,13).

Каждое из 28 слагаемых диакоптической формулы определителя унисторного графа схемы на рис. 4.3 задано двумя сомножителями, коды которых указаны в скобках. Причем в первой (второй) паре скобок приведены обозначения соответствующего множества k -деревьев для первой (второй) подсхемы. Напомним, что в коде k -дерева запятые разделяют узлы, относящиеся к различным его компонентам. В кортеже номеров узлов, отделенных скобкой и запятой, двумя запятыми или двумя скобками, первым по порядку следует номер узла, который является корнем данной компоненты.

Предложенная выше формула четырехузловой бисекции, для построения которой использовано разложение по путям между узлами 0 и 3, содержит сомножители, появляющиеся четыре раза. Это сомножители (03,12) и (03,21) в слагаемых с номерами 3, 4, 5, 6 и 7, 8, 9, 10. При использовании D -деревьев симметрия в аналогичной формуле, за исключением слагаемых вида 15 и 16, отсутствует полностью, что обуславливает почти двухкратное увеличение сложности формулы бисекции. Таким образом, разложение по путям может быть положено в основу получения диакоптических формул, не содержащих слагаемых с отрицательными знаками и, в то же время, не требующих дополнительной свертки.

Отсутствие в формулах бисекции знаков вычитания достигается ценой усложнения процедуры нахождения параметров графов подсхем. Дело в том, что множества k -деревьев и D -деревьев путевых видов, например (03,12), (01,23), (02,13), нельзя получить как определители некоторых производных графов, а приходится использовать трудоемкие перечисление и сортировку k -

деревьев на предмет наличия тех или иных путей. При анализе активных схем это препятствует разработке эффективных алгоритмов исключения дубликаций. Формулы бисекции, получаемые на основе выражения (4.7), содержат слагаемые с положительными и отрицательными знаками, независимо от типа схемы. Однако в этих формулах вычитания удается минимизировать на уровне сомножителей указанных слагаемых (см. подраздел 3.4.), что не позволяет сделать методы, реализующие матричный и графовый подходы. Главным достоинством метода миноров подсхем является то, что число слагаемых в формулах бисекции минимально и равно числу миноров подсхемы.

4.7. Топологический метод объединения подсхем

Рекурсивное использование формул бисекции на основе выражения (4.7) соответствует иерархическому нисходящему анализу. При иерархическом восходящим анализе множества внешних узлов объединяемых подсхем, как правило, не совпадают с множеством их общих узлов. В этом случае необходимо рассматривать согласно формуле (4.7) только те позиции ДВ, которые относятся к узлам, являющимся общими узлами для обеих подсхем. Оставшиеся позиции ДВ непосредственно переносятся во вновь формируемый ДВ объединенной схемы. Таким образом, взаимно однозначное соответствие миноров, присущее формуле (4.7), нарушается и некоторый минор одной подсхемы оказывается совместным с двумя и более минорами другой подсхемы.

Если среди общих узлов объединяемых подсхем отсутствуют узлы, являющиеся одновременно внешними узлами объединенной схемы, то ДВ совместных миноров подсхем должны дополнять друг друга в части позиций, соответствующих общим узлам подсхем. В качестве примера выполним объединение подсхем, образующих схему на рис. 4.4 [13]. Для обозначения

позиций ДВ первой и второй подсхем удобно выбрать кортежи 312312 и 124124. Чтобы установить совместность миноров подсхем, необходима информация, размещенная в позициях 1212 ДВ этих подсхем. При нахождении знака пары совместных ДВ также используются только эти позиции. Напомним, что нумерация единиц в позициях 1212 ДВ начинается со второй подсхемы.

Объединение двух трехполюсников

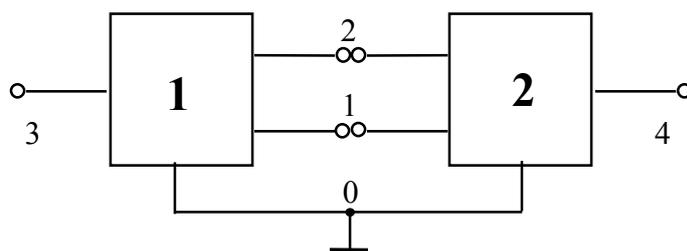


Рис. 4.4

Внешними узлами объединенной схемы являются собственные узлы 3 и 4 подсхем 1 и 2. Следовательно, размерность ДВ этой схемы равна четырем, а число ДВ или число миноров схемы равно шести. ДВ объединенной схемы приведены слева в табл. 4.2. Справа указаны пары совместных миноров подсхем с соответствующими знаками перед скобками. Произведения миноров подсхем (справа) в сумме с учетом знаков образуют минор объединенной схемы (слева).

Таблица 4.2

Двоичные отображения миноров объединенной схемы

Двоичные векторы объединенной схемы	Совместные пары миноров объединяемых подсхем
3434	
0000	$+(1,19), +(2,13), -(3,12), -(5,7), +(6,6), +(8,1)$
0101	$+(1,20), +(2,15), -(3,14), -(5,9), +(6,8), +(8,2)$
0110	$+(4,16), -(7,10), +(9,4), -(10,3)$
1001	$+(11,18), -(12,17), +(14,11), -(17,5)$
1010	$+(13,19), +(15,13), -(16,12), -(18,7), +(19,6), +(20,1)$

1111	$+(13,20), +(15,15), -(16,14), -(18,9), +(19,8), +(20,2)$
------	---

Одним из достоинств восходящего анализа является то, что миноры объединенной схемы содержат всю информацию о ее ССФ. Действительно, в рассмотренном примере минор 0000 является определителем схемы, миноры 0101 и 1010 являются симметричными минорами схемы Δ_{44} и Δ_{33} , миноры 0110 и 1001 являются несимметричными минорами схемы Δ_{43} и Δ_{34} , а минор 1111 является двойным минором схемы $\Delta_{33,44}$.

Нахождение знака слагаемых миноров объединенной схемы усложняется, когда обозначения позиций ДВ подсхем неупорядочены. Упорядочение позиций первой подсхемы предусматривает их приведение к виду: собственные узлы - общие узлы. Напротив, позиции ДВ второй подсхемы считаются упорядоченными, если они приведены к виду: общие узлы - собственные узлы. При этом порядок следования общих узлов в обозначениях позиций ДВ обеих подсхем должен быть одинаков. Таким образом, топологическое правило нахождения знака требует учета двух составляющих $(-1)^{d+h}$, где d - число инверсий, требующихся для упорядочения ДВ первой и второй подсхем; h - число инверсий в подстановке, образованной из номеров генераторов и приемников, которые инцидентны общим узлам подсхем.

Если среди общих узлов объединяемых подсхем имеются узлы, являющиеся одновременно внешними узлами объединенной схемы, то следует использовать обобщенное условие совместности ДВ. Для доказательства этого условия вводится дополнительный узел, соединенный короткозамкнутой ветвью, то есть вырожденным НУИ, с общим внешним узлом. Дополнительный узел рассматривается в качестве собственного узла одной из подсхем. Таким образом, задача приводится к рассмотренному ранее случаю, когда у подсхем отсутствуют общие внешние узлы.

Обобщенное условие совместности ДВ. Два ДВ совместны, если результат поэлементного сложения содержимого каждой из общих позиций этих ДВ отличен от нуля.

При формировании объединенного ДВ содержимое собственных позиций ДВ объединяемых подсхем переносится без изменений в ДВ объединенной схемы. Содержимое каждой из позиций объединенного ДВ, формируемых для общих внешних узлов этих подсхем, равно поэлементному произведению содержимого соответствующих позиций ДВ объединяемых подсхем. Это положение доказывается аналогично обобщенному условию совместности ДВ. Дополнительный узел считается принадлежащим одной из подсхем, например первой подсхеме, от начала до конца объединения подсхем. На этот узел переключается генератор (приемник) НУИ первой подсхемы, чтобы избежать параллельного соединения двух генераторов (приемников) при объединении подсхем.

Учитывая изложенное, предлагается следующий алгоритм объединения двух подсхем.

А. Попарное сравнение ДВ подсхем и выявление пар совместных ДВ. Для этого используются позиции ДВ, соответствующие общим узлам подсхем, и условие совместности.

В. Приведение совместных пар ДВ к ДВ объединенной схемы. В объединенный ДВ в первую очередь заносится содержимое позиций, относящихся к собственным узлам первой подсхемы. Далее рассматриваются позиции, соответствующие общим внешним узлам. В объединенный ДВ заносится единица только в том случае, если содержимое соответствующих позиций в ДВ подсхем отлично от нуля. В противном случае объединенный ДВ дополняется нулем в позиции, соответствующей общему внешнему узлу. Формирование объединенного ДВ завершается учетом содержимого позиций, относящихся к собственным узлам второй подсхемы. Параметр найденного ДВ равен произведению миноров исходных подсхем.

С. Определение знаков совместных пар миноров объединяемых подсхем. Если в позициях общих внешних узлов обоих ДВ содержатся единицы, то ДВ первой подсхемы модифицируется путем помещения в соответствующую позицию нуля. Такая модификация необходима, поскольку единица из ДВ первой подсхемы перешла в объединенный ДВ подсхем. Далее применяется топологическое правило и знак рассчитывается по формуле $(-1)^{d+h}$.

Д. Приведение подобных членов среди параметров объединенных ДВ по виду ДВ и образование миноров объединенной схемы. Перед параметром объединенного ДВ учитывается знак соответствующей пары миноров объединяемых подсхем.

Специального рассмотрения заслуживают случаи, когда подсхемы включают идеальные ОУ. Среди миноров таких подсхем могут быть миноры, тождественно равные нулю, если подсоединение НУИ в соответствии с ДВ минора приводит к получению вырожденной схемы. Это обусловлено тем, что идеальный ОУ имеет статус НУИ, и возможно образование контуров, содержащих только генераторы или только приемники НУИ (см. табл. 3.1). Наличие нулевых миноров позволяет значительно сократить количество ДВ, подлежащих рассмотрению, как при анализе подсхем, так и при их объединении. Для этого необходимо использовать правила, учитывающие условие совместности ДВ объединяемых подсхем.

Правило 1. Если внешний узел подсхемы совпадает с выходным узлом идеального ОУ, принадлежащего этой подсхеме, то в первой половине позиций ДВ содержимое позиции этого внешнего узла равно нулю.

Правило 2. Если внешний узел подсхемы совпадает с выходным узлом идеального ОУ, принадлежащего другой подсхеме, то в первой половине позиций ДВ содержимое позиции этого внешнего узла равно единице.

В правилах 1 и 2 предполагается, что одним из выходных узлов идеального ОУ является базисный узел схемы, что практически всегда имеет место [51]. Дуальные правила могут быть предложены для входного узла идеального ОУ с дифференциальным входом, когда другой входной узел этого

ОУ является базисным узлом схемы. Алгоритм объединения подсхем в сочетании с правилами 1 и 2 используется ниже для анализа схемы полосового фильтра.

4.8. Нахождение параметров схемы полосового фильтра с идеальными ОУ

Полосовой фильтр на базе 13 ОУ (см. рис. 3.35) обсуждался в подразделе 3.6.2. Структурная схема фильтра изображена на рис. 3.36. Подсхемы 1 - 4 этой схемы идентичны. Подсхема 1 показана на рис. 4.5. Для получения подсхем 2 - 4 порядковые номера резисторов и конденсаторов пересчитываются по формулам соответственно

$$N_r = i + 8(j-1) \quad (4.8)$$

и

$$N_c = i + 2(j-1), \quad (4.9) \text{ где } i -$$

номер параметра в подсхеме 1, j - номер одной из подсхем 2 - 4 ($j=2,3,4$).

Подсхема 5 изображена на рис. 4.6.

Подсхема 1 для схемы полосового фильтра

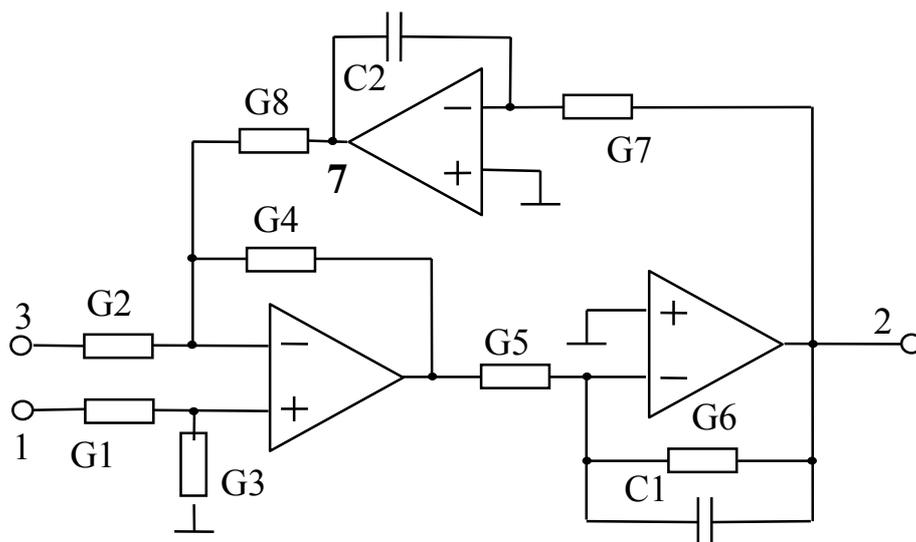


Рис. 4.5

Подсхема 5 для схемы полосового фильтра

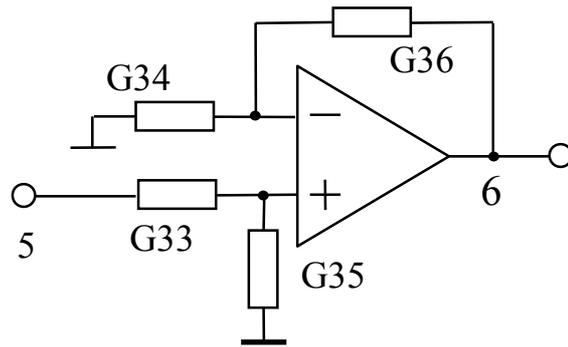


Рис. 4.6

При всем многообразии решений задачи анализа схемы на рис. 3.35 (см. табл. 3.4) только топологический метод ДВ позволяет обойтись без помощи компьютера.

4.8.1. Анализ подсхем полосового фильтра

Нахождение миноров подсхем выполняется на основе ДВ. В случае подсхемы с четырьмя внешними узлами будет 20 двоичных векторов. Однако наличие идеальных ОУ в самой подсхеме и вне ее позволяет сократить это число. В результате применения правил 1 и 2 для учета идеальных ОУ множества ДВ подсхем 1 - 4 уменьшаются до трех элементов: 1) 101011; 2) 101101; 3) 101110. Обозначения (кортежи) позиций ДВ для подсхем 1, 2, 3 и 4 имеют вид соответственно 123123, 234234, 345345, 456456. Подсхема 5 имеет три внешних узла. Учет идеальных ОУ вне и внутри этой подсхемы позволяет сократить число ДВ с шести до двух: 1) 1001; 2) 1010. Кортеж этих ДВ имеет вид: 5656.

Далее для обозначения миноров подсхем используется символ Δ с двумя цифрами: первая цифра - номер подсхемы, а вторая цифра - порядковый номер минора подсхемы. Например подсхему 3 представляют миноры: Δ_{31} , Δ_{32} и

Δ_{33} . Нахождение минора подсхемы заключается в подсоединении к этой подсхеме НУИ согласно ДВ этого минора с последующим раскрытием определителя образованной схемы. Используя один из топологических методов выделения параметров (см. подразделы 3.2. и 3.3.), получаем следующие миноры для подсхемы 1:

$$\Delta_{11} = -G_1 G_5 p C_2 (G_2 + G_4 + G_8),$$

$$\Delta_{12} = (G_1 + G_3) [(G_6 + p C_1) G_4 p C_2 + G_5 G_7 G_8],$$

$$\Delta_{13} = G_2 G_5 p C_2 (G_1 + G_3).$$

Миноры подсхемы 5 находятся аналогично

$$\Delta_{51} = G_{33} (G_{34} + G_{36}),$$

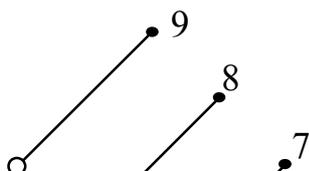
$$\Delta_{52} = G_{36} (G_{33} + G_{35}).$$

Для получения миноров подсхем 2 - 4 не требуется раскрытие определителей производных схем, поскольку эти миноры образуются из миноров Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{13} формальной заменой номера подсхемы и перенумерацией параметров элементов. Номера резисторов и конденсаторов пересчитываются по формулам (4.8) и (4.9).

4.8.2. Объединение подсхем полосового фильтра

Для объединения подсхем используется иерархическое дерево, которое изображено на рис. 4.7. Номера узлов этого дерева соответствуют номерам исходных подсхем (подсхемы 1 - 5) и подсхем, образованных в результате объединения (подсхемы 6 - 9). Объединение подсхем выполняется снизу-вверх согласно рис. 4.7 или слева-направо согласно рис. 3.36. Подсхема с номером 9 завершает процесс объединения и является исходной схемой. Из миноров этой подсхемы можно получить искомую передаточную ССФ по напряжению.

Дерево объединения подсхем полосового фильтра



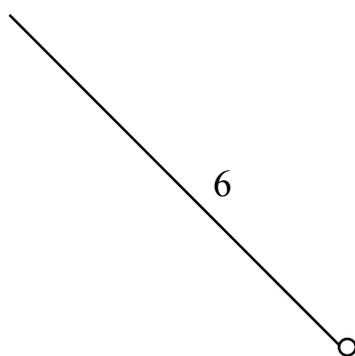


Рис. 4.7

В первую очередь объединяются подсхемы 1 и 2. Узел 3 принадлежит обеим этим подсхемам. В то же время его нужно сохранить как внешний узел объединенной схемы (подсхема 6). Чтобы установить совместность ДВ объединяемых подсхем, рассматриваются позиции, соответствующие их общим узлам 2 и 3. Фрагменты ДВ подсхем 1 и 2 для кортежа 2323 имеют вид:

	2323		2323
1	0111		1 1001
2	0101		2 1010
3	0110	и	3 1011 .

Слева от ДВ указывается порядковый номер минора.

Узел 2 является общим внутренним узлом подсхем, поэтому совместность ДВ в позициях 2 обеспечивается при взаимном дополнении их содержимого. Узел 3 - общий внешний узел, следовательно, совместность ДВ в позициях 3 достигается при условии, когда содержимое позиций 3 рассматриваемых пар ДВ либо взаимно дополняющее, либо равняется единице, но не может быть равным нулю. Таким образом, совместными являются четыре пары ДВ (миноров подсхем): (1,1), (2,2), (2,3) и (3,1).

Пары ДВ (1,1) и (2,3) имеют в позиции 3 единицы, поэтому для определения знака этих пар единицы в позиции 3 (вторая половина ДВ) для второй подсхемы заменяются нулями. Введение дополнительного узла во вторую, а не в первую, подсхему обусловлено тем, что узел 3 в кортеже ДВ размещается рядом с узлом 4, который является собственным узлом подсхемы

2. В случае пары (1,1) рассматриваются ДВ 0111 и 1000. После нумерации НУИ получаем соответственно 0212 и 1000. Сложение нумерованных ДВ приводит к вектору 1212, первая (вторая) половина элементов которого образует первую (вторую) строку подстановки 12 / 12. Эта подстановка не имеет инверсий, следовательно, знак пары (1,1) положителен.

В случае определения знака пары (3,1) необходимо рассмотреть ДВ 0110 и 1001. Нумерация НУИ приводит к векторам 0220 и 1001. В результате сложения нумерованных ДВ имеем вектор 1221 и соответствующую подстановку 12 / 21. Эта подстановка содержит одну инверсию, то есть является нечетной, следовательно, знак пары (3,1) отрицателен. Аналогично определяются знаки у пар (2,2) и (2,3).

Формируя объединенный ДВ, необходимо помнить, что единица в позиции 3 этого ДВ возможна только при равенстве единице содержимого соответствующих позиций в ДВ подсхем 1 и 2. Отсюда после приведения подобных ДВ получаем множество ДВ подсхемы 6: 1) 101011: 2) 101101: 3) 101110. Кортеж этих ДВ имеет вид: 134134. Соответствующие миноры перечислены ниже: $\Delta_{61} = \Delta_{11} \Delta_{21}$, $\Delta_{62} = \Delta_{12} \Delta_{22} - \Delta_{13} \Delta_{21}$, $\Delta_{63} = \Delta_{12} \Delta_{23}$.

Поскольку ДВ у подсхем 1 - 4 одинаковые, а ДВ подсхемы 6 совпадают с ДВ подсхемы 1, то объединение подсхем 6 и 3, 7 и 4 можно выполнить без проведения соответствующих выкладок. Выражения для миноров подсхемы 7 образуются из выражений для миноров подсхемы 6 формальной заменой первых цифр 6, 1 и 2 после Δ на соответственно 7, 6 и 3. Получение выражений для миноров подсхемы 8 выполняется путем замены указанных цифр на 8, 7 и 4.

При установлении совместности ДВ подсхем 8 и 5 рассматриваются позиции, соответствующие их общим узлам 5 и 6. Интересующие фрагменты ДВ подсхемы 8 и ДВ подсхемы 5 имеют вид соответственно:

$$\begin{array}{cc} & 5656 \\ 1 & 0111 \\ 2 & 0101 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{cc} & 5656 \\ 1 & 1001 \\ 2 & 1010 \end{array} .$$

3 0110

Как видно, совместными являются три пары ДВ: (1,1), (2,2) и (3,1). Далее поступаем аналогично объединению подсхем 1 и 2. Отсюда получаются ДВ подсхемы 9: 1) 1001; 2) 1010. Кортёж этих ДВ имеет вид: 1616. Соответствующие миноры перечислены ниже: $\Delta_{91} = \Delta_{81} \Delta_{51}$, $\Delta_{92} = \Delta_{82} \Delta_{52} - \Delta_{83} \Delta_{51}$.

Используя формулы (4.8) и (4.9) при переходе от миноров первой подсхемы к минорам второй, третьей и четвертой подсхем, получаем последовательность выражений (ПВ) для анализа и объединения подсхем полосового фильтра, которая представлена на рис. 4.8. Здесь $H = \Delta_N / \Delta_D$ - искомая передаточная ССФ по напряжению.

Последовательность выражений для полосового фильтра рис. 3.35

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11} &= -G_1 G_5 p C_2 (G_2 + G_4 + G_8), \\
 \Delta_{12} &= (G_1 + G_3) [(G_6 + p C_1) G_4 p C_2 + G_5 G_7 G_8], \\
 \Delta_{13} &= G_2 G_5 p C_2 (G_1 + G_3), \\
 \Delta_{21} &= -G_9 G_{13} p C_4 (G_{10} + G_{12} + G_{16}), \\
 \Delta_{22} &= (G_9 + G_{11}) [(G_{14} + p C_3) G_{12} p C_2 + G_{13} G_{15} G_{16}], \\
 \Delta_{23} &= G_{10} G_{13} p C_4 (G_9 + G_{11}), \\
 \Delta_{31} &= -G_{17} G_{21} p C_6 (G_{18} + G_{20} + G_{24}), \\
 \Delta_{32} &= (G_{17} + G_{19}) [(G_{22} + p C_5) G_{20} p C_6 + G_{21} G_{23} G_{24}], \\
 \Delta_{33} &= G_{18} G_{21} p C_6 (G_{17} + G_{19}), \\
 \Delta_{41} &= -G_{25} G_{29} p C_8 (G_{26} + G_{28} + G_{32}), \\
 \Delta_{42} &= (G_{25} + G_{27}) [(G_{30} + p C_7) G_{28} p C_8 + G_{29} G_{31} G_{32}], \\
 \Delta_{43} &= G_{26} G_{29} p C_8 (G_{25} + G_{27}), \\
 \Delta_{51} &= G_{33} (G_{34} + G_{36}), \quad \Delta_{52} = G_{36} (G_{33} + G_{35}), \\
 \Delta_{61} &= \Delta_{11} \Delta_{21}, \quad \Delta_{62} = \Delta_{12} \Delta_{22} - \Delta_{13} \Delta_{21}, \quad \Delta_{63} = \Delta_{12} \Delta_{23}, \\
 \Delta_{71} &= \Delta_{61} \Delta_{31}, \quad \Delta_{72} = \Delta_{62} \Delta_{32} - \Delta_{63} \Delta_{31}, \quad \Delta_{73} = \Delta_{62} \Delta_{33}, \\
 \Delta_{81} &= \Delta_{71} \Delta_{41}, \quad \Delta_{82} = \Delta_{72} \Delta_{42} - \Delta_{73} \Delta_{41}, \quad \Delta_{83} = \Delta_{72} \Delta_{43}, \\
 \Delta_{91} &= \Delta_{81} \Delta_{51}, \quad \Delta_{92} = \Delta_{82} \Delta_{52} - \Delta_{83} \Delta_{51}, \\
 H &= \Delta_{91} / \Delta_{92}.
 \end{aligned}$$

Рис. 4.8

Таким образом, топологический метод миноров подсхем (метод ДВ) в виде восходящего иерархического анализа предусматривает деление схемы на некоторое количество подсхем и формирование выражений миноров для

каждой из них. Те миноры, которые необходимы для ее задания в виде “черного ящика” относительно внешних узлов, используются в дальнейшем в выражениях более высокого уровня, отображающих объединение подсхем (см. рис. 4.7 и 4.8). На заключительном первом уровне объединение подсхем приводит к получению выражений, являющихся минорами исходной схемы.

Выражение, представленное на рис. 4.8, соответствует по вычислительной сложности выражению 1 (см. табл. 3.4). Это не удивительно, поскольку оба выражения совпадают по структуре [169]. Дело в том, что название статьи [169] не отражает ее содержания. Сигнально-поточковый граф Коутса используется авторами только на этапе анализа подсхем. При этом в качестве параметров подсхем приводятся окончательные выражения, лишенные дубликаций. Далее, от установления совместности параметров объединяемых подсхем до определения знака параметров объединенной схемы применяется матричный метод. Параметрами подсхемы в этом случае выступают миноры ее матрицы проводимостей. Таким образом, доказательство формулы (4.6), рассмотренное в подразделе 4.2., может быть использовано при обосновании результатов статьи [169]. Следует обратить внимание на то, что алгебраическое правило для нахождения знака минора матрицы объединенной схемы, приведенное в [169] без доказательства, более трудоемко, чем доказанное в подразделе 4.4. топологическое правило.

Сравнение единого выражения на рис. 3.37 с ПВ на рис. 4.8 показывает, что ПВ более предпочтительна с точки зрения сложности вычислений. Однако единое выражение было получено в пункте 3.6.2. без деления схемы на подсхемы, то есть без иерархической бисекции по формуле (4.7), как предусматривается в пункте 3 алгоритма формирования оптимальных выражений ССФ (см. подраздел 3.5.). Сведения о компьютерной реализации этого алгоритма приводились в подразделе 3.6. Ниже обсуждаются вопросы формирования минимальных по вычислительной сложности выражений ССФ с помощью программы SYMBOL.

4.9. Формирование ССФ на компьютере

В подразделе 3.6. рассматривались результаты использования программы SYMBOL с установкой в файле setup.sym разрешения на применение бисекции по одному и двум узлам, то есть с запретом на многоузловую бисекцию. Впрочем, для полных схем с ИТУН трехузловая бисекция не только не дает выигрыша в сложности формируемых выражений, но и приводит к значительному увеличению числа операций вычитания. Для схемы полосового фильтра, которая уже рассматривалась в пункте 3.6.2. и подразделе 4.8., применение трехузловой бисекции приводит к существенному сокращению вычислительной сложности выражения ССФ.

4.9.1. Иерархическая бисекция полосового фильтра

Первоначально проведем бисекцию схемы рис. 3.35 на основе формулы (4.2) и правила половинного деления. На первом уровне иерархии схема делится на две подсхемы по узлам 0, 12 и 19 (см. рис. 3.35 и 3.36). На втором уровне каждая из подсхем также делится на две подсхемы (соответственно триады узлов 0, 5, 12 и 0, 19, 26). На самом низком третьем уровне иерархии правая подсхема, включающая 4 идеальных ОУ, делится на две подсхемы по узлам 0, 26, 31.

Сформированное в результате выражение полностью лишено избыточных слагаемых. Его показатели приведены в табл. 3.4 (см. выражение 6). Единое выражение под номером 4 имеет несколько меньшую сложность, чем выражение 6, но содержит дубликации.

Как видно, и выражение 4, и выражение 6 оказались более сложными, чем выражение 3.37, сформированное без учета трехузловой бисекции методом стягивания и удаления ветвей. Вместе с тем при усложнении подсхем (см. рис. 3.36) или при замене идеальных ОУ обычными УИ проводить анализ схемы

полосового фильтра без применения формул трехузловой бисекции нецелесообразно или невозможно (см. пункт 3.6.2.).

Выражение 4 имеет в несколько раз меньшую сложность, чем единые выражения, полученные из ПВ 1 - 3 и 5 (см. табл. 3.4 и рис. 4.8), в результате последовательной подстановки. Как и в случае пассивной схемы (см. пункт 2.4.5.), это объясняется тем, что желая сформировать единое выражение с минимальным числом операций, необходимо выполнять рекурсивную бисекцию с учетом правила половинного деления. В то же время объединение подсхем полосового фильтра на рис. 3.35 выполняется способом наращивания (см пункт 4.8.2.). При этом исходная схема на первом уровне иерархии делится на две подсхемы по узлам 0, 26, 31. Выбранные подсхемы оказываются несопоставимыми по сложности. Так, размерность правой подсхемы соответствует минимальной размерности, а левая подсхема, подлежащая дальнейшему делению, представляет собой оставшуюся часть схемы. С левой подсхемой вновь поступают как с исходной схемой и т.д. до получения на четвертом уровне иерархии двух подсхем минимальной размерности. Таким образом, несоблюдение правила половинного деления приводит к увеличению числа уровней иерархии (в данном случае с трех до четырех), что отражается, в частности, на сложности единых выражений, получаемых из ПВ.

Несомненным достоинством единого выражения ССФ является удобство его визуальной интерпретации для выполнения требуемых алгебраических преобразований, например в случае нахождения функций чувствительности. Напротив, оперирование десятками, как в случае обсуждаемой схемы (см. рис. 4.8), пусть и весьма простых выражений, затруднительно для восприятия и требует специальных алгоритмов при компьютерной обработке [139, 163]. Однако до сих пор сформированные единые выражения передаточной ССФ по напряжению полосового фильтра требуют в 2 - 3 раза больше операций, чем ССФ в виде ПВ, что побуждает рассмотреть новые возможности для формирования единых выражений ССФ.

Существенное сокращение операций достигается в результате снятия запрета на образование дубликаций при объединении подсхем. В этом случае рекурсивно используется формула (4.3) с учетом правила половинного деления, то есть триады узлов иерархической бисекции те же, что и при получении выражения 6. Отсюда получается выражение 7, показатели которого даны в табл. 3.4 и не требуют комментариев.

Второй способ оптимизации ССФ обеспечивает минимизацию исключительно операций умножения и заключается в использовании правила ПУ (см. подраздел 2.6.). При оптимальном задании параметров резисторы могут задаваться как проводимостями, так и сопротивлениями, а конденсаторы как емкостными проводимостями, так и емкостными сопротивлениями: $Y1=pC1$, $Z2=1/(pC2)$, $Y3=pC3$, $Z4=1/(pC4)$, $Y5=pC5$, $Z6=1/(pC6)$, $Y7=pC7$, $Z8=1/(pC8)$. В результате получается уз-выражение, представленное на рис. 4.9. Показатели сложности этого выражения помещены в табл. 3.4 (см. выражение 8). Сформированное единое выражение ССФ теперь обладает даже несколько лучшими показателями, чем ПВ 1 и 2. Тем не менее полученный результат отнюдь не означает, что концепция ПВ уступает свои позиции методологии формирования оптимальных единых выражений, поскольку выражение 8 может быть преобразовано в ПВ, обладающую значительно лучшими показателями (см. выражение 9 в табл. 3.4).

Минимальное единое уз-выражение ССФ для полосового
фильтра на рис. 3.35

$$H = \frac{G1(G2+G4+G8)G9(G10+G12+G16)G17(G18+G20+G24) * G25(G26+G28+G32)G33(G34+G36)}{[(G1+G3) * (((G6+Y1)G4R5+Z2G7G8)(G9+G11)((G14+Y3)G12R13+Z4G15G16) + G2G9(G10+G12+G16)) * (G17+G19)((G22+Y5)G20R21+Z6G23G24)(G25+G27)]}$$

$$\begin{aligned}
& * (((G30+Y7)G28R29+Z8G31G32)(G33+G35)G36-G26G33(G34+G36)) \\
& + G18G25(G26+G28+G32)(G33+G35)G36) \\
& + G10(G9+G11)((G6+Y1)G4R5+Z2G7G8)G17(G18+G20+G24)(G25+G27) \\
& * (((G30+Y7)G28R29+Z8G31G32)(G33+G35)G36-G26G33(G34+G36)) \\
&) \\
&]
\end{aligned}$$

Рис. 4.9

Достоинством выражений 1, 4, 6 - 9 является наличие единственной операции деления. Однако использование нормирования выражений миноров подсхем, что допустимо при нахождении передаточных ССФ для схем с идеальными ОУ [102], позволяет частично избавиться от общих подвыражений. Этот третий из способов оптимизации ССФ имеет отношение только к ПВ (первые два способа оптимизации применимы как к единым выражениям, так и к ПВ). Нормированная ПВ представлена на рис. 4.10. Показатели сложности этой ПВ (см. выражение 10 в табл. 3.4) являются наилучшими для тестовой схемы Старжика-Кончиковской.

Минимальная ПВ, соответствующая единой формуле на рис. 4.9

$$\begin{aligned}
f1 &= G33(G34+G36), \\
f2 &= G36(G33+G35), \\
f3 &= -G25(G28+G26+G32) / (G27+G25), \\
f4 &= G26, \\
f5 &= G31G32Z8+(G30+Y7)G28R29, \\
f6 &= -G17(G18+G20+G24) / (G17+G19), \\
f7 &= G18, \\
f8 &= G23G24Z6+(G22+Y5)G20R21, \\
f9 &= -G9(G10+G12+G16) / (G9+G11), \\
f10 &= G10, \\
f11 &= G15G16Z4+(G14+Y3)G12R13, \\
f12 &= -G1(G2+G4+G8) / (G1+G3), \\
f13 &= G2, \\
f14 &= G7G8Z2+(G6+Y1)G4R5, \\
f15 &= f9 / f14, \\
f16 &= f12 f15, \\
f17 &= f11 - f13 f15, \\
f18 &= f1 / f2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{19} &= (f_5 - f_4 f_{18}) / f_3, \\
 f_{20} &= (f_8 f_{19} - f_7) / f_6, \\
 f_{21} &= f_{16} f_{18}, \\
 f_{22} &= f_{17} f_{20} - f_{10} f_{19}, \\
 H &= f_{21} / f_{22}.
 \end{aligned}$$

Рис. 4.10

В схеме полосового фильтра на рис. 3.35 выделяются подсхемы с тремя внешними узлами (см. рис. 3.36). Практический интерес представляет рассмотрение и более сложных случаев анализа электрических цепей по частям.

4.9.2. Анализ схемы избирательного усилителя

Одной из наиболее сложных тестовых схем для программ символьного анализа считается схема замещения избирательного усилителя, которая содержит 49 резисторов, 35 конденсаторов, 9 ИТУН и представлена на рис. 4.11.

Первоначально схема на рис. 4.11 была использована Э.А.Лаксбергом в качестве тестовой схемы для программы узлового анализа [41], а затем, после разработки диакоптического метода Д-деревьев [18], стала популярным тестом для ряда наиболее эффективных отечественных программ символьного анализа [13, 15, 16, 124, 125, 127]. До сих пор для данной схемы не проводилось формирование ССФ, когда параметры всех элементов представлены символами. При решении задачи анализа схемы избирательного усилителя использовался персональный компьютер с центральным процессорным устройством 486DX4-100, имеющим частоту тактового генератора 100 МГц.

Числитель и знаменатель передаточной ССФ по напряжению схемы избирательного усилителя, сформированные в виде единого выражения,

требуют 36758, 49077 и 9883 операций умножения, сложения и вычитания соответственно. Это заняло 159 секунд процессорного времени. В ходе анализа обсуждаемой схемы применялась двух-, трех-, четырех- и пятиузловая бисекция. Следует подчеркнуть, что выражение

Схема избирательного усилителя (тестовая схема Лаксберга)

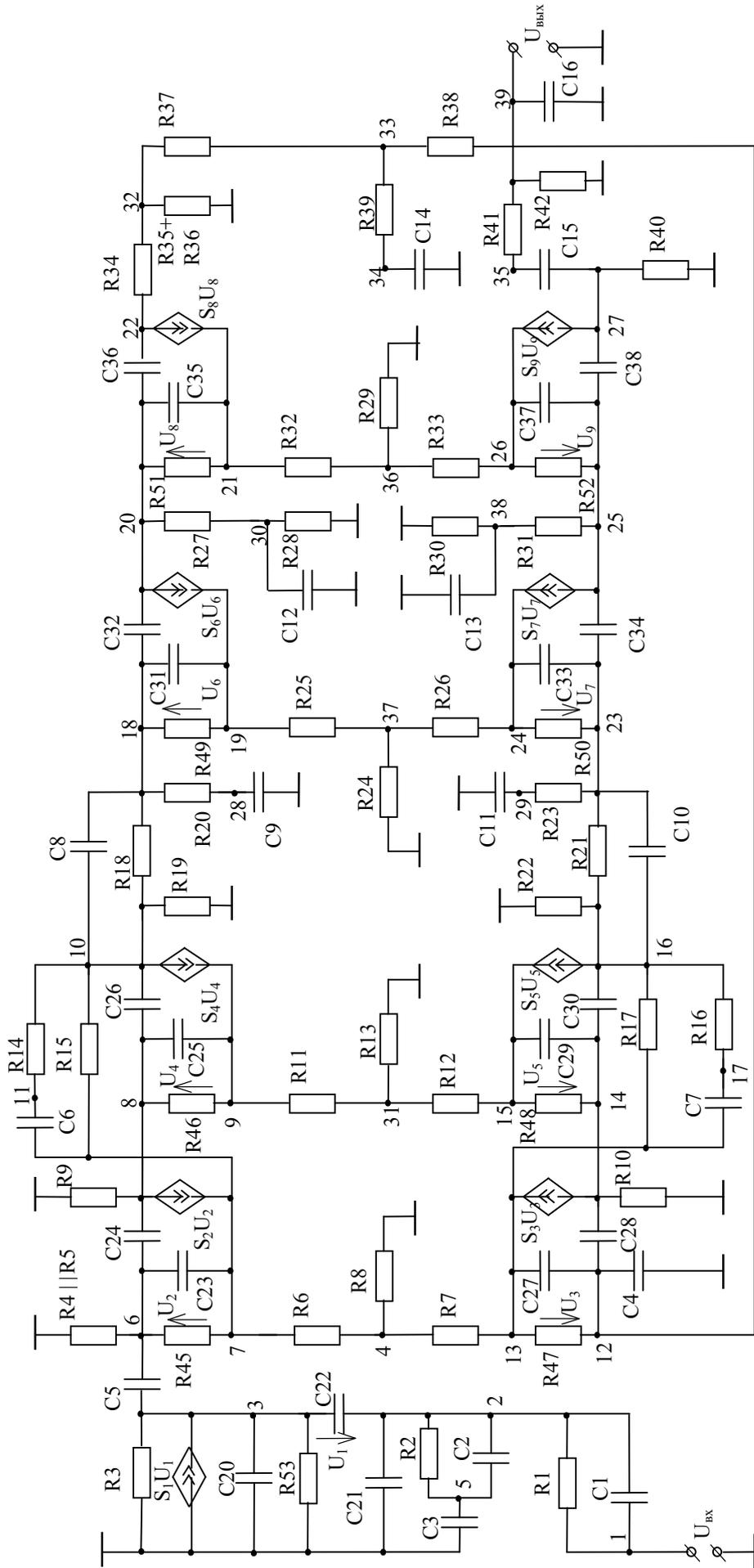


Рис. 4.11

для числителя или знаменателя ССФ не удалось сформировать, ограничившись двух- и трехузловой бисекцией. Причиной этого является комбинаторное увеличение сложности формируемой ССФ, вызывающее катастрофическое увеличение затрат процессорного времени и емкости требуемой памяти. Отсюда вытекает, в частности, что программа SSpice, по крайней мере версии 2.0 [131], в которой реализована двух- и трехузловая матричная бисекция, применима для значительно более простых схем, чем обсуждаемая схема избирательного усилителя.

Для формирования ССФ в виде ПВ на базе предыдущей версии была разработана другая версия программы SYMBOL, предусматривающая иерархическое объединение подсхем в соответствии с алгоритмом, который приведен в подразделе 4.7. Текстовый файл новой версии составил 113 кбайт. В него целиком вошел файл предыдущей версии (85 кбайт), предназначенной для рекурсивной бисекции схемы по одной, двум, трем, четырем и пяти узлам согласно алгоритму из подраздела 3.5. Обе версии программы SYMBOL были откомпилированы с помощью компилятора с языка ТурбоСи версии 2.0.

К наименьшей по сложности ПВ привело деление схемы рис. 4.11 на подсхемы в соответствии со структурной схемой рис. 4.12. Триады чисел внутри изображений подсхем указывают количества резисторов, конденсаторов и ИТУН соответственно. Сформированные выражения всех шести миноров схемы избирательного усилителя представляют собой две ПВ. Первая ПВ включает 318 выражений, требующих 1452, 1517 и 375 операций умножения, сложения и вычитания. Вторая ПВ, образованная 477 выражениями, требует соответственно 1508, 1052 и 456 операций. Формирование первой и второй ПВ заняло 3 и 1,5 секунд

процессорного времени. Текстовый файл результирующей ПВ составил 36 кбайт.

Оптимальное деление избирательного усилителя рис. 4.11
на подсхемы

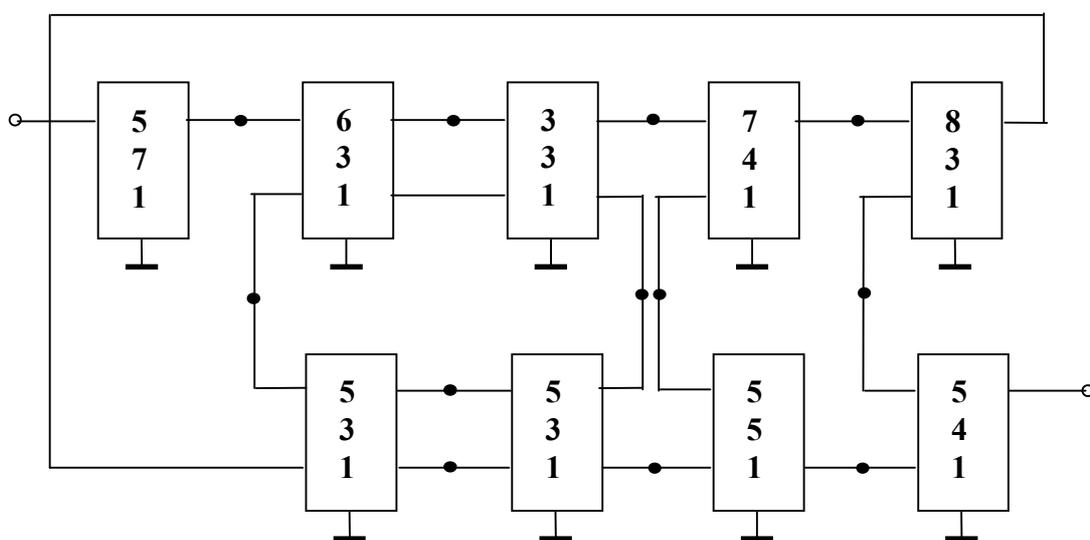


Рис. 4.12

Для проведения расчетов на основе сформированных выражений ССФ первоначально использовалась программа интерпретирующего типа, разработанная В.Е.Вольновым при помощи пакета Compiler generator COCO/R for C versions 1.08-1.12. Параметры элементов для этой схемы были взяты из работы [42] и приводятся в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Параметры элементов схемы избирательного усилителя на рис. 4.11

Имя	Параметр	Имя	Параметр	Имя	Параметр
R1	91 кОм	R33	68 Ом	C14	1,5 мкФ
R2	91 кОм	R34	470 Ом	C15	5 мкФ
R3	2,85 кОм	R35+R36	4,4 кОм	C16	360 пФ
R4 R5	23,5 кОм	R37	27 кОм	C20	2 пФ
R6	100 Ом	R38	27 кОм	C21	5 пФ
R7	100 Ом	R39	4,7 кОм	C22	10 пФ
R8	5,6 кОм	R40	4,7 кОм	C23	61 пФ
R9	2,2 кОм	R41	5,1 кОм	C24	8 пФ
R10	2,2 кОм	R42	4,7 кОм	C25	86 пФ
R11	27 Ом	R45	5,25 кОм	C26	8 пФ
R12	27 Ом	R46	3,7 кОм	C27	61 пФ
R13	8,2 кОм	R47	5,25 кОм	C28	8 пФ
R14	2,2 кОм	R48	3,7 кОм	C29	86 пФ
R15	68 кОм	R49	5,28 кОм	C30	8 пФ
R16	2,2 кОм	R50	5,28 кОм	C31	61 пФ
R17	68 кОм	R51	770 Ом	C32	8 пФ
R18	2,7 кОм	R52	770 Ом	C33	61 пФ
R19	1,8 кОм	R53	22 кОм	C34	8 пФ
R20	180 Ом	C1	45 пФ	C35	160 пФ
R21	2,7 кОм	C2	220 пФ	C36	4 пФ
R22	1,8 кОм	C3	1 мкФ	C37	160 пФ
R23	180 Ом	C4	20 мкФ	C38	4 пФ
R24	12 кОм	C5	10 мкФ	S1	0,3 мСм
R25	47 Ом	C6	220 пФ	S2	39 мСм
R26	47 Ом	C7	220 пФ	S3	39 мСм
R27	100 Ом	C8	24 пФ	S4	54 мСм
R28	1,5 кОм	C9	3,3 нФ	S5	54 мСм
R29	3,3 кОм	C10	24 пФ	S6	38 мСм
R30	1,5 кОм	C11	3,3 нФ	S7	38 мСм
R31	100 Ом	C12	10 пФ	S8	120 мСм
R32	68 Ом	C13	10 пФ	S9	120 мСм

Получение значения передаточной ССФ по напряжению в виде единого выражения и значений шести миноров схемы избирательного усилителя на основе ПВ потребовало соответственно 22 и 4 секунд процессорного времени. В последнем случае удалось многократно повысить эффективность вычислений путем использования компилятора с языка ТурбоСи версии 2.0. При этом затраты

процессорного времени сократились в 4000 раз. Однако обработка более сложных выражений с помощью современных популярных универсальных компиляторов оказывается невозможной. Поскольку затраты процессорного времени на интерпретацию выражений ССФ существенны по сравнению с затратами на их формирование, в настоящее время ведутся исследования в направлении разработки специализированных компиляторов сложных алгебраических выражений.

Математическая модель схемы избирательного усилителя в виде ПВ является более эффективной, чем матричная модель, размерность которой равна 39. Так, построение и раскрытие по Гауссу шести миноров матрицы узловых проводимостей этой схемы с помощью программы NODAL [116] потребовало в 45 раз больше процессорного времени по сравнению с вычислениями на основе откомпилированной ПВ. Вместе с тем однократное построение этой матрицы требует в 66 раз меньше времени, чем формирование ПВ, поэтому использование ССФ более предпочтительно при многовариантных расчетах функций чувствительности и оптимизации схем. Например, в данном случае расчет параметров схемы, начиная с двух частотных точек, более целесообразен по ССФ, сгенерированной программой SYMBOL, чем с помощью программы NODAL.

В табл. 4.4 приведены данные, позволяющие оценить точность расчетов на основе откомпилированной ПВ по сравнению с расчетами схемы избирательного усилителя при использовании программы NODAL, ее модификации и программы моделирования электронных схем PSpice версии 5.1. В модифицированной программе NODAL предусматривается отдельное (по Крамеру) вычисление числителя и знаменателя ССФ также с применением метода Гаусса. При

вычислениях на основе программ SYMBOL, NODAL и NODAL-Крамер использовалась удвоенная точность (double). Расчеты с помощью программы PSpice выполнил С.А.Курганов.

Таблица 4.4

Варьирование параметра S9 при использовании различных программ

Значение параметра S9	Модуль передаточной ССФ по напряжению избирательного усилителя на частоте 1000 Гц			
	SYMBOL	NODAL	NODAL-Крамер	PSpice
0.12E+0	11234.94095303	11234.94095303	11234.94095303	11234.940526
0.12E+1	11089.40224992	11089.40224992	11089.40224992	11089.402575
0.12E+3	11073.62219742	11073.62219741	11073.62219742	11073.622393
0.12E+5	11073.46462303	11073.46462376	11073.46462209	11073.464610
0.12E+7	11073.46304731	11073.46287959	11073.46292893	11073.462660
0.12E+9	11073.46303140	11072.22327857	11072.16194560	11073.458783
0.12E+11	11073.46303140	11072.22327857	11072.16194560	11073.120691
0.12E+13	11073.46303139	11186.88455455	11187.41095361	11058.458480
0.12E+15	11073.46303139	20894.16214829	11634.44669716	12187.147822
0.12E+17	11073.46303139	2097.875765169	2097.875887986	1.00000000E-30
0.12E+19	11073.46303139	1857.175631487	1857.175850476	155954.9213
0.12E+21	11073.46303139	1853.296294155	1853.324681712	1.00000000E-30
0.12E+23	11073.46303139	21.02789963908	21.02276856788	1.00000000E-30
0.12E+25	11073.46303139	22.33667727315	21.02275637196	1.00000000E-30

Анализ табл. 4.4 показывает, что, начиная со значения $S9=0.12E+9$, появляются различия в пятой цифре результатов, причем результат, полученный программой SYMBOL, очень близок к предельному результату 11073.46303139878 в случае выполнения условия $S9=\infty$. При $S9=0.12E+15$ погрешность результата работы программы NODAL оказывается близкой к 100%. В то же время, как и ожидалось [59], результат программы NODAL-Крамер довольно близок к результату программы SYMBOL и предельному результату. Начиная с $S9=0.12E+17$, программы NODAL и NODAL-Крамер дают близкие результаты, отличающиеся от результатов программы SYMBOL в 5 - 500 раз.

Критические замечания, высказанные по отношению к программам NODAL и NODAL-Крамер, справедливы для программы PSpice, в которой также используется численное решение уравнений схемы. В отличие от других программ программа PSpice при $S_9=0.12$ и $S_9=1.2$ обеспечивает всего 8 верных цифр. Это позволяет утверждать, что в программе PSpice по непонятной причине используется одинарная точность. Например, число π , найденное с помощью программы PSpice, составляет 3.141592741, что отличается от точного значения 3.141592653... в восьмой цифре. Следствием использования одинарной точности, по-видимому, являются также явные “сбои” программы PSpice при значениях $S_9 \geq 0.12E+17$.

Совпадение результатов программы SYMBOL при $S_9 \geq 0.12E+9$ с предельным результатом свидетельствует, во-первых, в пользу высокой точности и устойчивости символьных вычислений, а во-вторых, позволяет предположить, что ОУ можно считать “математически” идеальным при параметре усиления, превышающем 10^{10} .

4.9.3. Анализ операционного усилителя $\mu A741$

В данном пункте приводятся результаты использования программы CIRSVM - версии программы SYMBOL, ориентированной на входной CIR-формат популярных программ PSpice-DesignLab. Программа CIRSVM в составе пакета SYMBOL свободно распространяется соискателем через Интернет-сайт <http://astrometric.sai.msu.ru/~symbol/>. В состав пакета SYMBOL входит программа CALCSVM для интерпретации сложных выражений ССФ, разработанная Д.В.Шейным.

Среди известных программ формирования ССФ выделяется программа *STAINS*, в которой используется символьная редукция расширенной матрицы узловых проводимостей схемы. Эта австралийская программа имеет лучшие показатели по оценкам сложности формируемых выражений среди ряда программ, представленных на сайте <http://www.eng.uts.edu.au/~benr/symbolic/>. Самой сложной тестовой схемой, файл которой размещен на этом сайте, является схема замещения ОУ $\mu A741$ (советский аналог - 140УД7). Эта 76-узловая схема, содержащая 115 резисторов, 76 конденсаторов и 26 ИТУН, изображена на рис. 4.13.

Показатели сложности выражения передаточной функции по напряжению этой схемы, полученного с помощью программы *STAINS* следующие: 579 умножений, 267 делений, 502 сложения, 382 вычитания, 715 присваиваний и 317 пар скобок. Следует отметить, что 116 операций деления требуются для инициализации выражений указанной ССФ (при переходе от сопротивлений к проводимостям). Остальные операции деления используются в выражениях, отображающих редукцию матрицы схемы, и в сочетании с операциями вычитания обуславливают методическую погрешность при вычислениях с конечным числом значащих цифр [53,137]. При использовании программы **CIRSYM** соответствующие показатели выражения передаточной функции составили 1942, 116, 1617, 142, 830 и 1208 операций.

Таким образом предложенное выражение не требует дополнительных операций деления, а число операций вычитания уменьшилось в 2,6 раза по сравнению с ранее рассмотренным выражением ССФ. Это означает, что выражения, формируемые программой **CIRSYM**, способны обеспечить меньшую погрешность и

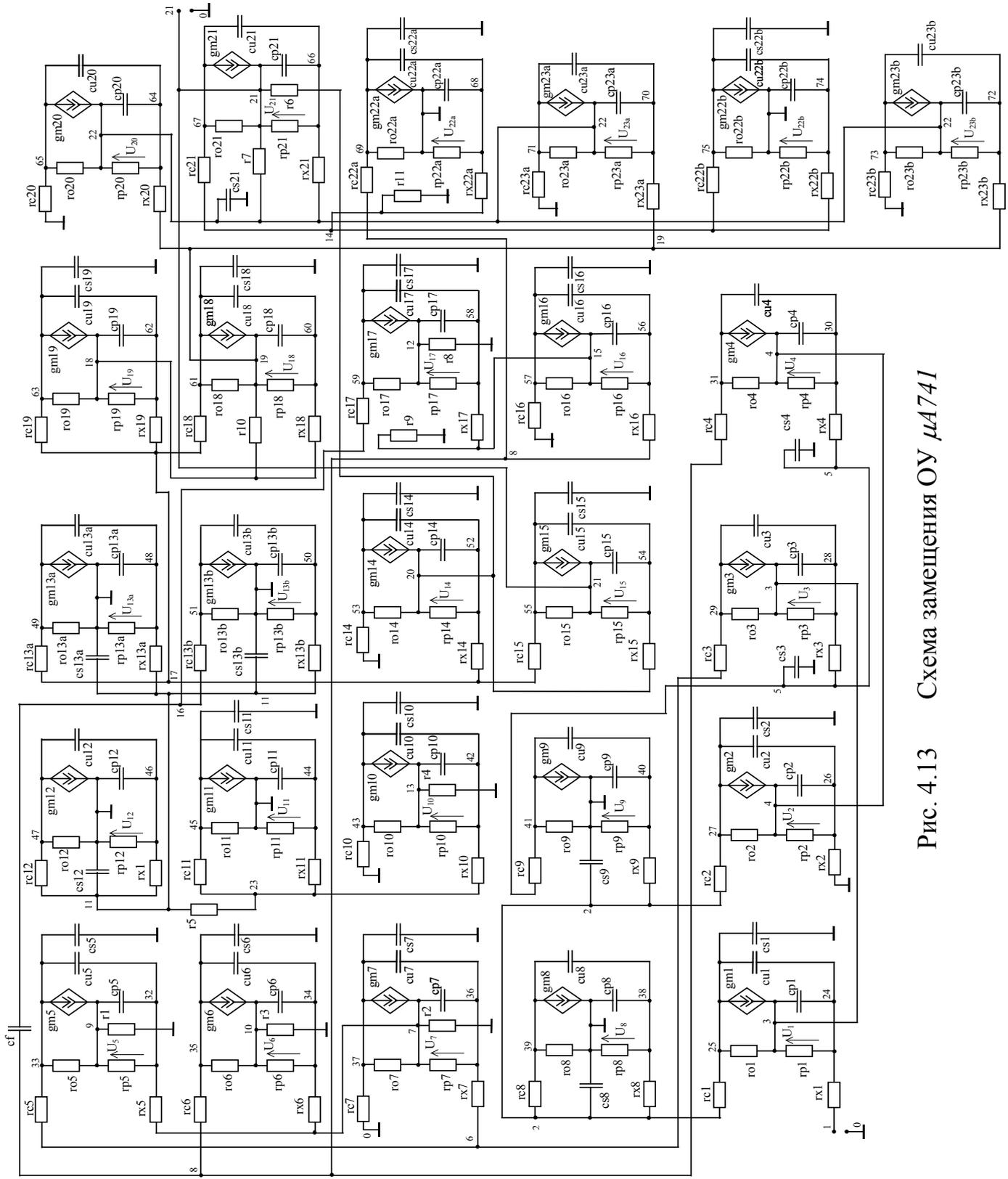


Рис. 4.13 Схема замещения ОУ $\mu\text{A}741$

предпочтительны при анализе схем с большим разбросом значений параметров, когда матрицы плохообусловлены. Действительно, интерпретация рассмотренных выражений с помощью программы **CALCSYM** показала, что расчет ССФ с помощью первого выражения (программа *STAINS*) обеспечивает только 13 верных цифр в мантиссе результата. При расчете ССФ по второму выражению (программа **CIRSYM**) погрешность не была отмечена даже в 17 цифре. В обоих случаях использовалась 19-разрядная мантисса. Важно, что время интерпретации второго выражения увеличилось лишь на 11%, что несопоставимо с резким ухудшением точности результата для первого выражения ССФ.

Для оценки сложности и устойчивости оптимальных единичных выражений ССФ были проведены также другие эксперименты с программами **CIRSYM** и **CALCSYM**. Как и при решении задачи анализа схемы избирательного усилителя, использовался персональный компьютер с центральным процессорным устройством 486DX4-100, имеющим частоту тактового генератора 100 МГц. В первом и втором случае в качестве параметров пассивных элементов использовались только проводимости и только сопротивления. В других двух случаях использовалось смешанное задание параметров. Показатели соответствующих выражений сведены в табл. 4.5.

Кодирование выражений различных типов осуществляется в соответствии с руководством пользователя программы **CIRSYM**, то есть буква "r" в коде указывает на пересчет сопротивлений резисторов в проводимости в заголовке формулы и задание конденсаторов емкостными проводимостями, буква "R" обозначает задание резисторов сопротивлениями, буквы "c" и "C" указывают на задание конденсаторов емкостными проводимостями и сопротивлениями соответственно. Замечательно, что при получении значений ССФ с помощью выражений

различных типов не происходит потери точности даже в последнем десятичном знаке. Сказанное можно отнести в полной мере также к единым y -, z -, yz , и zy -выражениям передаточной функции по напряжению схемы избирательного усилителя (см. пункт 4.9.2.), сформированным с помощью программы **CIRSYM**.

Таблица 4.5

Показатели сложности и время формирования единых выражений для $\mu A741$

Виды показателей	Единые выражения различных типов			
	y -выражение	z -выражение	yz -выражение	zy -выражение
Умножения	34310	47123	41036	54315
Деления	116	114	229	34
Сложения	37240	40267	38147	45832
Вычитания	2296	2882	2619	2522
Присваивания	257	257	257	257
Пары скобок	57297	60008	69340	75058
Время, в сек.	526	540	550	564

4.9.4. Применение методов схемных миноров для решения систем линейных алгебраических уравнений в аналитическом виде

Матричный аппарат нашел широкое применение в задачах моделирования электрических и электронных цепей [55 - 58]. Существенно менее разработаны вопросы использования методов теории электрических цепей для решения систем линейных алгебраических уравнений произвольной физической природы [4].

Пусть A – квадратная матрица порядка n . Определитель этой матрицы можно разложить путем рекурсивного применения формулы

$$\Delta = (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} + \Delta_{ij}(a_{ij}=0), \quad (4.10) \text{ где } \Delta_{ij}$$

- минор элемента a_{ij} и $\Delta_{ij}(a_{ij}=0)$ - определитель производной матрицы, полученной из исходной матрицы при условии $a_{ij}=0$. Как видно, порядки исходной и производной матриц одинаковы. Подобно этому, удаление генератора и приемника ИТУН (см. второе слагаемое формулы (3.1) и (3.4)) не приводит к объединению узлов схемы. Следовательно, можно говорить об аналогии между выделением элемента матрицы и выделением параметра ИТУН в соответствующей схеме.

Предлагаемое схемное отображение матрицы заключается в следующем. Каждый элемент матрицы отображается одним и только одним ИТУН на схеме с $n+1$ узлами. Нумерация узлов схемы соответствует нумерации строк (столбцов) матриц, а дополнительному узлу присвоен номер 0. При этом элементу a_{ij} соответствует ИТУН вида $(i,0)(j,0)$, где в первой паре скобок указаны узлы генератора ИТУН, а во второй – узлы приемника ИТУН. Ориентация генератора и приемника соответствует порядку следования номеров узлов пары. Значение параметра ИТУН считается равным значению отображаемого элемента матрицы. После отображения матрицы схемой можно применить алгоритм формирования оптимальных выражений схемных определителей (см. подраздел 3.5), предусматривающий деление исходной схемы, а также производных от нее схем на части, что резко сокращает объем выкладок и сложность формируемых выражений.

Соответственно двум разработанным в этом разделе методам схемных миноров возможны две формы представления определителя матрицы (схемы): 1) единое выражение; 2) последовательность выражений, в которой предыдущие выражения используются в последующих, а заключительное выражение равно искомому определителю. Уже показывалось, что выражениям второго типа свойственна существенно меньшая вычислительная сложность. Однако формирование таких выражений требует

как оптимального выбора подсхем в исходной схеме, так и нахождения оптимальной последовательности их объединения, что может составить основную долю в затратах времени на разложение определителя. В этой связи предлагается в качестве подсхем рассматривать подмножества ИТУН, соответствующие строкам исходной матрицы. Объединение подсхем-строк выполняется следующим образом: сначала объединяются первые две строки, затем к их объединению добавляется третья строка и т.д., наконец, к объединению $n-1$ строк добавляется последняя n -я строка.

Предложенные алгоритмы формирования выражений первого и второго типа были реализованы в программе **MATSYM**, в основу которой положена программа **CIRSYM**, и исследованы на ряде тестовых матриц. Наиболее трудоемкими для анализа символьными методами являются полностью заполненные матрицы. Показатели сложности выражений, сформированных программой **MATSYM** для определителей таких матриц, приводятся в табл. 4.6. Следует отметить, что в числе вычитаний учитываются и унарные минусы.

Выражения для $n=8$ и $n=9$ были использованы при решении систем уравнений с плохообусловленными матрицами: масштабированной матрицей *Гильберта* 8-го порядка (*Уилкинсон Д., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ: Линейная алгебра.*- М.: Машиностроение, 1976.- С. 37) и тестовой матрицей из книги (*Аналитик: Численно-аналитическое решение задач на малых ЭВМ / Б.А.Бублик, В.П.Клименко, С.Б.Погребинский, Ю.С.Фишман.*- Киев: Наукова думка, 1987.- С. 86-87). Установлено, что последовательности выражений, сложность которых в среднем на два порядка ниже, не дают удовлетворительных результатов по точности при решении указанных систем уравнений с 19-ти разрядной мантиссой. В то же время единые выражения обеспечивают получение точных результатов. Следует отметить, что для решения системы уравнений

девятого порядка с 13 верными знаками численными методами требуется не менее 38 десятичных разрядов в мантиссе представления чисел.

Таблица 4.6

Показатели сложности выражений определителей полных матриц

n	Единое выражение			Последовательность выражений			
	Умно- жения	Сложе- ния	Вычи- тания	Умно- жения	Сложе- ния	Вычи- тания	Присваи- вания
4	40	14	17	28	16	20	27
5	205	71	97	75	43	44	51
6	1236	424	633	186	106	98	93
7	8659	2939	4253	441	249	216	169
8	69280	23245	34069	1016	568	480	311
9	623529	206914	306681	2295	1271	1064	583

Полученные оценки сложности и вычислительной устойчивости при сравнении единых выражений и последовательностей выражений указывают на целесообразность разработки алгоритмов и программ формирования единых выражений, в чем сомневаются некоторые зарубежные специалисты [152,163]. Между тем в **России** такая задача уже решена. Например, с помощью программы **MATSYM** получено единое выражение для определителя матрицы *Гинзбурга* 40-го порядка (*Уилкинсон Д., Райни К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ: Линейная алгебра.- М.: Машиностроение, 1976.- С. 61*), длина которого составила 691467 символов. Вычисления с помощью этого выражения привели к точному результату $\Delta=1681$. Использование в этом случае системы *MathCAD-2000* дало результат 1680,99999999925. Заметим, что как в первом, так и во втором, случаях применялась точность в 15 десятичных разрядов.

Программа **MATSYM** в составе пакета **SYMBOL** свободно распространяется через Интернет-сайт: <http://astrometric.sai.msu.ru/~symbol/>.

4.10. Выводы

Предложено схемное решение задачи анализа электрических цепей по частям, которое можно рассматривать как обобщение формул (1.4) и (1.5) для произвольного числа узлов бисекции. В центре схемной диакоптики лежат понятия НУИ и минора схемы. Схемный минор вида Δ_{ij} раскрывается как определитель схемы, образованной из исходной схемы в результате подсоединения НУИ, генератор и приемник которого ориентированы из базисного узла в узлы i и j соответственно. Для симметричного минора $i=j$ генератор и приемник НУИ являются параллельными друг другу, что соответствует объединению узла i схемы с базисным узлом, которое используется в формуле (1.5).

Доказано, что подсхему относительно внешних узлов полностью задают все ее миноры, число которых рассчитывается по формуле (4.5). Показано, что число миноров подсхемы значительно меньше числа D -деревьев унисторного графа, соответствующего этой подсхеме. Так, при выделении подсхем с шестью и более узлами использование метода D -деревьев оказывается нецелесообразным. Миноры схемы, в отличие от миноров матрицы, могут быть разложены предложенными в разделе 3 топологическими методами без образования дубликаций. Выявлены неточности в известных формулах бисекции унисторного (двунаправленного) графа схемы по трем и четырем узлам.

Разработаны диакоптические методы рекурсивной бисекции схемы и иерархического объединения подсхем, свободные от ограничений на состав учитываемых линейных элементов, что выгодно отличает эти методы от

методов матричной бисекции и D -деревьев. Применение топологических методов бисекции и объединения подсхем не связано с использованием промежуточных моделей в виде матриц или графов. Сомножителями в слагаемых диакоптических формул являются миноры той или иной подсхемы, что исключает появление дубликаций на уровне подсхем.

Дано матричное доказательство для предложенного топологического правила нахождения знака совместных миноров, образующих слагаемые диакоптических формул. Суммирование слагаемых с отрицательным знаком приводит к образованию дубликаций на уровне объединения подсхем, что, как показывает сравнение выражений ССФ, полученных на основе формул (4.2) и (4.3), обеспечивает значительное сокращение числа операций.

Предложено отображать миноры подсхемы на множество ДВ, в компактной форме указывающих узлы подсоединения НУИ. Это упрощает получение диакоптических формул для заданного числа узлов бисекции, определение знака совместных миноров подсхем и компьютерную реализацию методов. Рассмотрены и реализованы в программах SYMBOL и CIRSYM два алгоритма формирования ССФ по частям, обеспечивающие представление ССФ в виде единого выражения или в виде ПВ.

Установлено, что ПВ и единые выражения ССФ имеют свои достоинства и недостатки, которые еще предстоит детально исследовать. К оптимальным результатам приводит сочетание указанных видов выражений ССФ, когда минор подсхем представляются в виде единых выражений, а объединение подсхем задается ПВ. При этом обеспечивается сокращение как затрат процессорного времени, так сложности формируемых выражений ССФ, по сравнению с известными программами символьного анализа. Получены оптимальные выражения ССФ для тестовых схем *Лаксберга*, *Старжика-Кончиковской* и ОУ $\mu A741$.

Показана эффективность применения сформированных оптимальных выражений ССФ для расчетов в частотной области по сравнению с

программами *NODAL* и *PSpice*, реализующими построение и численное решение уравнений схемы, что позволяет рекомендовать разработанную универсальную методологию формирования ССФ для многовариантных расчетов и точных вычислений.

Рассмотрено применение методов схемных миноров для раскрытия определителей матриц и решения систем линейных алгебраических уравнений в аналитическом виде. Показано, что решения, формируемые в виде единых выражений (программа **MATSYM**), обеспечивают высокую точность при решении плохообусловленных задач матричной алгебры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработано новое научное направление в области символьного анализа электрических цепей, основанное на схемном подходе, который использует понятия определителя схемы и схемных миноров. Топологическими моделями для раскрытия схемных определителей служат непосредственно схема замещения цепи и производные от нее схемы. К числу наиболее важных относятся следующие результаты.

1. Введено понятие схемного минора, который равен определителю схемы, образованной из исходной схемы в результате подсоединения НУИ. Это послужило основой для разработки аппарата формирования ССФ, альтернативного традиционному матричному аппарату и обеспечивающему нахождение ССФ через схемные определители, выделение параметров УИ, учет параметров, имеющих бесконечно большие значения, и анализ схем по частям. Отсутствуют ограничения на тип линейных элементов, допустимых для того или иного координатного базиса. Минимальный набор базовых понятий имеет физическое толкование и не связан с использованием какого-либо математического аппарата.

2. Разработаны топологические методы выделения параметров: 1) метод НУИ; 2) метод стягивания и удаления ветвей. Эти методы, предназначенные для анализа схем со всеми типами УИ и идеальными ОУ, обеспечивают разложение схемных определителей без дубликаций, не требуя трудоемкого перечисления цепей контуров передачи. Выражения ССФ, сформированные предложенными методами, оказываются более устойчивыми к вычислениям, поскольку знак перед выделяемым параметром, в отличие от матричного метода выделения параметров не

зависит от нумерации узлов схемы. При использовании метода стягивания и удаления ветвей этот знак определяется ориентацией УИ в схеме, что позволило поставить и решить задачу минимизации числа операций вычитания, главным образом обуславливающих погрешность вычислений на основе ССФ.

3. Предложена внешняя характеристика подсхемы в виде множества ее миноров. Разработаны диакоптические методы иерархического деления схемы на две подсхемы и объединения подсхем, позволяющие преодолеть существующие ограничения на тип линейных элементов и число внешних узлов подсхем. Сомножители диакоптических формул не содержат дубликаций, поскольку являются минорами некоторой подсхемы и находятся как определители производных схем, образованных в результате подсоединения НУИ к внешним узлам этой подсхемы.

4. Сформулированы правила выбора элементов и подсхем, первоочередное выделение которых обеспечивает получение оптимальных по вычислительной сложности выражений ССФ. Разработаны алгоритмы и реализованы программы для формирования выражений ССФ, оптимальных по вычислительной сложности и количеству операций вычитания. При этом исключаются предварительное получение развернутого выражения ССФ и последующая его свертка, что позволяет выполнять символьный анализ электрических цепей в сотни узлов и элементов за приемлемое время.

5. Выведены оптимальные выражения ССФ для лестничных, цепных и полных схем, а также схем с идеальными ОУ и ИТУН. Сформированные выражения обладают наилучшими показателями сложности, которые

недостижимы для известных программ символьного анализа электрических цепей, а также систем аналитических вычислений и компьютерной алгебры. Получены оптимальные по вычислительной сложности и устойчивости выражения ССФ для тестовых схем *Лаксберга*, *Стажика-Кончиковской*, операционного усилителя $\mu A741$. Показаны вычислительные преимущества оптимальных выражений ССФ по точности и быстродействию в частотной области.

6. Доказано, что необходимая информация о ССФ полной уравновешенной схемы содержится в ее ядре, то есть в подсхеме с независимыми параметрами ветвей. Разработаны топологические методы формирования оптимальных выражений ССФ для полных уравновешенных схем без применения промежуточных математических моделей. Формируемые ССФ лишены избыточности и не требуют в случае одноконтурных ядер операций извлечения квадратного корня. ССФ в случае многоконтурных ядер содержат минимальное количество таких операций.

7. Предложено схемное отображение матрицы, позволяющее непосредственно использовать разработанную методологию схемного подхода для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений электрических цепей и уравнений произвольной физической природы. Показаны вычислительные преимущества оптимальных выражений при раскрытии определителей плохообусловленных матриц высокого порядка.

8. Полученные результаты реализованы в пакете программ **SYMBOL** (<http://astrometric.sai.msu.ru/~symbol/>) для формирования ССФ электрических цепей и решения систем линейных алгебраических уравнений в аналитическом виде. Программы используют стандартный *CIR*-формат для

описания схем и в отличие от известных программ, кроме непосредственного учета всех типов УИ, предусматривают задание параметров пассивных элементов сопротивлениями, а также смешанное задание параметров.

В целом создана универсальная методология формирования ССФ линейных стационарных электрических цепей с сосредоточенными параметрами, ориентированная на применение в виде инженерных методик и компьютерных программ.

Список использованных источников

1. Анисимов В.И., Козьмин Н.Г. Анализ электронных схем на ЭЦВМ методом К-деревьев // Радиоэлектроника.- 1973.- № 6.- С. 54-59.

2. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел.- М.: Мир, 1972.- 334 с.
3. Бондарь В.А. Вычисление схемных функций по графу схемы с управляемыми источниками тока // Радиоэлектроника. - 1990. - № 3. - С. 90-92.
4. Валях Е. Последовательно-параллельные вычисления.- М.: Мир, 1985.- 456 с.
5. Васильев Н.С. Об автоматическом построении оптимальных параллельных алгоритмов вычисления арифметических выражений // Кибернетика и вычислительная техника.- Вып. 5.- М.: Наука, 1991.- С. 243-260.
6. Власенко О.Ф., Тухтаров В.Н., Филаретов В.В. Формульный вывод, оптимизационный расчет и графическое отображение передаточных функций электронных схем // Проблемы автоматизированного моделирования в электронике: Тез. докл. междунар. конф.- Киев: Общество “Знание” Украины, 1993.- С. 29-30.
7. Волгин Л.И. Аналоговые операционные преобразователи для измерительных приборов и систем.- М: Энергоатомиздат, 1983.- 208 с.
8. Галямичев Ю.П. Топологический метод анализа линейных электрических схем: Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Ленингр. ин-т инженеров жел.-дор. транспорта.- Л., 1959.- 13 с.
9. Галямичев Ю.П. Расчет активных схем при помощи деревьев схемы // Электросвязь.- 1960.- № 8.- С. 48-57.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1988.- 552 с.
11. Горев А.А., Костенко М.В. Приведение сложных сетей к простейшим эквивалентным схемам // Электричество.- 1948.- № 3.- С. 40-43.
12. Демирчян К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей.- М.: Высшая школа, 1988.- 335 с.

13. Дмитришин Р.В. Полиномиальные методы символьного анализа электрических цепей: Дис. ... докт. техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Гос. ун-т "Львовская политехника".- Львов, 1996.- 284 с. (На укр. языке).
14. Дмитришин Р.В. Кодирование Д-моделей для декомпозиции схем // Электроника и связь.- Киев, 1998.- Вып. 4, ч. 2.- С. 240-244.
15. Дмитришин Р.В., Шаповалов Ю.И. Вычисление схемных функций при многовариантном анализе схем // Радиоэлектроника.- 1978.- № 6.- С. 149-151.
16. Дмитришин Р.В., Захария А.И. Алгоритм вычисления буквенно-численных схемных функций // Теорет. электротехника.- Львов, 1979.- Вып. 26.- С. 84-87.
17. Дмитришин Р.В., Подольский М.Р. Генерация частотных схемных функций на основе свертывания смешанных мультиграфов электронных схем // Радиоэлектроника.- 1982.- № 6.- С. 4-8.
18. Дмитришин Р.В., Шаповалов Ю.И. Диакоптический алгоритм анализа сложных линейных цепей на ЭВМ // Автоматизация проектирования в электронике.- Киев, 1975.- Вып. 12.- С. 42-46.
19. Ермолаев Ю.В. Повышение точности анализа электрических цепей на основе обобщенных преобразований их схем замещения при выполнении многовариантных расчетов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Ленингр. гос. техн. ун-т.- Л., 1990.- 16 с.
20. Иваницкий А.М. Принцип взаимосоответствия (обобщенный принцип дуальности) и его применение в анализе и синтезе электрических цепей: Дис. ... докт. техн. наук в форме научного доклада: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Моск. энергетический ин-т.- М., 1991.- 40 с.
21. Игошин А.А. Моделирование и анализ радиоэлектронных цепей с идеальными преобразователями в гибридном координатном базисе:

Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.12.17 (Радиотехнические устройства и системы) / Одесский электротехн. ин-т связи.- Одесса, 1984.- 21 с.

22. Ильин В.Н. Состояние и проблемы развития автоматизированных систем схемотехнического проектирования электронных схем // Радиоэлектроника.- 1984.-№ 6.- С. 7-17.

23. Ионкин П.А., Даревский А.И., Кухаркин Е.С., Миронов В.Г., Мельников Н.А. Теоретические основы электротехники: В 2-х т. Т. 1: Основы теории линейных цепей.- М.: Высш. шк., 1976.- 544 с.

24. Казаков О.И. О методике преобразования электрического многоугольника в эквивалентную звезду // Электричество.- 1995.- № 10.- С. 60-63.

25. Казанджан Н.И., Скоробогатько Н.В., Калниболотский Ю.М. О методах численно-символьного анализа линейных электронных схем // Электрон. моделирование.- 1983.- № 4.- С. 56-60.

26. Калниболотский Ю.М., Рысин В.С. Топологический анализ электронных схем // Радиотехника.- 1969.- № 4.- С. 30-34.

27. Кирхгоф Г.Р. Избранные труды.- М.: Наука, 1988.- 428 с.

28. Кольцов А.А. Электрические схемы уравнивания.- М.: Энергия, 1976.- 272 с.

29. Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления / Под ред. Б.Бухбергера, Дж.Коллинза, Р.Лооса.- М.: Мир, 1986.- 392 с.

30. Кузьмин Н.П., Филаретов В.В. Программа оптимизации линейных электронных схем ЭКСТРЕМ: Брошюра № 358-85.- Ульяновск: ЦНТИ, 1985.- 4 с.

31. Кузьмин Н.П., Филаретов В.В. Алгоритм разбиения графа на части, использующий пути минимального ранга // Численные эксперименты в проектировании радиоэлектронной аппаратуры.- Пенза: Политехн. ин-т, 1987.- Вып. 1.- С. 43-45.

32. Курганов С.А., Филаретов В.В. Анализ биполярных интегральных схем методом независимых токов // Электрон. техника. Сер. 3: Микроэлектроника.- 1981.- Вып. 6 (96).- С. 37-40.

33. Курганов С.А., Филаретов В.В. Метод многовариантного анализа статического режима электронных схем // Проблемы нелинейной электротехники: Тез. докл. 1-й Всесоюз. конф.- Киев: Наукова думка, 1981.- Ч. 1.- С. 174-177.

34. Курганов С.А., Филаретов В.В. Модифицированный метод к - деревьев / Ред. журн. "Радиотехника".- Деп. в ЦНТИ "Информсвязь" 12 02 82, № 110.- 15 с.- Реф. в: Радиотехника.- 1982.- № 9.- С. 88.

35. Курганов С.А., Филаретов В.В. Использование обратных компонентных функций в моделях многовариантного анализа статического режима электрических цепей // 6-я Всесоюз. конф. по теории и методам расчета нелинейных цепей и систем: Тез. докл.- Ташкент: Политехн. ин-т, 1982.- Ч. 2.- С. 121-122.

36. Курганов С.А., Савиновский Ю.А., Филаретов В.В. и др. Разработка комплекса программ анализа и оптимизации режимов работы вторичных источников питания: Отчет о НИР / Ульянов. политехн. ин-т.- № 25-6/81; № ГР81010952; Инв. № 0283.0017521.- Ульяновск, 1982.- 157 с.

37. Курганов С.А., Филаретов В.В. Численный алгоритм анализа активных фильтров и усилителей со сложной коррекцией в частотной области // Вопросы теории и проектирования аналоговых измерительных преобразователей.- Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983.- Вып. 3.- С. 80-83.

38. Курганов С.А., Филаретов В.В. Формирование узловых уравнений электроэнергетических цепей и сетей на основе ветвевых множеств // Энергетика.- 1983.- № 4.- С. 26-28.

39. Курганов С.А., Филаретов В.В. Метод многовариантного анализа нелинейных электронных схем // Электричество.- 1983.- № 5.- С. 42-43.

40. Курганов С.А., Филаретов В.В. Комбинированный метод анализа электрических цепей // Изв. вузов МВ и ССО СССР. Электромеханика.- 1984.- № 5.- С. 63-67.

41. Лаксберг Э.А. Частотный анализ линейных электронных схем с помощью ЭЦВМ на основе у-матрицы // Автоматизация проектирования в электронике.- Киев, 1973.- Вып. 8.- С. 22-32.

42. Лаксберг Э.А. Руководство по применению программы частотного анализа линейных схем ПЧАЛС-3.- Таллин: Политехн. ин-т, 1976.- 32 с.

43. Лаксберг Э.А. Моделирование электронных цепей на основе схемной редукции.- Таллин: Валгус, 1990.- 159 с.

44. Максвелл Д.К. Трактат об электричестве и магнетизме. В 2-х т. Т. 1.- М.: Наука, 1989.- 416 с.

45. Максимович Н.Г. Линейные электрические цепи и их преобразования.- М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961.- 264 с.

46. Мигулин И.Н., Чаповский М.З. Интегральные микросхемы в радиоэлектронных устройствах.- Киев: Техніка, 1985.- 208 с.

47. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы.- М.: Изд-во иностранной лит., 1963.- 620 с.

48. Нагорный Л.Я. Анализ и расчет усилительных схем.- Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1963.- 244 с.

49. Неплехович В.И., Ильин В.Н. Решение разреженных уравнений электронных схем методом контуров и узлов // Радиоэлектроника.- 1977.- № 6.- С. 19-30.

50. Новиков А.П. Преобразование электрического многоугольника в эквивалентную звезду // Электричество.- 1946.- № 10.- С. 59-61.

51. Остапенко А.Г. Анализ и синтез линейных радиоэлектронных цепей с помощью графов: Аналоговые и цифровые фильтры.- М.: Радио и связь, 1985.- 280 с.

52. Пятин Ю.М. Основы расчета логометрических приборов: Дис. ... докт. техн. наук / МВТУ им. Н.Э.Баумана.- М., 1955.- 235 с.
53. Рыбин А.И., Скрынский В.С., Шарпан О.Б., Ястребов Н.И. Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине “Основы теории цепей”.- Киев: Политехн. ин-т, 1987.- 44 с.
54. Савиновский Ю.А., Курганов С.А., Филаретов В.В. Алгоритм генерации прадеревьев комбинированного графа / Ред. журн. “Радиоэлектроника”.- Деп. в ВИНТИ 22 07 82, № 3951-В82.- 8 с.- Реф. в: Радиоэлектроника.- 1982.- № 12.- С. 96.
55. Савиновский Ю.А., Курганов С.А., Филаретов В.В. Инструкция по эксплуатации автоматизированной программы анализа электронных схем KRECHET.- Ульяновск: Ульян. политехн. ин-т, 1983.- 9 с.
56. Сешу С., Рид М.Б. Линейные графы и электрические цепи.- М.: Высш. шк., 1971.- 448 с.
57. Сигорский В.П. Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами.- Киев: Изд-во АН УССР, 1958.- 402 с.
58. Сигорский В.П. Анализ электронных схем.- Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1960.- 176 с.
59. Тарабаров С.Б. Анализ электронных схем методом формирования матрицы алгебраических дополнений // Радиоэлектроника.- 1983.- № 6.- С. 77-79.
60. Тарабаров С.Б. Алгоритм окаймления для формирования матрицы алгебраических дополнений // Радиоэлектроника.- 1984.- № 6.- С. 47-50.
61. Тарабаров С.Б. Множественно-топологический метод анализа электронных схем // Радиоэлектроника.- 1985.- № 6.- С. 100-102.
62. Тимкин Ю.В. Анализ электронных схем методом двунаправленных графов.- М.: Энергоатомиздат, 1985.- 256 с.

63. Трохименко Я.К. Вычисление суммарных алгебраических дополнений теоретико-множественными методами // Радиоэлектроника.- 1997.- № 1.- С. 3-12.
64. Трохименко Я.К. Модификация метода обобщенных чисел // Радиоэлектроника.- 1999.- № 9.- С. 3-14.
65. Трохименко Я.К., Тарабаров С.Б. Алгоритм символьно-численного анализа электронных схем // Радиоэлектроника.- 1986.- № 11.- С. 23-26.
66. Филаретов В.В. Моделирование электроэнергетических цепей в координатном базисе звездного дерева / Ред. журн. “Энергетика”.- Деп. в ЦНТИ “Информэнерго” 21 09 84, № 1479эн-Д84.- 13 с.
67. Филаретов В.В. Генерация прадеревьев посредством унисторного базисного прадрева / Ред. журн. “Радиоэлектроника”.- Деп. в ВИНТИ 11 05 84, № 3016-В84.- 10 с.- Реф. в: Радиоэлектроника.- 1984.- № 11.- С. 67.
68. Филаретов В.В. Стек-списковая модель электронной схемы в базисе расширенных множеств ветвей / Ред. журн. “Радиоэлектроника”.- Деп. в ВИНТИ 11 05 84, № 3017-В84.- 12 с.- Реф. в: Радиоэлектроника.- 1984.- № 11.- С. 67.
69. Филаретов В.В. К цифровому моделированию электронных схем в топологическом базисе ветвей // Электрон. моделирование.- 1985.- № 6.- С. 92-94.
70. Филаретов В.В. Метод разложения определителя ненаправленного графа по ребрам с максимальным участием / Ред. журн. “Радиоэлектроника”.- Деп. в ВИНТИ 27.11.85, № 8184-В85.- 12 с.- Реф. в: Радиоэлектроника.- 1986.- № 3.- С. 110.
71. Филаретов В.В. Экономное разложение определителей графов проводимостей на цепные ветвящиеся произведения / Ред. журн. “Энергетика”.- Деп. в ВИНТИ 31 01 86, № 716-В86.- 9 с.

72. Филаретов В.В. Рекурсивные методы выражения определителя ненаправленного графа // Теорет. электротехника.- Львов, 1986.- Вып. 40.- С. 6-12.
73. Филаретов В.В. Расчет электрических цепей с помощью топологических таблиц (дискуссия по статье А.Г.Карепова) // Электричество.- 1986.- № 12.- С. 63-64.
74. Филаретов В.В. Метод разложения структурного (обобщенного) числа по ребрам в форме цепного ветвящегося произведения / Ред. журн. "Радиоэлектроника".- Деп. в ВИНТИ 29 08 86, № 6288-B86.- 18 с.- Реф. в: Радиоэлектроника.- 1987.- № 6.- С. 92.
75. Филаретов В.В. Разложение определителя ненаправленного графа по сечению / Ред. журн. "Энергетика".- Деп. в ВИНТИ 10 03 87, № 1717-B87.- 10 с.
76. Филаретов В.В. Метод изоморфных преобразований для анализа квазиполных и квазиоднородных графов проводимостей // Электричество.- 1987.- № 5.- С. 5-9.
77. Филаретов В.В. Формирование коэффициентов функций RLC-схемы полной топологической структуры // Электричество.- 1987.- № 6.- С. 42-47.
78. Филаретов В.В. Алгоритм упорядочения деревьев на основе унисторных пометок вершин // Радиоэлектроника.- 1987.- № 6.- С. 90-91.
79. Филаретов В.В. Алгоритм формирования экономных буквенно-численных выражений для коэффициентов схемных функций // Электрон. моделирование.- 1987.- № 4.- С. 33-35.
80. Филаретов В.В. Основные конструкции и реализация входного языка с высокой информативностью для САПР электронных схем // Автоматизация проектирования в электронике.- Киев, 1987.- Вып. 36.- С. 85-90.
81. Филаретов В.В. К структурному синтезу электронных схем на основе многовариантного анализа модификаций порождающей схемы //

Вопросы теории и проектирования аналоговых измерительных преобразователей.- Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987.- Вып. 5.- С. 24-29.

82. Филаретов В.В. Программа автоматического вывода аналитических выражений для функций аналоговых измерительных преобразователей // 8-я Всесоюз. конф. “Измерительные информационные системы”: Тез. докл.- Ташкент: Политехн. ин-т, 1987.- Ч. 3.- С. 115.

83. Филаретов В.В. Символьно-численный анализ электронной схемы в базисе управляющих напряжений нелинейных компонентов // Проблемы нелинейной электротехники: Тез. докл. 3-й Всесоюз. конф.- Киев: Изд-во ин-та электродинамики АН УССР, 1988.- Ч. 1.- С. 183-186.

84. Филаретов В.В. Алгоритм разложения определителя ненаправленного графа проводимостей по ребрам, входящим в пути между парами вершин // Теорет. электротехника.- Львов, 1988.- Вып. 45.- С. 28-34.

85. Филаретов В.В. Адаптивный алгоритм символьного анализа электронных схем на основе унитарно-сигнального графа / Ред. журн. “Радиоэлектроника”.- Деп. в ВИНТИ 29 12 88, № 9182-B88.- 14 с.- Реф. в: Радиоэлектроника.- 1989.- № 12.- С. 78.

86. Филаретов В.В. Унитарно-сигнальный граф электронной схемы и его анализ // Электричество.- 1989.- № 9.- С. 48-55.

87. Филаретов В.В. Неявный принцип наложения и анализ линейных электрических цепей // Электричество.- 1990.- № 3.- С. 37-43.

88. Филаретов В.В. Уравнения топологических функций и их некоторые свойства // Электричество.- 1990.- № 5.- С. 73-76.

89. Филаретов В.В. Разложение определителя гибридного графа схемы с усилителями напряжения методом удаления и стягивания сигнальных дуг // Электрон. моделирование.- 1990.- № 3.- С. 38-44.

90. Филаретов В.В. Алгоритмы символьно-топологического анализа электрических цепей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Ленингр. гос. техн. ун-т.- Л., 1990.- 148 с.

91. Филаретов В.В. Программа SYMBOL автоматического вывода передаточной функции электронной схемы произвольной структуры // Алгоритмы и устройства обработки сигналов и автоматизация проектирования.- Таллин: АН Эстонии, 1991.- С. 130-148.

92. Филаретов В.В. Алгоритм приведения развернутых алгебраических выражений топологических функций к скобочной форме и его реализация в программе SYMBOL // Алгоритмы и устройства обработки сигналов и автоматизация проектирования.- Таллин: АН Эстонии, 1991.- С. 149-166.

93. Филаретов В.В. Диакоптика унисторно-сигнального графа электронной схемы // Теорет. электротехника.- Львов, 1992.- Вып. 51.- С. 48-54.

94. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения ветвей и дуг // Электричество.- 1992.- № 7.- С. 31-37.

95. Филаретов В.В. Исследования Вильгельма Фойснера в области теоретической электротехники // Электричество.- 1992.- № 9.- С. 64-67.

96. Филаретов В.В. Обобщенный унисторный граф электронной схемы и его анализ // Электричество.- 1993.- № 5.- С. 65-70.

97. Филаретов В.В. Оптимизация формул схемных функций электрических цепей // Электричество.- 1993.- № 9.- С. 64-68.

98. Филаретов В.В. Оптимальный синтез формул схемных функций // Проблемы автоматизированного моделирования в электронике: Сб. докл. международ. конф.- Киев: Политехн. ин-т, 1994.- С. 23-27.

99. Филаретов В.В. Приоритеты в науке, или еще об одном слагаемом успеха // Электричество.- 1994.- № 12.- С. 63-64.

100. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // Электричество.- 1995.- № 4.- С. 36-43.

101. Филаретов В.В. Топологические формулы для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду // Электричество.- 1995.- № 11.- С. 50-55.

102. Филаретов В.В. Об иерархическом подходе к символьному анализу сложных электронных схем // Проблемы физической и биомедицинской электроники: Сб. докл. международ. конф.- Киев: Национальный техн. ун-т Украины, 1996.- С. 132-136.

103. Филаретов В.В. Топологический синтез оптимальных формул для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду // Электричество.- 1996.- № 4.- С. 63-70.

104. Филаретов В.В. Оптимальная реализация дешифраторного метода анализа электрических цепей // Электричество.- 1996.- № 10.- С. 43-49.

105. Филаретов В.В. О преобразовании полного электрического многоугольника к параллельным лучевым схемам // Электричество.- 1997.- № 2.- С. 58-60.

106. Филаретов В.В. Топологический синтез оптимальных формул для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду (ответ автора на замечания А.В.Нетушила) // Электричество.- 1997.- № 3.- С. 67-68.

107. Филаретов В.В. Схемный подход к символьному анализу активных электрических цепей // Электроника и связь: Науч.-техн. сб.- Киев, 1997.- Вып. 2.- Ч. 1.-С. 97-101.

108. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.- 1998.- № 5.- С. 43-52.

109. Филаретов В.В., Кузьмин Н.П., Тимофеев В.Ф. и др. Комплекс программ анализа и оптимизации линейных электронных схем ПОЛЭС: Отчет о НИР / Ульян. политехн. ин-т.- № 0-100/85; № ГР01850073775; Инв. № 0286.0074623.- Ульяновск, 1985.- 68 с.

110. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Адаптивный алгоритм и программа генерации сверхкомпактных символьных выражений схемных функций // Проблемы автоматизированного моделирования в электронике: Тез. докл. международ. конф.- Киев: Об-во “Знание” Украины, 1993.- С. 28-29.

111. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Машинная генерация оптимальных формул для функций пассивных схем // Проблемы автоматизированного моделирования в электронике: Сб. докл. международ. конф.- Киев: Политехн. ин-т, 1994.- С. 28-32.

112. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Оптимальный синтез символьных функций для сложных схем с операционными усилителями // Проблемы физической и биомедицинской электроники: Сб. докл. международ. конф.- Киев: Политехн. ин-т, 1995.- С. 216-220.

113. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Символьная машинная программа вывода формул для функций активных и пассивных электрических цепей // Тез. докл. 30-й науч.-техн. конф.- Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 1996.- Ч. 1.- С. 43-44.

114. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Компьютерный интеллектуальный справочник схемных функций активных электрических цепей // Методы и средства преобразования и обработки аналоговой информации: Тез. докл. международ. конф. - Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 1999.- С. 13.

115. Хейнлейн В.Е., Холмс В.Х. Активные фильтры для интегральных схем.- М.: Связь, 1980.- 656 с.

116. Чуа Л.О., Лин П.М. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы.- М.: Энергия, 1980.- 640 с.

117. Шакиров М.А. Преобразования и диакоптика электрических цепей.- Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.- 196 с.

118. Шакиров М.А. Расчет сложных z-схем методом преобразований обобщенно-параллельных соединений: Методические указания.- Л.: Ленингр. политехн. ин-т, 1985.- 28 с.

119. Шакиров М.А. Декомпозиционные алгоритмы анализа электромагнитных полей.- Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1992.- 240 с.

120. Шакиров М.А., Кияткин Р.П., Королева Т.И., Филаретов В.В. Сигнальные графы электрических цепей: Учеб. пособие.- Л.: Ленингр. гос. техн. ун-т, 1991.- 74 с.

121. Шакиров М.А., Кияткин Р.П., Филаретов В.В., Жен Х. Диакоптика электрических цепей и электромагнитных полей // Инновационные наукоемкие технологии для России: Тез. докл. Российской конф.- Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петербургского гос. техн. ун-та, 1995.- Ч. 2.- С. 81.

122. Шакиров М.А., Кияткин Р.П., Ладанюк Л.Я., Лопатин В.С., Боронин В.Н., Важнов С.А., Виноградов С.Е., Злобина О.А., Калимов А.Г., Королева Т.И., Кочеткова Е.Ю., Миэринь М.А., Новгородцев А.Б., Филаретов В.В., Юринов В.М. Практикум по ТОЭ. Ч. 1.- Санкт-Петербург: С.-Петербургский гос. техн. ун-т, 1995.- 159 с.

123. Шакиров М.А., Кияткин Р.П., Лопатин В.С., Боронин В.Н., Важнов С.А., Виноградов С.Е., Злобина О.А., Калимов А.Г., Королева Т.И., Кочеткова Е.Ю., Миэринь М.А., Новгородцев А.Б., Потиеенко А.А., Плакс А.Е., Филаретов В.В., Юринов В.М. Практикум по ТОЭ. Ч. 2.- Санкт-Петербург: С.-Петербургский гос. техн. ун-т, 1995.- 173 с.

124. Шаповалов Ю.И. Машинный топологический расчет схемных функций электронных схем методом подсхем: Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.12 (Системы автоматизированного проектирования и автоматизация технологической подготовки производства в электронной и радиотехнической промышленности) / Львов. политехн. ин-т.- Львов, 1978.- 164 с.

125. Шаповалов Ю.И., Давидюк Р.Д. Особенности реализации метода топологического анализа схем в программе АС13ЕС // Радиоэлектроника.- 1983.- № 6.- С. 79-81.

126. Шибицкий В.П. Минимизация избыточности в топологическом методе анализа активных трехполюсников на ЭВМ // Электрон. моделирование.- 1981.- № 2.- С. 101-103.

127. Ястребов Н.И. Повышение эффективности декомпозиционных алгоритмов символьного анализа // Радиоэлектроника.- 1985.- № 6.- С. 102-104.
128. Ahrens W. Ueber das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung // Mathematische Annalen.- Leipzig, 1897.- Bd 49.- S. 311-324.
129. Barrows J.T. Extension of Fuessner's method to active networks // Circuit theory.- 1966.- Vol. CT-13, N 6.- P. 198-200.
130. Breuer M.A. Generation of optimal code for expressions via factorization // Communications of the Association for computing machinery.- 1969.- Vol. 12, N 6.- P. 333-340.
131. Chang S.M., MacKay J.F., Wierzba G.M. Matrix reduction and numerical approximation during computation techniques for symbolic analog circuit analysis // ISCAS.- 1992.- P. 1153-1156.
132. Chang S.M., Wierzba G.M. Circuit level decomposition of networks with nullors for symbolic analysis // Circuits and systems.- 1994.- Vol. CAS-41.- P. 699-711.
133. Coates C.L. General topological formulas for linear network functions // Circuit theory.- 1958.- Vol. CT-5, N 3.- P. 42-54.
134. Constantinescu F., Nitescu M., Iordache M., Dumitriu L., Muntean R., Botinant A. Selection of the best hierarchical structure in symbolic analysis problems // SMA CD.- 1998.- P. 187-190.
135. Cristea P., Tuduce R. Efficient hybrid method for electronic circuit analysis // SMA CD.- 1998.- P. 181-186.
136. Dmytryshyn R. The use of symbolic-numerical methods for electronic circuit analysis // ISCAS.- 1993.- P. 1655-1657.
137. Dmytryshyn R. , Kubaszek A. Sequence of expressions generation for the repetitive analysis acceleration // SMA CD.- 1998.- P. 154-159.

138. Dumitriu L., Iordache M., Botinant A., Muntean R. Efficient generation of symbolic network functions using two-graph decomposition on levels // SMACD.- 1998.- P. 191-198.
139. Echtenkamp J.A., Hassoun M.M., Prabhu G.M., Wright C.T. Hierarchical sensitivity analysis for sequence of expressions method // ECCTD.- 1995.- P. 75-78.
140. Fernandez F.V., Wambacq P., Gielen G., Rodriguez-Vazquez A., Sansen W. Symbolic analysis of large analog integrated circuits by approximation during expression generation // ISCAS.- 1994.- P. 25-28.
141. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern // Annalen der Physik.- 1902.- Bd 9, N 13.- S. 1304-1329.
142. Feussner W. Ueber Verzweigung elektrischer Strome // Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beforderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. - Marburg, 1902. - N 8 (December).- S. 105-115.
143. Feussner W. Einige Satze zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beforderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg.- Marburg, 1904.- N 7 (August).- S. 83-87.
144. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Annalen der Physik.- 1904.- Bd 15, N 12.- S. 385-394.
145. Filaretov V.V. A unistor signal flow graph for an electronic circuit and its analysis // Electrical technology.- 1989.- N 3.- 14 p.
146. Filaretov V.V. Improved decoding method for electrical network analysis // Electrical technology.- 1996.- N 4.- P. 41-53.
147. Filaretov V.V. A topological analysis of electronic circuits by a parameter extraction method // Electrical technology.- 1998.- N 2.- P. 46-61.
148. Gielen G. Symbolic analysis methods and applications - An overview // ISCAS.- 1992.- P. 1141-1144.

149. Guerra O., Rodriguez-Garcia J.D., Fernandez F.V., Rodriguez-Vazquez A. True hierarchical symbolic analysis of large-scale analog integrated circuits // SMACD.- 1998.- P. 164-167.
150. Hassoun M.M. Hierarchical symbolic analysis of large-scale systems using a Mason's signal flow graph model // ISCAS.- 1991.- P. 802-805.
151. Hassoun M.M., Lin P.M. A new network approach to symbolic simulation of large-scale networks // ISCAS.- 1989.- P. 806-809.
152. Hassoun M.M., Lin P.M. A hierarchical network approach to symbolic analysis of large-scale networks // IEEE Transactions on circuits and systems - 1: Fundamental theory and applications.- 1995.- Vol. 42, N 4.- P. 201-211.
153. Hennig E., Tweer J.M., Sommer R. Enhanced symbolic matrix approximation techniques // SMACD.- 1998.- P. 199-206.
154. Hoang S. Direct topological rules for analysis of networks without magnetic coupling // Archiwum elektrotechniki. - 1974.- T. 23, z. 2.- S. 387-405.
155. Hoang S. Direct and shortcut topological rules for analysis of networks with magnetic coupling // Archiwum elektrotechniki. - 1974.- T. 23, z. 2.- S. 407-425.
156. Hoang S. Regular cycle sets and transfer link chains in the direct topological method of network analysis // Archiwum elektrotechniki.- 1974.- T. 23, z. 4.- S. 1069-1082.
157. Hoang S. Direct topological method of analysis of networks containing operational amplifiers // Archiwum elektrotechniki.- 1981.- T. 30, z. 118-4.- S. 911-922.
158. Hoang S. About the stability of frequency-independent networks // CAS.- 1985.- Vol. CAS-32, N 9.- P. 970-973.
159. Huelsman L.P. Personal computer symbolic analysis programs for undergraduate engineering courses // ISCAS.- 1989.- P. 798-801.

160. Jou S.J., Perng M.F., Su C.C., Wang C.K. Hierarchical techniques for symbolic analysis of large electronic circuits // ISCAS.- 1994.- P. 21-24.
161. Kennelly A.E. The equivalence of triangles and three-pointed stars in conducting networks // Electrical world and engineer.- New York, 1899.- Vol. 34, N 12.- P. 413-414.
162. Lin P.M. Symbolic network analysis.- Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo: Elsevier, 1991.- 319 p.
163. Lin P.M. Sensitivity analysis of large linear networks using symbolic programs // ISCAS.- 1992.- P. 1145-1148.
164. Mutrie M.P.W., Char B.W., Bartels R.H. Expression optimization in a symbolic-numeric interface // Coupling symbolic and numerical computing in expert systems, II.- Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo: Elsevier, 1988.- P. 57-66.
165. Pierzchala M., Rodanski B. Obtaining symbolic network functions of large circuits by block decomposition of the node admittance matrix // ECCTD.- 1995.- P. 71-74.
166. Pierzchala M., Rodanski B.S. Direct calculation of numerical coefficients in semi-symbolic circuit analysis // SMACD.- 1998.- P. 173-176.
167. Rosen A. A new network theorem // Journal of the institution of electrical engineers.- London, 1924.- Vol. 62.- P. 916-918.
168. Shen D.W.C. Generalized star and mesh transformations // The philosophical magazine.- London, 1947.- Vol. 38, N 279 (April).- P. 267-275.
169. Starzyk J.A., Konczykowska A. Flowgraph analysis of large electronic networks // Circuits and systems.- 1986.- Vol. CAS-33, N 3.- P. 302-315.
170. Verhaegen W., Gielen G. An efficient evaluation scheme for linear transfer functions using the determinant decision diagram representation of the system determinant // SMACD.- 1998.- P. 125-129.
171. Wang R.T.P. On the sign of a common tree product // Circuit theory.- 1966.- Vol. CT-13, N 3.- P. 103-105.

172. Wheatstone C. Beschreibung verschiedener neuen Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer Volta'schen Kette // Annalen der Physik und Chemie.- Leipzig, 1844.- Bd 62.- S. 499-543.

173. Wozniacki H. Analiza ukladow elektrycznych za pomoca ukladow przelaczajacych // Biuletyn wojskowej akademii technicznej im. J.Dabrowskiego.- 1967.- N 11.- S. 19-35.

Условные сокращения в названиях источников

Радиоэлектроника	Изв. высш. учеб. заведений МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника
Энергетика	Изв. высш. учеб. заведений МВ и ССО СССР. Энергетика

Circuit theory	IRE (IEEE с 1963 г.) Transactions on circuit theory IRE Institute of Radio engineers (США)
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers (США)
Circuits and systems	IEEE Transactions on circuits and systems
ECCTD	Proceedings of the European conference on circuit theory and design / European circuit society
ISCAS	IEEE Proceedings of the international symposium on circuits and systems
MWSCAS	IEEE Proceedings of the Midwest symposium on circuits and systems
SMACD'98	Proceedings of the fifth international workshop on Symbolic Methods and Applications in Circuit Design. Kaiserslautern (October 8-9, 1998)

Сведения об авторе

Филаретов Владимир Валентинович – кандидат технических наук, доцент кафедры “Электроснабжение” Ульяновского государственного технического университета: 432027, Ульяновск, ул. Северный венец, д. 32, УлГТУ. Служебный телефон: (8422) 43-91-05.

Домашний адрес: 432035, Ульяновск, ул. Локомотивная, д. 203, кв. 5.

Домашний телефон: (8422) 38-17-34.

Е-mail: vvfil@mail.ru

Web-сайт: <http://astrometric.sai.msu.ru/~symbol>